Álgebra lineal

Quinta edición

BEST SELLER INTERNACIONAL

Stanley I. Grossman

Álgebra lineal

Quinta edición

Stanley I. Grossman
University of Montana y University College London

Traducción:
Marcia González Osuna
Matemática, Facultad de Ciencias, UNAM
Maestría en Ingeniería Industrial, University of Arizona
Jefe del Departamento de Ingeniería Industrial, UNAM

Revisión técnica:
M. en C. Fernando Piña Soto
Profesor asociado
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

McGRAW-HILL

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID • NUEVA YORK
PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAN • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

Gerente de producto: Alfonso García Bada Mena
Supervisor de edición: Mateo Miguel García
Supervisor de producción: Zeferino García García

ÁLGEBRA LINEAL

ISBN 970-10-0890-1

ISBN 968-422-984-4 Cuarta Edición

Traducido de la quinta edición en inglés de
ELEMENTARY LINEAR ALGEBRA WITH APPLICATIONS

ISBN 0-03-097354-6

1302456789 09876542103

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se terminó de
Imprimir en Enero del 2004
Litográfica Ingramex
Centeno Núm. 162-1
Col. Granjas Esmeralda
Delegación Iztapalapa
09810 México, D.F.

Para Kerstin, Aaron y Erick

Prefacio

El estudio del álgebra lineal, hace tan sólo unos treinta años, estaba confinado nada más a los estudiantes de matemáticas y física y a aquellos que necesitaban conocimientos de la teoría de matrices para trabajar en áreas técnicas como estadística multivariada. El álgebra lineal se estudia ahora en muchas disciplinas debido a la invención de las computadoras de alta velocidad y al aumento general en las aplicaciones de las matemáticas en áreas que por tradición no son técnicas.

Prerrequisitos

Al escribir este libro tuve en mente dos metas. Intenté volver accesibles un gran número de temas de álgebra lineal para una gran variedad de estudiantes que necesitan sólo conocimientos firmes del álgebra correspondiente a la enseñanza media superior. Como muchos estudiantes habrán llevado un curso de un año de cálculo, incluí también varios ejemplos y ejercicios que involucran algunos temas de esta materia. Éstos se indican con el símbolo [Cálculo]. Una sección opcional (la sección 6.7) requiere cálculo, de no ser por ésta el *calculo no es un prerrequisito.*

Aplicaciones

Mi segunda meta fue convencer a los estudiantes de la importancia del álgebra lineal en sus campos de estudio. Así, el contexto de los ejemplos y ejercicios se refiere a diferentes disciplinas. Algunos de estos ejemplos son cortos, como las aplicaciones de la multiplicación de matrices al contagio de una enfermedad (página 67). Otros son un poco más grandes; entre éstos se pueden contar el modelo de insumo-producto de Leontief (páginas 18 a 20 y 108 a 111), la teoría de gráficas (sección 1.12), la aproximación por mínimos cuadrados (sección 4.10) y un modelo de crecimiento de la población (sección 6.2). El libro de ejercicios *Suplemento de aplicaciones de álgebra lineal* contiene aplicaciones interesantes de álgebra lineal a la programación lineal, cadenas de Markov y teoría de juegos.

Además, se puede encontrar un número no despreciable de aplicaciones sugestivas en las secciones de MATLAB®, que son nuevas en esta edición. En las páginas viii y xviii se puede encontrar una descripción completa del uso de MATLAB.

Teoría

Para muchos estudiantes el de álgebra lineal es el primer curso real de *matemáticas*. En este curso se pide a los estudiantes no nada más que lleven a cabo cálculos matemáticos sino también que desarrollen demostraciones. Intenté, en este libro, lograr un equilibrio

entre la técnica y la teoría. Todas las técnicas importantes se describen con mucho detalle y se dan muchos ejemplos que ilustran su utilización. Al mismo tiempo, se demuestran todos los teoremas que se pueden probar usando resultados dados aquí. Las demostraciones más difíciles se dan al final de las secciones o en secciones especiales, pero *se dan*. El resultado es un libro que proporcionará a los estudiantes tanto las habilidades algebraicas necesarias para resolver problemas que surjan en sus áreas de estudio como una mayor apreciación de la belleza de las matemáticas.

CARACTERÍSTICAS

En esta quinta edición se conservaron muchas de las características de la cuarta y se describen a continuación. Las nuevas características se enumeran en la página viii.

Ejemplos

Los estudiantes aprenden matemáticas viendo ejemplos completos y claros. La quinta edición contiene 342 ejemplos y hay otros 80 en el *Suplemento de aplicaciones*. Cada ejemplo incluye todos los pasos algebraicos necesarios para completar la solución. En muchos casos se pusieron ayudas didácticas en otro tipo de letra para facilitar el seguimiento de esos pasos. Además, se dio un nombre a los ejemplos para que sea más sencillo entender el concepto esencial que ilustra cada uno.

Ejercicios

El texto contiene cerca de 2400 ejercicios (y 455 adicionales en el *Suplemento de aplicaciones*). Al igual que en todos los libros de matemáticas, constituyen la herramienta más importante del aprendizaje. El orden de los problemas se determinó según el grado de dificultad y existe un equilibrio entre la técnica y las demostraciones. Los problemas más complicados están marcados con un asterisco (*) y unos cuantos excepcionalmente difíciles con dos (**). Éstos se complementan con ejercicios de repaso al final de cada capítulo. Al final del libro se dan las respuestas a casi *todos* los problemas impares, incluyendo aquellos que requieren demostraciones. De los 2400 ejercicios, alrededor de 300 nuevos se encuentran en apartados especiales, de las secciones de problemas bajo el título de "Manejo de calculadora" y "MATLAB". Se hablará más sobre estas características.

Teorema de resumen

Una característica importante es la aparición frecuente del teorema de resumen, que une temas que en apariencia no tienen nada en común dentro del estudio de matrices y transformaciones lineales. En las sección 1.2 (página 5) se presenta el teorema por primera vez. En las secciones 1.8 (p. 111), 1.10 (p. 132), 2.4 (p.216), 4.5 (p. 325), 4.7 (p. 360), 5.4 (p. 515) y 6.1 (p. 546) se encuentran versiones cada vez más completas de este teorema.

Autoevaluación

Casi todos los conjuntos de problemas comienzan con preguntas de opción múltiple o de falso-verdadero que requieren pocos o ningún cálculo. Las respuestas a estos problemas aparecen al pie de la última página en la que ocurren (no al final del libro). Estos problemas están diseñados para ver si el estudiante entiende las ideas básicas de la sección, y se deben resolver antes de intentar los problemas más generales que les siguen. Los problemas de autoevaluación son nuevos en esta edición.

Manejo de calculadora

Muchos estudiantes de álgebra lineal tienen acceso a calculadoras graficadoras que realizan operaciones con matrices y vectores. En consecuencia, después de ciertos conjuntos de problemas —en especial en las primeras partes del libro que involucran más cálculos— agregué secciones de "manejo de calculadora" para ayudarlos a usar sus calculadoras en este curso.

Cada sección comienza con una descripción detallada de cómo usar la TI-85 y, cuando fue posible, la Casio fx-7700 GB para resolver problemas en la sección anterior. Estas descripciones, por lo general van seguidas de problemas adicionales con números más complicados que se pueden resolver con facilidad en una calculadora. Esta característica será útil para los estudiantes que tienen una calculadora adecuada. Sin embargo, debe hacerse hincapié en que *no se requiere que posean una calculadora graficadora para que el uso de este libro sea efectivo.* Las secciones de manejo de calculadora son una característica *opcional* que debe usarse a discreción del profesor.

Resúmenes de capítulos

Al final de cada capítulo, aparece un repaso detallado de los resultados importantes en el mismo. Incluyen referencias de páginas.

Geometría

Algunas ideas importantes en álgebra lineal se entienden mejor observando su interpretación geométrica. He resaltado las interpretaciones geométricas de conceptos importantes en varios lugares de esta edición. Éstas incluyen

- La geometría de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (p. 20)
- La interpretación geométrica de un determinante de 2×2 (pp. 180, 265)
- La interpretación geométrica del triple producto escalar (p. 266)
- Cómo dibujar un plano (p. 277)
- La interpretación geométrica de la dependencia lineal en $\mathbb{R}^3$ (p. 321)
- La geometría de una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ (pp. 495-503)
- Las isometrías de $\mathbb{R}^2$ (p. 521).

Semblanzas históricas

Las matemáticas son más interesantes si se conoce algo sobre el desarrollo histórico del tema. Para estimular este interés se incluyen varias notas históricas breves, dispersas en el libro. Además, escribí siete semblanzas no tan breves y con más detalles. Éstas incluyen:

- Carl Friedrich Gauss (p. 23)
- Sir William Rowan Hamilton (p. 54)
- Arthur Cayley y el álgebra de matrices (p. 76)
- Breve historia de los determinantes (p. 209)
- Joseph Willard Gibbs y los orígenes del análisis vectorial (p. 268)
- Historia de la inducción matemática (p. A-6)
- George Dantzig y la historia (y futuro) de la programación lineal (p. 69 del *Suplemento de aplicaciones*)

Características nuevas de la quinta edición

Esta edición, igual que las anteriores, contiene cientos de pequeños cambios sugeridos por los usuarios y revisores de la última edición. Las novedades más importantes y las omisiones en esta quinta edición son:

- Problemas de autoevaluación antes de la mayoría de los conjuntos de problemas
- El manejo de calculadora
- Las tutorías y problemas de MATLAB (que se describen a continuación)
- Una presentación de la multiplicación de matrices como una combinación lineal de las columnas de una matriz y la multiplicación de matrices de bloques (en la sección 1.6)
- Una sección de las factorizaciones LU de una matriz (sección 1.11)
- Dos de las secciones sobre métodos numéricos (métodos iterativos para resolver un sistema de ecuaciones y para calcular los valores y vectores propios) no aparecen en esta edición porque se pensó que si los estudiantes resuelven problemas numéricos, lo más probable es que usen algún software como MATLAB.

MATLAB

Una adición importante en este libro es la incorporación de más de 230 problemas opcionales para MATLAB, muchos con varios incisos, que aparecen después de la mayoría de las secciones de problemas. (MATLAB® es una marca registrada de The Math Works, Inc.) MATLAB es un paquete poderoso, pero amigable, diseñado para manejar problemas de una amplia variedad que requieren cálculos con matrices y conceptos de álgebra lineal. Los problemas, relacionados directamente con los ejemplos y los problemas normales, animarán al estudiante a explotar el poder de cálculo de MATLAB y explorar los principios de álgebra lineal a través de la obtención de conclusiones y del análisis.

La sección 1.3 es la primera que contiene problemas de MATLAB, antes de estos problemas se da una introducción y una tutoría breve. Los problemas de MATLAB en cada sección están diseñados para que el usuario conozca los comandos de MATLAB como se lo van requiriendo los problemas. Se cuenta con numerosas aplicaciones y problemas proyecto que demuestran la relevancia del álgebra lineal en el mundo real; éstos pueden servir como trabajos de grupo o proyectos cortos.

Muchos de los problemas de MATLAB están diseñados para animar a los estudiantes a descubrir teoremas de álgebra lineal. Por ejemplo, un estudiante que genere varias matrices triangulares superiores y calcule sus inversas obtendrá la conclusión natural de que la inversa de una matriz triangular superior es triangular superior. La demostración de este resultado no es trivial, pero tendrá más sentido si el estudiante "ve" que el resultado es aceptable. Prácticamente todos los conjuntos de problemas de MATLAB contienen algunos que llevan a resultados matemáticos.

Los problemas tienen sugerencias útiles que permiten al estudiante manejarlos sin sumergirse en la mecánica del uso de MATLAB. Además, se cuenta con varios incisos de "papel y lápiz" que le permiten ejercitar su juicio y demostrar que aprendió los conceptos. Los problemas se desarrollaron con cuidado y se colocaron en puntos que permiten un aprendizaje gradual del manejo del software.

Herramientas elementales de álgebra lineal (disco con archivos tipo M)

Existen 10 archivos "tipo M" que son pequeños programas de MATLAB, que se relacionan con muchos problemas de MATLAB. Los archivos tipo M están señalados por una M al margen. En los problemas correspondientes se da una descripción del uso de los archivos M. Por ejemplo, vea **lincomb.m** que ayuda a visualizar las combinaciones lineales para entender su geometría (MATLAB 3.1, problema 3, página 240), o **grafics.m** para gráficas de computadora usando matrices (MATLAB 5.1, problema 1, página 474). Los archivos tipo M se encuentran disponibles en disco (para PC o para Mac).

El apéndice 5 contiene más información sobre MATLAB, incluyendo el uso de los archivos tipo M, la disponibilidad de MATLAB Primer, la obtención de un registro de trabajo en los resultados, las consideraciones gráficas, las consideraciones sobre la versión 4.0 y sobre los nombres especiales de variables.

Lo mismo que en el caso del manejo de calculadora, se resalta aquí el hecho de que el material de MATLAB es *opcional*. Se puede asignar o no según el profesor lo crea conveniente.

Una nota sobre la longitud

La quinta edición tiene alrededor de 130 páginas más que la cuarta, a pesar de que contiene menos secciones. El aumento se debe principalmente al material opcional de MATLAB que se acaba de describir. Se eligió colocarlo junto con el texto —en lugar de en un suplemento— para que su integración fuera mayor y por lo tanto más efectiva.

Se agregó muy poco material teórico (y una parte se eliminó), para que *Álgebra lineal* conservara su diseño de un libro para cubrirse en *un* semestre. Se espera que, al usarlo, el material de MATLAB se cubra en un laboratorio separado que complemente el trabajo del salón de clase.

Numeración

La numeración en este libro es bastante estándar. Dentro de cada sección, los ejemplos, problemas, teoremas y ecuaciones están numeradas consecutivamente a partir del número 1. Las referencias a los mismos fuera de la sección se hace por capítulo, sección y número. Así, el ejemplo 4 en la sección 2.5 se llama ejemplo 4 en esa sección, pero fuera de ella se habla del ejemplo 2.5.4. Además, con frecuencia se proporciona el número de la página para que sea sencillo encontrar las referencias.

ORGANIZACIÓN

El enfoque que usé en este libro es gradual. Los capítulos 1 y 2 contienen el material computacional básico común para la mayor parte de los libros de álgebra lineal. El capítulo 1 presenta los sistemas de ecuaciones lineales, vectores y matrices. Se reorganizó para cubrir todo el material de sistemas de ecuaciones antes de introducir las matrices. Esta presentación proporciona una mayor motivación para el estudiante y sigue un orden más lógico para el curso. También se incluyó una sección (1.12) en la que se aplican las matrices a la teoría de gráficas. El capítulo 2 proporciona una introducción a los determinantes e incluye un ensayo histórico sobre las contribuciones de Leibniz y Cauchy al álgebra lineal (sección 2.3).

Incluso dentro de este material básico hay secciones opcionales que son un reto un poco mayor para el estudiante. Por ejemplo, la sección 2.3 proporciona una demostración completa de que det AB = det$A$det$B$. La demostración de este resultado, usando matrices elementales, casi nunca se incluye en los libros introductorios.

El capítulo 3 analiza los vectores en el plano y el espacio. Muchos de los temas de este capítulo se cubren en el orden de los libros de cálculo y puede ser que el estudiante ya esté familiarizado con ellos. Sin embargo, como una gran parte del álgebra lineal está relacionada con el estudio de espacios vectoriales abstractos, los estudiantes necesitan un acervo de ejemplos concretos que el estudio de los vectores en el plano y el espacio proporciona de manera natural. El material más difícil de los capítulos 4 y 5 se ilustra con ejemplos que surgen en el capítulo 3. La sección 3.4 incluye un ensayo histórico sobre Gibbs y el origen del análisis vectorial.

El capítulo 4 contiene una introducción a espacios vectoriales generales y, necesariamente, es más abstracto que los capítulos anteriores. No obstante, intenté presentar el material como una extensión natural de las propiedades de los vectores en el plano, que es en realidad la manera en que surgió el tema. La quinta edición estudia combinaciones lineales y el conjunto generado (sección 4.4) antes de la independencia lineal (sección 4.5) para explicar estos temas de manera más clara. El capítulo 4 también incluye una sección (4.10) de aplicaciones interesantes sobre la aproximación por mínimos cuadrados.

Al final del capítulo 4 agregué una sección (4.12) opcional en la que demuestro que todo espacio vectorial tiene una base. Al hacerlo se analizan los conjuntos ordenados y el lema de Zorn. Este material es más difícil que cualquier otra cosa en el libro y se puede omitir. Sin embargo, como el álgebra lineal, con frecuencia se considera el primer curso en el que las demostraciones son tan importantes como los cálculos, siento que el estudiante interesado debe disponer de una demostración de este resultado fundamental.

El capítulo 5 continúa el análisis que se inició en el 4 con una introducción a las transformaciones lineales de un espacio vectorial a otro. Comienza con dos ejemplos que muestran la manera natural en que pueden surgir las transformaciones. En la sección 5.3 incluí una descripción detallada de la geometría de las transformaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, incluí expansiones, compresiones, reflexiones y cortes. Ahora, la sección 5.5 contiene un estudio más detallado de las isometrías de $\mathbb{R}^2$.

El capítulo 6 describe la teoría de los eigenvalores y eigenvectores o valores y vectores propios. Se introducen en la sección 6.1 y en la sección 6.2 se da una aplicación biológica detallada al crecimiento poblacional. Las secciones 6.3, 6.4 y 6.5 manejan la diagonalización de una matriz, mientras que la sección 6.6 ilustra, para unos cuantos casos, cómo se puede reducir una matriz a su forma canónica de Jordan. La sección 6.7 estudia ecuaciones diferenciales matriciales y es la única sección del libro que requiere conocimientos del primer curso de cálculo. Esta sección proporciona un ejemplo de la utilidad de reducir una matriz a su forma canónica de Jordan (que normalmente es una matriz diagonal). En la sección 6.8, introduje dos de mis resultados favoritos de la teoría de matrices: el teorema de Cayley-Hamilton y el teorema de los círculos de Gershgorin. Este resultado, muy rara vez estudiado en los libros de álgebra lineal elemental, proporciona una manera sencilla de estimar los valores propios de una matriz.

En el capítulo 6 tuve que tomar una decisión difícil: si analizar o no valores y vectores propios complejos. Decidí incluirlos porque me pareció lo único honesto que podía hacer. Algunas de las matrices "más agradables" tienen valores propios complejos. Si se define un valor propio como un número real sólo en un principio se pueden simplificar las cosas, pero sin duda está equivocado. Todavía más, en muchas aplicaciones que involucran valores propios (incluyendo algunas de la sección 6.7), los modelos más interesantes se relacionan con fenómenos periódicos y éstos requieren valores propios complejos. Los números complejos no se evitan en este libro. Los estudiantes que no los han estudiado antes pueden encontrar las pocas propiedades que necesitan en el apéndice 2.

El libro tiene cinco apéndices, el primero sobre inducción matemática y el segundo sobre números complejos. Algunas de las demostraciones en este libro usan inducción matemática, por lo que el apéndice 1 proporciona una breve introducción a esta importante técnica para los estudiantes que no la han usado.

El apéndice 3 analiza el concepto básico de la complejidad de los cálculos que, entre otras cosas, ayudará a los estudiantes a entender por qué quienes desarrollan software eligen ciertos algoritmos. El apéndice 4 presenta un método razonablemente eficiente para obtener la solución numérica de los sistemas de ecuaciones. Por último, el apéndice 5 incluye algunos detalles técnicos sobre el uso de MATLAB en este libro.

Una nota sobre la interdependencia de los capítulos: este libro está escrito en forma secuencial. Cada capítulo depende de los anteriores, con una excepción: el capítulo 6 se puede cubrir sin la mayor parte del material del capítulo 5. Las secciones marcadas "opcional" se pueden omitir sin pérdida de la continuidad.

SUPLEMENTOS

Álgebra lineal, quinta edición, ofrece un paquete de apoyo poderoso para satisfacer a todo tipo de enseñanza y antecedentes de los estudiantes.

El **Suplemento de aplicaciones** contiene dos capítulos de aplicaciones de programación lineal, cadenas de Markov y teoría de juegos con muchos ejemplos y ejercicios.

Un **Manual de soluciones del estudiante**, preparado por David L. Ragozin en la University of Washington, con la ayuda de Andy Demetre y Fred Gylys-Colwell, contiene las soluciones detalladas completas de todos los problemas impares y ejercicios de repaso, incluyendo problemas para la calculadora graficadora y MATLAB.

El **Manual de soluciones para el profesor**, también preparado por David L. Ragozin y colegas, proporciona las soluciones completas de todos los problemas y ejercicios de repaso en el libro y es gratis para quienes lo adoptan como libro de texto.

Herramientas del álgebra lineal elemental es un disco con los archivos tipo M relacionados con algunos problemas de MATLAB.

También se encuentran disponibles los siguientes manuales que se pueden usar con cualquier libro de álgebra lineal para actividades de laboratorio:

HP-48G/GX Calculator Enhancement for Science and Engineering Mathematics, editado por Don LaTorre de Clemson University, se refiere al uso de calculadoras HP de alto nivel para matemáticas universitarias. Los temas incluyen cálculo de una variable, cálculo de variables múltiples, ecuaciones diferenciales, álgebra lineal, matemáticas avanzadas para ingeniería y probabilidad y estadística.

MATLAB Computer Lab Manual por Karen Donnelly de Saint Joseph's College, Rennselaer, Indiana, contiene ejercicios para el laboratorio de computación usando MATLAB. Cada sección enumera los objetivos, prerrequisitos y las características de MATLAB antes de presentar los ejercicios. Después se anima al estudiante a aplicar los conceptos en forma interactiva y crear un registro editado de las sesiones. Después de los ejercicios de laboratorio se dan ejercicios adicionales que varían en longitud y dificultad, y que el profesor puede asignar como crea conveniente.

AGRADECIMIENTOS

Estoy agradecido con muchas personas que me ayudaron cuando escribía este libro. Parte del material apareció primero en *Mathematics for the Biological Sciences* (Nueva York: Mcmillan, 1974) escrito por James E. Turner y yo mismo. Doy las gracias al profesor Turner por el permiso para usar este material.

Gran parte de este libro fue escrita mientras trabajaba como investigador asociado en la University College London. Deseo agradecer al departamento de matemáticas de UCL por proporcionarme servicios de oficina, sugerencias matemáticas y, en especial, su amistad durante mis visitas anuales.

El material de MATLAB fue escrito por Cecelia Laurie de la University of Alabama. Gracias a la profesora Laurie por la manera sobresaliente en que utilizó la computadora para mejorar el proceso de enseñanza. Éste es un mejor libro debido a sus esfuerzos.

También me gustaría agradecer a Cristina Palumbo de The MathWorks, Inc. por proporcionarnos la información más reciente sobre MATLAB.

La efectividad de un libro de texto de matemáticas depende en cierto grado de la exactitud de las respuestas. No hay nada más frustrante para un estudiante que trabajar para obtener las respuestas al final del libro, sólo para descubrir que la respuesta dada es incorrecta. Se hicieron cuatro cosas para asegurar que esto no sucediera. Primero resolví o volví a resolver todos los problemas impares y preparé una respuesta clave. Sudhir Goel en Valdosta State College resolvió todos los problemas nuevos y verificó mis respuestas con las anteriores. Cecelia Laurie preparó las soluciones a los problemas de MATLAB. Por último, David Ragozin en la University of Washington preparó el manual de soluciones del estudiante y, al hacerlo, resolvió todos los problemas impares del libro. Los profesores Goel y Ragozin me mandaron los errores que encontraron y se corrigieron en la etapa de tipografía y formación. Doy las gracias a ambos por asegurar que las respuestas al final del libro no tuvieran errores dentro de lo humanamente posible.

Me gustaría agradecer a aquellas personas que hicieron comentarios a la cuarta edición y leyeron el manuscrito de esta quinta edición. Sin los comentarios y críticas de quienes de hecho imparten el curso, el autor de un libro de álgebra lineal puede perder el contacto con su audiencia. Los revisores de la quinta edición son:

Kem Armstrong, University of Manitoba
Thomas Cairns, University of Tulsa
Pat Collier, University of Wisconsin-Oshkosh
Roger Horn, University of Utah
Irving Katz, George Washington University
Gerald Leibowitz, University of Connecticut
Maurice Monahan, South Dakota State University
John Ratcliffe, Vanderbilt University
W. Vance Underhill, East Texas State University
Marvin Zeman, Southern Illinois University-Carbondale

Mi agradecimiento a los siguientes usuarios experimentados de MATLAB por la revisión de los problemas de MATLAB:

Thomas Cairns, University of Tulsa
Karen Donnelly, Saint Joseph's College
Roger Horn, University of Utah
Irving Katz, George Washington University
Gary Platt, University of Wisconsin-Whitewater

Mi agradecimiento especial es para el personal de edición y producción en Saunders College Publishing por el cuidado y las habilidades que derramaron en este producto. Mi editor, Jay Ricci, hizo muchas sugerencias útiles. En particular, fue él quien insistió en que se incorporara MATLAB en este libro. Gracias Jay. Aprecio mucho la enorme

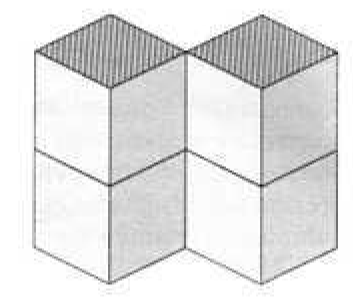
ayuda que mi gran editor de desarrollo, Marc Sherman, desde el inicio hasta la producción final. Marc atendió todos los detalles con todo cuidado y gran competencia. Por último, agradezco a Kirsten Kauffman de York Production Services por su gran habilidad e interminable alegría mientras me ayudaba a convertir mi manuscrito en un libro empastado.

Stanley I. Grossman
Missoula, Montana
Diciembre de 1993

Contenido

Contenido de los problemas de MATLAB

Se enumeran los conjuntos de problemas de MATLAB y los temas de interés especial.



1

Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

1.1 INTRODUCCIÓN

Éste es un libro sobre álgebra lineal. Si se busca la palabra "lineal" en un diccionario, se encontrará algo parecido a lo siguiente: LINEAL. (Del lat. *linealis.*) adj. Perteneciente a la línea.† En matemáticas, la palabra "lineal" tiene un significado mucho más amplio. De cualquier manera, una gran parte de la teoría de álgebra lineal elemental es de hecho una generalización de las propiedades de la línea recta. A manera de repaso, se darán algunos hechos fundamentales sobre las líneas rectas:

i. La **pendiente** m de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{si } x_1 \neq x_2$$

ii. Si $x_2 - x_1 = 0$ y $y_2 \neq y_1$, entonces la recta es vertical y se dice que la pendiente es **indefinida**.‡

iii. Cualquier recta (excepto una con pendiente indefinida) se puede describir escribiendo su ecuación en la forma pendiente-ordenada $y = mx + b$, donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada (el valor de y en el punto en el que la recta cruza el eje y).

iv. Dos rectas distintas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

v. Si la ecuación de la recta se escribe en la forma $ax + by = c$ $(b \neq 0)$, entonces, como se puede calcular fácilmente, $m = -a/b$.

---

† Tomado de *Diccionario de la lengua española*, Real Academia Española, 1984.

‡ En algunos libros se dice que la recta vertical tiene "una pendiente infinita".

vi. Si m_1 es la pendiente de la recta L_1, m_2 es la pendiente de la recta L_2, $m_1 \neq 0$ y L_1 y L_2 son perpendiculares, entonces $m_2 = -1/m_1$.

vii. Las rectas paralelas al eje x tienen una pendiente de cero.

viii. Las rectas paralelas al eje de las y tienen una pendiente indefinida.

En la siguiente sección se ilustrará la relación entre resolver sistemas de ecuaciones y encontrar los puntos de intersección entre pares de rectas.

1.2 DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Considere el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x y y:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \tag{1}$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 y b_2 son números dados. Cada una de estas ecuaciones es la ecuación de una línea recta. Una **solución** al sistema (1) es un par de números, denotados por (x, y), que satisface (1). Las preguntas que surgen en forma natural son: ¿tiene (1) algunas soluciones, y, si así es, cuántas? Se responderá a estas preguntas después de ver algunos ejemplos. En estos ejemplos se usarán dos hechos importantes del álgebra elemental:

Hecho A Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.
Hecho B Si $a = b$ y c es cualquier número real, entonces $ca = cb$.

El hecho A establece que si se suman dos ecuaciones, se obtiene una tercera ecuación correcta. El hecho B establece que si se multiplican ambos lados de una ecuación por una constante, se obtiene una segunda ecuación válida. Se debe suponer que $c \neq 0$ ya que aunque la ecuación $0 = 0$ es correcta, no es muy útil.

EJEMPLO 1 **Un sistema con una solución única** Considere el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ x + y &= 5 \end{aligned} \tag{2}$$

Si se suman las dos ecuaciones se tiene, por el hecho A, la siguiente ecuación: $2x = 12$ (o $x = 6$). Entonces, de la segunda ecuación, $y = 5 - x = 5 - 6 = -1$. Así, el par $(6, -1)$ satisface el sistema (2) y la forma en que se encontró la solución muestra que es el único par de números que lo hace. Es decir, el sistema (2) tiene una **solución única**. ✦

EJEMPLO 2 **Un sistema con un número infinito de soluciones** Considere el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ 2x - 2y &= 14 \end{aligned} \tag{3}$$

Es claro que estas dos ecuaciones son equivalentes. Esto es, cualesquiera dos números, x y y, que satisfacen la primera ecuación también satisfacen la segunda, y viceversa. Para ver esto se multiplica la primera ecuación por 2. Esto está permitido por el hecho B. Entonces $x - y = 7$ o $y = x - 7$. Así, el par $(x, x - 7)$ es una solución al sistema (3) para cualquier número real x. Es decir, el sistema (3) tiene un **número infinito de soluciones**. Para este ejemplo, los siguientes pares son soluciones: (7, 0), (0, −7), (8, 1), (1, −6), (3, −4) y (−2, −9). ✦

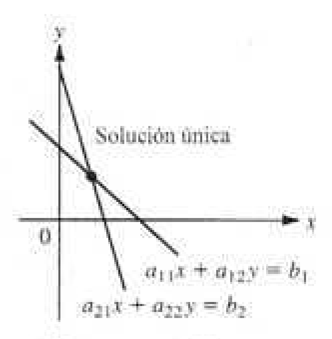
EJEMPLO 3 **Un sistema sin solución** Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x - \ \ y &= 7 \\ 2x - 2y &= 13 \end{aligned} \qquad (4)$$

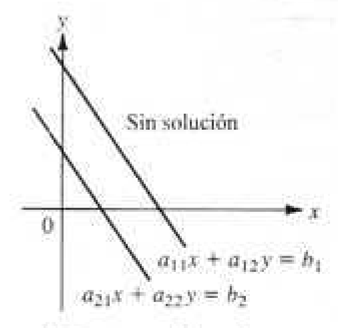
Al multiplicar la primera ecuación por 2 (que de nuevo está permitido por el hecho B) se obtiene $2x - 2y = 14$. Esto contradice la segunda ecuación. Entonces, el sistema (4) **no tiene solución**. ✦

Un sistema que no tiene solución se dice que es **inconsistente**.

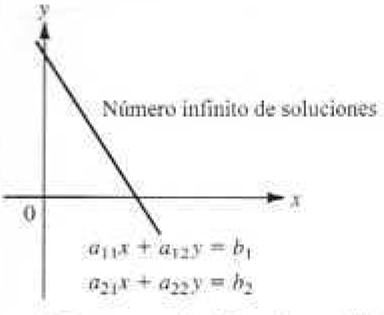
Es sencillo explicar, geométricamente, lo que pasa en los ejemplos anteriores. Primero, se repite que las ecuaciones del sistema (1) son ambas ecuaciones de líneas rectas. Una solución a (1) es un punto (x, y) que se encuentra sobre las dos rectas. Si las dos rectas no son paralelas, entonces se intersectan en un solo punto. Si son paralelas, entonces nunca se intersectan (no tienen puntos en común) o son la misma recta (un número infinito de puntos en común). En el ejemplo 1 las rectas tienen pendientes de 1 y −1, respectivamente, por lo que no son paralelas, y tienen un solo punto en común, (6, −1). En el ejemplo 2, las rectas son paralelas (pendiente 1) y coincidentes. En el ejemplo 3 las rectas son paralelas y distintas. Estas relaciones se ilustran en la figura 1.1.



a) Rectas no paralelas; un punto de intersección



b) Rectas paralelas; sin puntos de intersección



c) Rectas que coinciden; número infinito de puntos de intersección

Figura 1.1 Dos rectas se intersectan en un punto, en ninguno o (si coinciden) en un número infinito de puntos

Se resolverá el sistema (1) formalmente. Se tiene

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

Si $a_{12} = 0$, entonces $x = \dfrac{b_1}{a_{11}}$ y se puede usar la segunda ecuación para despejar y.

Si $a_{22} = 0$, entonces $x = \dfrac{b_2}{a_{21}}$ y se puede usar la primera ecuación para despejar y.

Si $a_{12} = a_{22} = 0$, entonces el sistema (1) contiene sólo una incógnita, x.

Así, se puede suponer que ni a_{12} ni a_{22} son cero.

Multiplicando la primera ecuación por a_{22} y la segunda por a_{12} se tiene

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y &= a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y &= a_{12}b_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(5)}$$

Sistemas equivalentes

Antes de continuar se observa que el sistema (1) y el sistema (5) son **equivalentes**. Se entiende por esto que cualquier solución del sistema (1) es una solución del sistema (5) y viceversa. Esto se concluye directamente del hecho B suponiendo que c no es cero. Después se resta la segunda ecuación de la primera y se obtiene

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \qquad \textbf{(6)}$$

En este punto debe hacerse una pausa. Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, entonces se puede dividir entre este término para obtener

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Después se puede sustituir este valor de x en el sistema (1) para despejar y, y así se habrá encontrado la solución única del sistema.

Se ha demostrado lo siguiente:

Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, entonces el sistema (1) tiene una solución única.

¿De qué manera se relaciona esta afirmación con lo que se analizó antes? En el sistema (1) se ve que la pendiente de la primera recta es $-a_{11}/a_{12}$ y que la pendiente de la segunda es $-a_{21}/a_{22}$. En los problemas 31, 32 y 33 se pide al lector que demuestre que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ si y sólo si las rectas son paralelas (tienen la misma pendiente). Así, si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, las rectas no son paralelas y el sistema tiene una solución única.

Los hechos que se acaban de analizar se organizarán en un teorema. En secciones posteriores de este capítulo y los que siguen se harán generalizaciones de este teorema. Conforme se avance en el tema se hará referencia a este teorema como el "teorema de resumen". Cuando se hayan demostrado todas sus partes, se estudiará una relación asombrosa entre varios conceptos importantes del álgebra lineal.

TEOREMA 1 **Teorema de resumen — punto de vista 1** El sistema

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

de dos ecuaciones con dos incógnitas x y y no tiene solución, tiene una solución única o tiene un número infinito de soluciones. Esto es:

i. Tiene una solución única si y sólo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

ii. No tiene solución o tiene un número infinito de soluciones si y sólo si

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

✦

En la sección 1.3 se estudian sistemas de m ecuaciones con n incógnitas y se verá que siempre ocurre que no tienen solución, o que tienen una o un número infinito de soluciones.

PROBLEMAS 1.2

Autoevaluación

I. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas *no* es cierta?

a. Es un par ordenado que satisface ambas ecuaciones.
b. Su gráfica consiste en el (los) punto(s) de intersección de las gráficas de las ecuaciones.
c. Su gráfica es la abscisa de las gráficas de las ecuaciones.
d. Si el sistema es inconsistente, no existe una solución.

II. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para un sistema inconsistente de dos ecuaciones lineales?

a. No existe una solución.
b. La gráfica del sistema está sobre el eje y.
c. La gráfica de la solución es una recta.
d. La gráfica de la solución es el punto de intersección de dos líneas.

III. ¿Cuál de las afirmaciones es cierta para el siguiente sistema de ecuaciones?

$$3x - 2y = 8$$
$$4x + y = 7$$

a. El sistema es inconsistente.
b. La solución es $(-1, 2)$.
c. La solución se encuentra sobre la recta $x = 2$.
d. Las ecuaciones son equivalentes.

IV. ¿Cuál de las siguientes es una segunda ecuación para el sistema cuya primera ecuación es $x - 2y = -5$ si debe tener un número infinito de soluciones?

a. $6y = 3x + 15$ **b.** $6x - 3y = -15$
c. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ **d.** $\frac{3}{2}x = 3y + \frac{15}{2}$

V. ¿Cuál de las gráficas de los siguientes sistemas es un par de rectas paralelas?

a. $3x - 2y = 7$
$4y = 6x - 14$

b. $x - 2y = 7$
$3x = 4 + 6y$

c. $2x + 3y = 7$
$3x - 2y = 6$

d. $5x + y = 1$
$7y = 3x$

En los problemas 1 al 12 encuentre las soluciones (si las hay) de los sistemas dados. En cada caso calcule el valor de $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

1. $x - 3y = 4$
$-4x + 2y = 6$

2. $2x - y = -3$
$5x + 7y = 4$

3. $2x - 8y = 5$
$-3x + 12y = 8$

4. $2x - 8y = 6$
$-3x + 12y = -9$

5. $6x + y = 3$
$-4x - y = 8$

6. $3x + y = 0$
$2x - 3y = 0$

7. $4x - 6y = 0$
$-2x + 3y = 0$

8. $5x + 2y = 3$
$2x + 5y = 3$

9. $2x + 3y = 4$
$3x + 4y = 5$

10. $ax + by = c$
$ax - by = c$

11. $ax + by = c$
$bx + ay = c$

12. $ax - by = c$
$bx + ay = d$

13. Encuentre las condiciones sobre a y b tales que el sistema en el problema 10 tenga una solución única.

14. Encuentre las condiciones sobre a, b y c tales que el sistema del problema 11 tenga un número infinito de soluciones.

15. Encuentre las condiciones sobre a, b, c y d tales que el problema 12 no tenga solución.

En los problemas 16 al 21 encuentre el punto de intersección (si hay uno) de las dos rectas.

16. $x - y = 7$; $2x + 3y = 1$

17. $y - 2x = 4$; $4x - 2y = 6$

18. $4x - 6y = 7$; $6x - 9y = 12$

19. $4x - 6y = 10$; $6x - 9y = 15$

20. $3x + y = 4$; $y - 5x = 2$

21. $3x + 4y = 5$; $6x - 7y = 8$

Sea L una recta y $L_{\perp}$ la recta perpendicular a L que pasa a través de un punto dado P. La **distancia** de L a P se define como la distancia† entre P y el punto de intersección de L y $L_{\perp}$. En los problemas 22 al 27 encuentre la distancia entre la recta dada y el punto.

22. $x - y = 6$; $(0, 0)$

23. $2x + 3y = -1$; $(0, 0)$

24. $3x + y = 7$; $(1, 2)$

25. $5x - 6y = 3$; $(2,$ [illegible]$)$

26. $2y - 5x = -2$; $(5, -3)$

27. $6y + 3x = 3$; $(8, -1)$

28. Encuentre la distancia entre la recta $2x - y = 6$ y el punto de intersección de las rectas $2x - 3y = 1$ y $3x + 6y = 12$.

Respuestas a la autoevaluación

I. c **II.** a **III.** c **IV.** a **V.** b

† Recuerde que si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos en el plano xy, entonces la distancia d entre ellos está dada por $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (}$ [illegible]

***29.** Pruebe que la distancia entre el punto (x_1, y_1) y la recta $ax + by = c$ está dada por

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

30. En un zoológico hay aves (de dos patas) y bestias (de cuatro patas). Si el zoológico contiene 60 cabezas y 200 patas, ¿cuántas aves y cuántas bestias viven en él?

31. Suponga que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. Demuestre que las rectas dadas en el sistema de ecuaciones (1) son paralelas. Suponga que $a_{11} \neq 0$ o $a_{12} \neq 0$ y $a_{21} \neq 0$ o $a_{22} \neq 0$.

32. Si existe una solución única al sistema (1), muestre que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

33. Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, demuestre que el sistema (1) tiene una solución única.

34. La compañía Sunrise Porcelain fabrica tazas y platos de cerámica. Para cada taza o plato un trabajador mide una cantidad fija de material y la pone en la máquina que los forma, de donde pasa al vidriado y secado automático. En promedio, un trabajador necesita 3 minutos para iniciar el proceso de una taza y 2 minutos para el de un plato. El material para una taza cuesta 25¢ y el material para un plato cuesta 20¢. Si se asignan $44 diarios para la producción de tazas y platos, ¿cuántos deben fabricarse de cada uno en un día de trabajo de 8 horas, si un trabajador se encuentra trabajando cada minuto y se gastan exactamente $44 en materiales?

35. Conteste la pregunta del problema 34 si los materiales para una taza y un plato cuestan 15¢ y 10¢, respectivamente, y se gastan $24 en 8 horas de trabajo.

36. Conteste la pregunta del problema 35 si se gastan $25 en 8 horas de trabajo.

37. Una tienda de helados vende sólo helados con soda y malteadas. Se pone 1 onza de jarabe y 4 onzas de helado en un helado con soda, y 1 onza de jarabe y 3 onzas de helado en una malteada. Si la tienda usa 4 galones de helado y 5 cuartos de jarabe en un día, ¿cuántos helados con soda y cuántas malteadas vende? [*Sugerencia:* 1 cuarto = 32 onzas; 1 galón = 128 onzas.]

1.3 m ECUACIONES CON n INCÓGNITAS: ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN Y GAUSSIANA

En esta sección se describe un método para encontrar todas las soluciones (si existen) de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Al hacerlo se verá que, lo mismo que en el caso de 2×2, tales sistemas no tienen solución, tienen una solución o tienen un número infinito de soluciones. Antes de llegar al método general, se verán algunos ejemplos sencillos. Como variables, se usarán x_1, x_2, x_3, etcétera, en lugar de x, y, z, . . . porque la generalización es más sencilla al usar la notación con subíndices.

EJEMPLO 1 **Solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: solución única**

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{1}$$

Solución En este caso se buscan tres números x_1, x_2 y x_3 tales que las tres ecuaciones en (1) se satisfacen. El método de solución que se estudiará será el de simplificar las ecuaciones como se hizo en la sección 1.2 de manera que las soluciones se puedan identificar de inmediato. Se comienza por dividir la primera ecuación entre 2. Esto da

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{2}$$

Como se vio en la sección 1.2, al sumar dos ecuaciones se obtiene una tercera ecuación correcta. Esta ecuación puede sustituir a cualquiera de las dos ecuaciones del sistema usadas para obtenerla. Primero se simplifica el sistema (2) multiplicando ambos lados de la primera ecuación de (2) por -4 y sumando esta nueva ecuación a la segunda. Esto da

$$\begin{array}{r} -4x_1 - 8x_2 - 12x_3 = -36 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ \hline -3x_2 - 6x_3 = -12 \end{array}$$

La ecuación $-3x_2 - 6x_3 = -12$ es la nueva segunda ecuación y el sistema ahora es

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -3x_2 - 6x_3 &= -12 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Nota. Se ha *sustituido* la ecuación $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$ por la ecuación $-3x_2 - 6x_3 = -12$. En este ejemplo y otros posteriores se sustituirán ecuaciones con otras más sencillas hasta obtener un sistema cuya solución se pueda identificar de inmediato.

Entonces, la primera ecuación se multiplica por -3 y se suma a la tercera:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -3x_2 - 6x_3 &= -12 \\ -5x_2 - 11x_3 &= -23 \end{aligned} \tag{3}$$

Observe que en el sistema (3) se ha eliminado la variable x_1 de la segunda y tercera ecuaciones. Después se divide la segunda ecuación por -3:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -5x_2 - 11x_3 &= -23 \end{aligned}$$

Se multiplica la segunda ecuación por -2 y se suma a la primera; después se multiplica la segunda ecuación por 5 y se suma a la tercera:

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Se multiplica la tercera ecuación por −1:

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Por último, se suma la tercera ecuación a la primera y después se multiplica la tercera ecuación por −2 y se suma a la segunda para obtener el siguiente sistema [que es equivalente al sistema (1)]:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 4 \\ x_2 \quad &= -2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Ésta es la solución única para el sistema. Se escribe en la forma (4, −2, 3). El método que se usó se conoce como **eliminación de Gauss-Jordan**.† ◆

Eliminación de Gauss-Jordan

Antes de seguir con otro ejemplo, se resumirá lo que se hizo en éste:

i. Se dividió la primera ecuación para hacer el coeficiente de x_1 en ella, igual a 1.

ii. Se "eliminaron" los términos en x_1 de la segunda y tercera ecuaciones. Esto es, los coeficientes de estos términos se hicieron cero multiplicando la primera ecuación por los números adecuados y sumándola a la segunda y tercera ecuaciones, respectivamente.

iii. Se dividió la segunda ecuación para hacer el coeficiente de x_2 igual a 1 y después se usó la segunda ecuación para eliminar los términos en x_2 de la primera y tercera ecuaciones.

iv. Se dividió la tercera ecuación para hacer el coeficiente de x_3 igual a 1 y después se usó esta tercera ecuación para eliminar los términos en x_3 de la primera y segunda ecuaciones.

Se resalta el hecho de que, en cada paso, se obtuvieron sistemas que eran equivalentes. Es decir, cada sistema tenía el mismo conjunto de soluciones que el precedente. Esto es una consecuencia de los hechos A y B de la página 2.

Matriz

Antes de resolver otros sistemas de ecuaciones, se introduce una notación que simplifica la escritura de cada paso del procedimiento. Una **matriz** es un arreglo rectangular de números. Las matrices se estudiarán con gran detalle al inicio de la sección 1.5. Por ejemplo, los coeficientes de las variables x_1, x_2, x_3 en el sistema (1) se

† Recibe este nombre en honor del gran matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855) y del ingeniero alemán Wilhelm Jordan (1844-1899). Vea la semblanza bibliográfica de Gauss en la página 23. Jordan fue un experto en investigación geodésica tomando en cuenta la curvatura de la tierra. Su trabajo sobre la solución de sistemas de ecuaciones apareció en 1888 en su libro *Handbuch der Vermessungskunde* (Manual de geodesia).

Matriz de coeficientes

pueden escribir como los elementos de una matriz A, llamada **matriz de coeficientes** del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Matriz $m \times n$

Una matriz con m renglones y n columnas se llama una **matriz de $m \times n$**. El símbolo $m \times n$ se lee "m por n". El estudio de matrices constituye gran parte de los capítulos restantes de este libro. Se introducen aquí por la conveniencia de su notación.

Matriz aumentada

Al usar la notación matricial, el sistema (1) se puede escribir como la **matriz aumentada**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \tag{5}$$

Ahora se introducirá alguna terminología. Se ha visto que multiplicar (o dividir) los dos lados de una ecuación por un número diferente de cero da una nueva ecuación correcta. Más aún, si se suma un múltiplo de una ecuación a otra del sistema se obtiene otra ecuación correcta. Por último, si se intercambian dos ecuaciones en un sistema de ecuaciones se obtiene un sistema equivalente. Estas tres operaciones, cuando se aplican a los renglones de la matriz aumentada que representa un sistema de ecuaciones, se llaman **operaciones elementales con renglones**.

Para resumir, las tres operaciones elementales con renglones aplicadas a la matriz aumentada que representa un sistema de ecuaciones son:

Operaciones elementales con renglones

i. Multiplicar (o dividir) un renglón por un número diferente de cero.

ii. Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.

iii. Intercambiar dos renglones.

Reducción por renglones

El proceso de aplicar las operaciones elementales con renglones para simplificar una matriz aumentada se llama **reducción por renglones**.

Notación

1. $R_i \to cR_i$ quiere decir "remplaza el i-ésimo renglón por ese mismo renglón multiplicado por c". [Para multiplicar el i-ésimo renglón por c, se multiplica cada número en el i-ésimo renglón por c.]
2. $R_j \to R_j + cR_i$ significa "sustituye el j-ésimo renglón por la suma del renglón j más el renglón i multiplicado por c".
3. $R_i \rightleftarrows R_j$ quiere decir "intercambiar los renglones i y j".
4. $A \to B$ indica que las matrices aumentadas A y B son equivalentes; es decir, que los sistemas que representan tienen la misma solución.

En el ejemplo 1 se vio que al usar las operaciones elementales con renglones (*i*) y (*ii*) varias veces, se puede obtener un sistema cuyas soluciones estén dadas en forma explícita. Ahora se repiten los pasos del ejemplo 1 usando la notación que se acaba de introducir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

De nuevo se puede "ver" de inmediato que la solución es $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

EJEMPLO 2 **Solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: número infinito de soluciones** Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 30 \end{aligned}$$

Solución Para resolver este sistema se procede como en el ejemplo 1, primero se escribe el sistema como una matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right)$$

Después se obtiene, sucesivamente,

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esto es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Hasta aquí se puede llegar. Se tienen sólo dos ecuaciones para las tres incógnitas x_1, x_2, x_3 y existe un número infinito de soluciones. Para ver esto se elige un valor de x_3. Entonces $x_2 = 4 - 2x_3$ y $x_1 = 1 + x_3$. Ésta será una solución para cualquier número x_3. Se escribe esta solución en la forma $(1 + x_3, 4 - 2x_3, x_3)$. Por ejemplo, si $x_3 = 0$, se obtiene la solución $(1, 4, 0)$. Para $x_3 = 10$ se obtiene la solución $(11, -16, 10)$. ✦

EJEMPLO 3 **Un sistema inconsistente** Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 6x_2 + 7x_3 &= 15 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned} \tag{6}$$

Solución La matriz aumentada para este sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

El elemento 1,1 de la matriz no se puede hacer 1 como antes porque al multiplicar 0 por cualquier número real se obtiene 0. En su lugar, se puede usar la operación elemental con renglones (*iii*) para obtener un número diferente de cero en la posición 1,1. Se puede intercambiar el renglón 1 con cualquiera de los otros dos; sin embargo, al intercambiar los renglones 1 y 3 queda un 1 en esa posición. Al hacerlo se obtiene lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \rightleftarrows R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Debe hacerse una pausa aquí; las últimas dos ecuaciones son

$$\begin{aligned} -2x_2 - 3x_3 &= -5 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

lo que es imposible (si $-2x_2 - 3x_3 = -5$, entonces $2x_2 + 3x_3 = 5$, no 4). Así no hay una solución. Se puede proceder como en los últimos dos ejemplos para obtener una forma más estándar:

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_2]{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Ahora la última ecuación es $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$, lo que es imposible ya que $0 \neq -1$. Así el sistema (6) *no* tiene solución. En este caso se dice que el sistema es *inconsistente*. ✦

DEFINICIÓN 1 **Sistemas inconsistentes y consistentes** Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **inconsistente** si no tiene solución. Se dice que un sistema que tiene al menos una solución es **consistente**.

Se analizarán de nuevo estos tres ejemplos. En el ejemplo 1 se comenzó con la matriz de coeficientes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

En el proceso de reducción por renglones, A_1 se "redujo" a la matriz

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo 2 se comenzó con

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

y se terminó con

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo 3 se comenzó con

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

y se terminó con

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices R_1, R_2 y R_3 se llaman *formas escalonadas reducidas por renglones* de las matrices A_1, A_2 y A_3, respectivamente. En general, se tiene la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2 **Forma escalonada reducida por renglones y pivote** Una matriz se encuentra en la **forma escalonada reducida por renglones** si se cumplen las siguientes condiciones:

i. Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz.

ii. El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no todos son cero es 1.

iii. Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en el renglón de abajo está más hacia la derecha que el primer 1 en el renglón de arriba.

iv. Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón (si lo hay) se llama **pivote** para ese renglón.

Nota. La condición (*iii*) se puede restablecer como "el pivote en cualquier renglón está a la derecha del pivote del renglón anterior ".

EJEMPLO 4 **Cinco matrices en la forma escalonada reducida por renglones** Las siguientes matrices están en la forma escalonada reducida por renglones:

i. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **ii.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **iii.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

iv. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **v.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Las matrices en *i* y *ii* tienen tres pivotes; las otras tres matrices tienen dos pivotes. ✦

DEFINICIÓN 3 **Forma escalonada por renglones** Una matriz está en la **forma escalonada por renglones** si se cumplen las condiciones (*i*), (*ii*) y (*iii*) de la definición 2.

EJEMPLO 5 **Cinco matrices en la forma escalonada por renglones** Las siguientes matrices se encuentran en la forma escalonada por renglones:

i. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **ii.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **iv.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **v.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✦

Nota. Por lo general, la forma escalonada por renglones de una matriz no es única. Es decir, una matriz puede ser equivalente, en sus renglones, a más de una matriz en forma escalonada por renglones. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

muestra que las dos matrices anteriores, ambas en forma escalonada por renglones, son equivalentes por renglones. Así, cualquier matriz para la que A es una forma escalonada por renglones, también tiene a B como forma escalonada por renglones.

Observación 1. La diferencia entre estas dos formas debe ser evidente a partir de los ejemplos. En la forma escalonada por renglones, todos los números abajo del primer 1 en un renglón son cero. En la forma escalonada reducida por renglones, todos los números abajo y arriba del primer 1 de un renglón son cero. Así, la forma escalonada reducida por renglones es más exclusiva. Esto es, en toda matriz en forma escalonada reducida por renglones se encuentra también la forma escalonada por renglones, pero el inverso no es cierto.

Observación 2. Siempre se puede reducir una matriz a la forma escalonada reducida por renglones o a la forma escalonada por renglones realizando operaciones elementales con renglones. Esta reducción se vio al obtener la forma escalonada reducida por renglones en los ejemplos 1, 2 y 3.

Como se vio en los ejemplos 1, 2 y 3, existe una fuerte relación entre la forma escalonada reducida por renglones y la existencia de la solución única para el sistema. En el ejemplo 1 dicha forma para la matriz de coeficientes (es decir, en las primeras tres columnas de la matriz aumentada) tenían un 1 en cada renglón y existía una solución única. En los ejemplos 2 y 3 la forma escalonada reducida por renglones de la matriz de coeficientes tenía un renglón de ceros y el sistema no tenía solución o tenía un número infinito de soluciones. Esto siempre es cierto en cualquier sistema de ecuaciones con el mismo número de ecuaciones e incógnitas. Pero antes de estudiar el caso general, se analizará la utilidad de la forma escalonada por renglones de una matriz. Es posible resolver el sistema en el ejemplo 1 reduciendo la matriz de coeficientes a esta forma.

EJEMPLO 6 **Solución de un sistema mediante eliminación gaussiana** Resuelva el sistema del ejemplo 1 reduciendo la matriz de coeficientes a la forma escalonada por renglones.

Solución Se comienza como antes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

Hasta aquí, este proceso es idéntico al anterior; pero ahora sólo se hace cero el número (−5) que está abajo del primer 1 en el segundo renglón:

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Sustitución hacia atrás

Eliminación gaussiana

La matriz aumentada del sistema (y los coeficientes de la matriz) se encuentran ahora en la forma escalonada por renglones y se puede ver de inmediato que $x_3 = 3$. Después se usa la **sustitución hacia atrás** para despejar primero x_2 y después x_1. La segunda ecuación queda $x_2 + 2x_3 = 4$. Entonces, $x_2 + 2(3) = 4$ y $x_2 = -2$. De igual manera, de la primera ecuación se obtiene $x_1 + 2(-2) + 3(3) = 9$ o $x_1 = 4$. Así, de nuevo se obtiene la solución (4, −2, 3). El método de solución que se acaba de emplear se llama **eliminación gaussiana**. ✦

Se cuenta con dos métodos para resolver los ejemplos de sistemas de ecuaciones:

i. Eliminación de Gauss-Jordan
Se reduce por renglón la matriz de coeficientes a la forma escalonada reducida por renglones usando el procedimiento descrito en la página 9.

ii. Eliminación gaussiana
Se reduce por renglón la matriz de coeficientes a la forma escalonada por renglones, se despeja el valor de la última incógnita y después se usa la sustitución hacia atrás para las demás incógnitas.

¿Cuál método es más útil? Depende. Al resolver sistemas de ecuaciones en una computadora se prefiere el método de eliminación gaussiana porque significa menos operaciones elementales con renglones. De hecho, como se verá en el apéndice 3, para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas usando la eliminación de Gauss-Jordan se requieren aproximadamente $n^3/2$ sumas y multiplicaciones, mientras que la eliminación gaussiana requiere sólo $n^3/3$ sumas y multiplicaciones. La solución numérica de los sistemas de ecuaciones se estudiará en el apéndice 4. Por otro lado, a veces es esencial obtener la forma escalonada reducida por renglones de una matriz (una de éstas se estudia en la sección 1.8). En estos casos la eliminación de Gauss-Jordan es el método preferido.

Ahora se observa la solución de un sistema general de m ecuaciones con n incógnitas. La mayor parte de las soluciones de los sistemas se hará mediante la eliminación de Gauss-Jordan debido a que en la sección 1.8 esto se necesitará. Debe tenerse en mente, sin embargo, que la eliminación gaussiana suele ser un enfoque más conveniente.

El sistema general $m \times n$ de m ecuaciones con n incógnitas está dado por

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad (7)$$

En el sistema (7) todos los coeficientes a y b son números reales dados. El problema es encontrar todos los conjuntos de n números, denotados por $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, que satisfacen cada una de las m ecuaciones en (7). El número a_{ij} es el coeficiente de la variable x_j en la i-ésima ecuación.

Se puede resolver un sistema de m ecuaciones con n incógnitas usando eliminación de Gauss-Jordan o gaussiana. Enseguida se proporciona un ejemplo en el que el número de ecuaciones e incógnitas es diferente.

EJEMPLO 7 **Solución de un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas** Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Solución Este sistema se escribe como una matriz aumentada y se reduce por renglones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 19 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Hasta aquí se puede llegar. La matriz de coeficientes está en forma escalonada reducida por renglones. Es evidente que existe un número infinito de soluciones. Los valores de las variables x_3 y x_4 se pueden escoger de manera arbitraria. Entonces $x_2 = 2 + 8x_3 + 2x_4$ y $x_1 = -2 - 19x_3 - 7x_4$. Por lo tanto, todas las soluciones se representan por $(-2 - 19x_3 - 7x_4, 2 + 8x_3 + 2x_4, x_3, x_4)$. Por ejemplo, si $x_3 = 1$ y $x_4 = 2$, se obtiene la solución $(-35, 14, 1, 2)$. ◆

Como se podrá observar si se resuelven muchos sistemas, los cálculos se pueden volver fastidiosos. Un buen método práctico es usar una calculadora o computadora siempre que las fracciones se compliquen. Debe hacerse notar, sin embargo, que si los cálculos se llevan a cabo en una computadora o calculadora, pueden introducirse errores de "redondeo". Este problema se analiza en el apéndice 3.

EJEMPLO 8 **Un problema de administración de recursos** Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 2 unidades del alimento 3. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento 1, 4 del 2 y 5 del 3. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es 2 unidades del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 5 unidades del 3. Cada semana se proporcionan al lago 25 000 unidades del alimento 1, 20 000 unidades del alimento 2 y 55 000 del 3. Si se supone que los peces se comen todo el alimento, ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

Solución Sean x_1, x_2 y x_3 el número de peces de cada especie que hay en el ambiente del lago. Utilizando la información del problema, se observa que x_1 peces de la especie 1 consumen x_1 unidades del alimento 1, x_2 peces de la especie 2 consumen $3x_2$ unidades del alimento 1 y x_3 peces de la especie 3 consumen $2x_3$ unidades del alimento 1. Entonces $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25\,000$ = suministro total por semana de alimento 1. Si se obtiene una ecuación similar para los otros dos alimentos se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25\,000 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 20\,000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 55\,000 \end{aligned}$$

Después de resolver se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25\,000 \\ 1 & 4 & 1 & 20\,000 \\ 2 & 5 & 5 & 55\,000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \\ 0 & -1 & 1 & 5\,000 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 40\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces, si x_3 se elige arbitrariamente, se tiene un número infinito de soluciones dadas por $(40\,000 - 5x_3, x_3 - 5000, x_3)$. Por supuesto, se debe tener $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$. Como $x_2 = x_3 - 5000 \geq 0$, se tiene $x_3 \geq 5000$. Esto significa que $0 \leq x_1 \leq 40\,000 - 5(5000) = 15\,000$. Por último, como $40\,000 - 5x_3 \geq 0$, se tiene que $x_3 \leq 8000$. Esto significa que las poblaciones que pueden convivir en el lago con todo el alimento consumido son

$$\begin{aligned} x_1 &= 40\,000 - 5x_3 \\ x_2 &= x_3 - 5\,000 \\ 5\,000 \leq\ & x_3 \leq 8\,000 \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $x_3 = 6\,000$, entonces $x_1 = 10\,000$ y $x_2 = 1\,000$.

Nota. El sistema de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones. Sin embargo, el problema de administración de recursos tiene sólo un número finito de soluciones porque x_1, x_2 y x_3 deben ser enteros positivos y existen nada más 3001 enteros en el intervalo [5000, 8000]. (Por ejemplo, no puede haber 5237.578 peces.) ◆

Análisis de insumo y producto (opcional)

Los siguientes dos ejemplos muestran la manera en que pueden surgir los sistemas de ecuaciones en el modelado económico.

EJEMPLO 9 **El modelo de insumo-producto de Leontief** Un modelo que se usa con frecuencia en economía es el **modelo de insumo-producto de Leontief.**† Suponga un sistema económico que tiene n industrias. Existen dos tipos de demandas en cada industria: primero, una demanda *externa* desde afuera del sistema. Por ejemplo, si el sistema es un país, la demanda externa puede provenir de otro país. Segundo, la demanda que hace una industria a otra industria en el mismo sistema. Por ejemplo, en Estados Unidos la industria automotriz demanda parte de la producción de la industria del acero.

Suponga que e_i representa la demanda externa ejercida sobre la i-ésima industria. Suponga que a_{ij} representa la demanda interna que la j-ésima industria ejerce sobre la i-ésima industria. De manera más concreta, a_{ij} representa el número de unidades de producción de la industria i que se necesitan para producir una unidad de la industria j. Sea x_i la producción de la industria i. Ahora suponga que la producción de cada industria es igual a su demanda (es decir, no hay sobreproducción). La demanda total es igual a la suma de las demandas internas y externas. Por ejemplo, para calcular la demanda interna de la industria 2 se observa que la industria 1 necesita a_{21} unidades de producción de la industria 2 para producir una unidad de su propia producción. Si la producción de la industria 1 es x_1, entonces $a_{21}x_1$ es la cantidad total que necesita la industria 1 de la industria 2. Así, la demanda interna total sobre la industria 2 es $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$.

Al igualar la demanda total a la producción de cada industria se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 &= x_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 &= x_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \quad &\;\; \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + e_n &= x_n
\end{aligned} \tag{8}
$$

O bien, reescribiendo el sistema (8) en la forma del sistema (7) se obtiene

$$
\begin{aligned}
(1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n &= e_1 \\
-a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n &= e_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad &\;\; \vdots \\
-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (1 - a_{nn})x_n &= e_n
\end{aligned} \tag{9}
$$

El sistema (9) de n ecuaciones con n incógnitas es muy importante en el análisis económico. ◆

---

† Así llamado en honor del economista americano Wassily W. Leontief, quien utilizó este modelo en su trabajo pionero "Qualitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States" en *Review of Economic Statistics* 18(1936):105-125. En su libro *Input-Output Analysis* (Nueva York: Oxford University Press, 1966) publicó una versión más moderna. Leontief ganó el Premio Nobel en economía en 1973 por su desarrollo del análisis de insumo-producto.

EJEMPLO 10 **El modelo de Leontief aplicado a un sistema económico con tres industrias** Suponga que las demandas externas en un sistema económico con tres industrias son 10, 25 y 20, respectivamente. Suponga que $a_{11} = 0.2$, $a_{12} = 0.5$, $a_{13} = 0.15$, $a_{21} = 0.4$, $a_{22} = 0.1$, $a_{23} = 0.3$, $a_{31} = 0.25$, $a_{32} = 0.5$ y $a_{33} = 0.15$. Encuentre la producción de cada industria de manera que la oferta sea exactamente igual a la demanda.

Solución En este caso $n = 3$, $1 - a_{11} = 0.8$, $1 - a_{22} = 0.9$ y $1 - a_{33} = 0.85$ y el sistema (9) es

$$\begin{aligned} 0.8x_1 - 0.5x_2 - 0.15x_3 &= 10 \\ -0.4x_1 + 0.9x_2 - 0.3x_3 &= 25 \\ -0.25x_1 - 0.5x_2 + 0.85x_3 &= 20 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema por el método de eliminación de Gauss-Jordan en una calculadora, trabajando con cinco decimales en todos los pasos se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 110.30442 \\ 0 & 1 & 0 & 118.74070 \\ 0 & 0 & 1 & 125.81787 \end{array}\right)$$

Se concluye que la producción necesaria para que la oferta sea (aproximadamente) igual a la demanda es $x_1 = 110$, $x_2 = 119$ y $x_3 = 126$. ✦

La geometría de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (opcional)

En la figura 1.1, en la página 3, se vio que un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se puede representar por dos líneas rectas. Si las rectas tienen un solo punto de intersección entonces el sistema tiene una solución única; si coinciden, existe un número infinito de soluciones; si son paralelas, no existe una solución y el sistema es inconsistente.

Algo similar pasa cuando se tienen tres ecuaciones con tres incógnitas.

Como se verá en la sección 3.5, la gráfica de la ecuación $ax + by + cz = d$ en el espacio de tres dimensiones es un plano.

Considere el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ ex + fy + gz &= h \\ jx + ky + lz &= m \end{aligned} \qquad \textbf{(10)}$$

en donde $a, b, c, d, e, f, g, h, j, k, l$ y m son constantes y al menos una de ellas en cada ecuación es diferente de cero.

Cada ecuación en (10) es la ecuación de un plano. *Cada* solución (x, y, z) al sistema de ecuaciones debe ser un punto en *cada uno* de los tres planos. Existen seis posibilidades:

1. Los tres planos se intersectan en un solo punto. Entonces existe una solución única para el sistema (vea la figura 1.2).

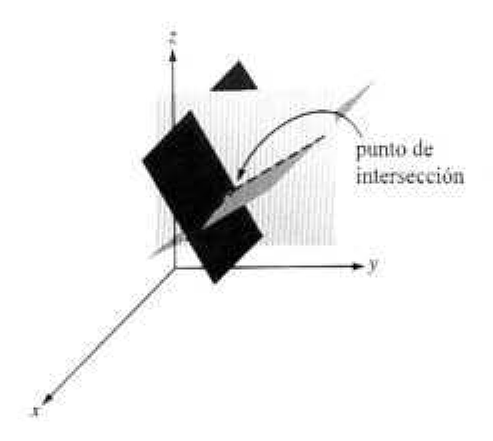


Figura 1.2 Los tres planos se intersectan en un solo punto

2. Los tres planos se intersectan en la misma recta. Entonces cada punto sobre la recta es una solución y el sistema tiene un número infinito de soluciones (vea la figura 1.3).
3. Los tres planos coinciden. Entonces cada punto sobre el plano es una solución y se tiene un número infinito de soluciones.
4. Dos de los planos coinciden e intersectan a un tercer plano en una recta. Entonces cada punto sobre la recta es una solución y existe un número infinito de soluciones (vea la figura 1.4).

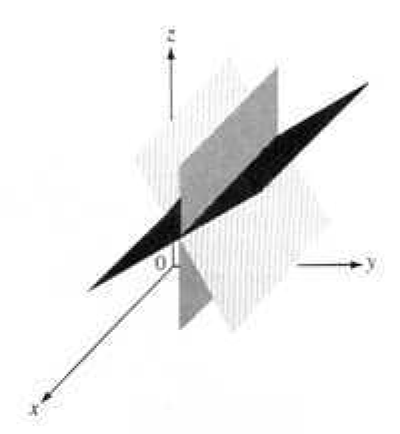


Figura 1.3 Los tres planos se intersectan en la misma recta

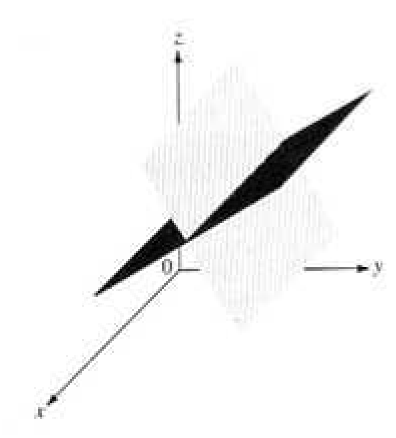


Figura 1.4 Dos planos se intersectan en una recta

5. Al menos dos de los planos son paralelos y distintos. Entonces ningún punto puede estar en ambos y no hay solución. El sistema es inconsistente (vea la figura 1.5).

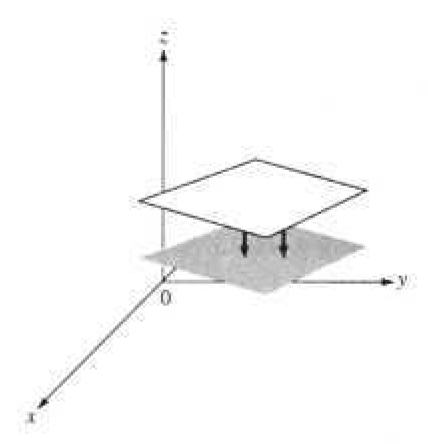


Figura 1.5 Los planos paralelos no tienen puntos en común

6. Dos de los planos coinciden en una recta L. El tercer plano es paralelo a L (y no contiene a L), de manera que ningún punto del tercer plano se encuentra en los dos primeros. No existe una solución, y el sistema es inconsistente (vea la figura 1.6).

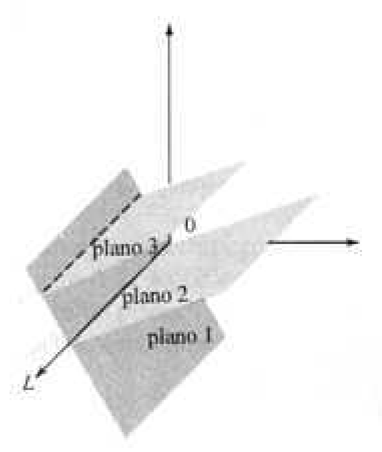


Figura 1.6 El plano 3 es paralelo a L, la recta de intersección de los planos 1 y 2

Se observa que en todos los casos el sistema tiene una solución única, tiene un número infinito de soluciones o es inconsistente. Debido a que es tan difícil dibujar planos con exactitud, no se dirá más sobre ellos aquí. No obstante, es útil ver cómo las ideas en el plano xy se puede extender a espacios más complicados.

Semblanza de . . .

Carl Friedrich Gauss, 1777 – 1855

Carl Friedrich Gauss (*Library of Congress*)

El más grande matemático del siglo XIX, Carl Friedrich Gauss se considera uno de los tres matemáticos más importantes de todos los tiempos —siendo Arquímides y Newton los otros dos.

Gauss nació en Brunswick, Alemania, en 1777. Su padre, un obrero amante del trabajo, era excepcionalmente obstinado y no creía en la educación formal, hizo todo lo que pudo para evitar que Gauss fuera a una buena escuela. Por fortuna para Carl (y para las matemáticas), su madre, a pesar de que tampoco contaba con educación, apoyó a su hijo en sus estudios y se mostró siempre orgullosa de sus logros hasta el día de su muerte a los 97 años.

Gauss era un niño prodigio. A los 3 años encontró un error en la libreta de cuentas de su padre. Una anécdota famosa habla de Carl, de 10 años de edad, como estudiante de la escuela local de Brunswick. El profesor solía asignar tareas para mantener ocupados a los alumnos. Un día les pidió que sumaran los números del 1 al 100. Casi al instante, Carl colocó su pizarra cara abajo con las palabras "ya está". Después, el profesor descubrió que Gauss era el único con la respuesta correcta, 5050. Gauss había observado que los números se podían arreglar en 50 pares que sumaban cada uno 101 (1 + 100, 2 + 99, etc.), y $50 \times 101 = 5050$. Años después, Gauss bromeaba diciendo que podía sumar más rápido de lo que podía hablar.

Cuando Gauss tenía 15 años, el Duque de Brunswick se fijó en él y lo convirtió en su protegido. El Duque lo ayudó a ingresar en el Brunswick College en 1795 y, tres años después, a entrar a la universidad de Göttingen. Indeciso entre las carreras de matemáticas y de filosofía, Gauss eligió la de matemáticas después de dos descubrimientos asombrosos. Primero inventó el método de mínimos cuadrados una década antes de que Legendre publicara sus resultados. Segundo, un mes antes de cumplir 19 años, resolvió un problema cuya solución se había buscado durante más de dos mil años: Gauss demostró cómo construir, con sólo regla y compás, un polígono regular cuyo número de lados no es múltiplo de 2, 3 o 5.† El 30 de marzo de 1796, el día de este descubrimiento, comenzó un diario que contenía como primera nota las reglas de construcción de un polígono regular de 17 lados. El diario, que contiene los enunciados de 146 resultados en sólo 19 páginas, es uno de los documentos más importantes en la historia de las matemáticas.

Después de un corto periodo en Göttingen, Gauss fue a la University of Helmstädt y, en 1798, a los 20 años, escribió su famosa disertación doctoral. En ella dio la primera

† De manera más general, Gauss probó que un polígono regular de n lados se puede construir con regla y compás si y sólo si n es de la forma $n = 2^k p_2 \cdot p_3 \cdots p_m$ donde $k \geq 0$ y las p_i son distintos primos de Fermat. Los primos de Fermat son los primos que toman la forma $2^{2^n} + 1$. Los primeros cinco primos de Fermat son 3, 5, 17, 257 y 65 537.

demostración matemática rigurosa del teorema fundamental del álgebra —que todo polinomio de grado *n* tiene, contando multiplicidades, exactamente *n* raíces. Muchos matemáticos, incluyendo a Euler, Newton y Lagrange, habían intentado probar este resultado.

Gauss hizo un gran número de descubrimientos en física al igual que en matemáticas. Por ejemplo, en 1801 utilizó un nuevo procedimiento para calcular, a partir de unos cuantos datos, la órbita del planetoide Ceres. En 1833 inventó el telégrafo electromagnético junto con su colega Wilhelm Weber (1804-1891). Aunque realizó trabajos brillantes en astronomía y electricidad, fue la producción matemática de Gauss la que resultó asombrosa. Hizo contribuciones fundamentales al álgebra y la geometría. En 1811 descubrió un resultado que llevó a Cauchy a desarrollar la teoría de variable compleja. En este libro se le encuentra en el método de eliminación de Gauss-Jordan. Los estudiantes de análisis numérico aprenden la cuadratura gaussiana —una técnica de integración numérica.

Gauss fue nombrado catedrático de matemáticas en Göttingen en 1807 e impartió clases hasta su muerte en 1855. Aún después de fallecer, su espíritu matemático siguió acosando a los matemáticos del siglo XIX. Con frecuencia, un importante resultado nuevo ya había sido descubierto por Gauss y se podía encontrar en sus notas inéditas.

En sus escritos matemáticos Gauss era un perfeccionista y tal vez sea el último matemático que sabía todo sobre su área. Afirmando que una catedral no lo era hasta que se quitaba el último de los andamios, ponía todo su empeño para que cada uno de sus trabajos publicados fuera completo, conciso y elegante. Usaba un sello en el que se veía un árbol con unas cuantas frutas y la leyenda *pauca sed matura* (pocas pero maduras). Gauss creía también que las matemáticas deben reflejar el mundo real. A su muerte, Gauss fue honrado con una medalla conmemorativa con la inscripción "George V, Rey de Hanover, al príncipe de los matemáticos".

PROBLEMAS 1.3

Autoevaluación

I. ¿Cuál de los siguientes sistemas tiene la matriz de coeficientes dada a la derecha?

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. $3x + 2y = -1$
$y = 5$
$2x = 1$

b. $3x + 2z = 10$
$2x + y = 0$
$-x + 5y + z = 5$

c. $3x = 2$
$2x + y = 0$
$-x + 5y = 1$

d. $3x + 2y - z = -3$
$y + 5z = 15$
$2x + z = 3$

II. ¿Cuál de las siguientes es una operación elemental con renglones?

a. Remplazar un renglón con un múltiplo diferente de cero de ese renglón.

b. Sumar una constante diferente de cero a cada elemento en un renglón.

c. Intercambiar dos columnas

d. Remplazar un renglón con una suma de renglones y una constante $\neq 0$.

III. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre la matriz dada?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Está en la forma escalonada por renglón.

b. No está en la forma escalonada por renglón porque el cuarto número en el renglón 1 no es 1.

c. No está en la forma escalonada por renglón porque el primer elemento diferente de cero en el renglón 1 es 3.

d. No está en la forma escalonada por renglón porque la última columna contiene un cero.

IV. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre el sistema dado?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 2z &= 6 \\ 3x + 3y + 3z &= 10 \end{aligned}$$

a. Tiene una solución única $x = 1, y = 1, z = 1$.

b. Es inconsistente.

c. Tiene un número infinito de soluciones.

En los problemas del 1 al 20 utilice el método de eliminación de Gauss-Jordan para encontrar todas las soluciones, si existen, para los sistemas dados.

1. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 5x_1 + 8x_3 &= -16 \\ 3x_1 + 2x_2 - 10x_3 &= -3 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 &= -3 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 5x_1 + 28x_2 - 26x_3 &= -8 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 18 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 2x_2 + 5x_3 &= 6 \\ x_1 - 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 &= -2 \end{aligned}$

Respuestas a la autoevaluación

I. d **II.** a **III.** c **IV.** b

11. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= -8 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= -9 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 7 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 21 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 \qquad - x_3 + x_4 &= 5 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \qquad &= -2 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 \qquad &= 7 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 11 \end{aligned}$

En los problemas 21 al 29 determine si la matriz dada se encuentra en la forma escalonada por renglones (pero no en la forma escalonada reducida por renglones), en la forma escalonada reducida por renglones o en ninguna de las dos.

21. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **22.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **23.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **25.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **29.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

En los problemas 30 al 35 utilice las operaciones elementales con renglones para reducir las matrices dadas a la forma escalonada por renglones y a la forma escalonada reducida por renglones.

30. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **31.** $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ **32.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & 5 & 8 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **34.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ **35.** $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

36. En el modelo de insumo-producto de Leontief del ejemplo 9 suponga que se tienen tres industrias. Más aún, suponga que $e_1 = 10$, $e_2 = 15$, $e_3 = 30$, $a_{11} = \frac{1}{3}$, $a_{12} = \frac{1}{2}$, $a_{13} = \frac{1}{6}$, $a_{21} = \frac{1}{4}$, $a_{22} = \frac{1}{4}$, $a_{23} = \frac{1}{8}$, $a_{31} = \frac{1}{12}$, $a_{32} = \frac{1}{3}$ y $a_{33} = \frac{1}{6}$. Encuentre la producción de cada industria tal que la oferta sea igual a la demanda.

37. En el ejemplo 8 suponga que cada semana se suministran al lago 15 000 unidades del primer alimento, 10 000 unidades del segundo y 35 000 del tercero. Suponiendo que todo el alimento se consume, ¿qué población de las tres especies puede coexistir en el lago? ¿Existe una solución única?

38. Un viajero que acaba de regresar de Europa gastó \$30 diarios en Inglaterra, \$20 diarios en Francia y \$20 diarios en España por concepto de hospedaje. En comida gastó \$20 diarios en Inglaterra, \$30 diarios en Francia y \$20 diarios en España. Sus gastos adicionales fueron de \$10 diarios en cada país. Los registros del viajero indican que gastó un total de \$340 en hospedaje, \$320 en comida y \$140 en gastos adicionales durante su viaje por estos tres países. Calcule el número de días que pasó el viajero en cada país o muestre que los registros deben estar incorrectos debido a que las cantidades gastadas no son compatibles una con la otra.

39. Una inversionista le afirma a su corredor de bolsa que todas sus acciones son de tres compañías, Delta Airlines, Hilton Hotels y McDonald's, y que hace 2 días su valor bajó \$350 pero que ayer aumentó \$600. El corredor recuerda que hace dos días el precio de las acciones de Delta Airlines bajó \$1 por acción y el de las de Hilton Hotels bajaron \$1.50, pero que el precio de las acciones de McDonald's subió \$0.50. También recuerda que ayer el precio de las acciones de Delta subió \$1.50 por acción, el de las de Hilton Hotels bajó otros \$0.50 por acción y las de McDonald's subieron \$1. Demuestre que el corredor no tiene suficiente información para calcular el número de acciones que posee la inversionista en cada compañía, pero que si ella dice que tiene 200 acciones de McDonald's, el corredor puede calcular el número de acciones que tiene en Delta y en Hilton.

40. Un agente secreto sabe que 60 equipos aéreos, que consisten en aviones de combate y bombarderos, están estacionados en cierto campo aéreo secreto. El agente quiere determinar cuántos de los 60 equipos son aviones de combate y cuántos son bombarderos. Existe un tipo de cohete que llevan ambos aviones; el de combate lleva 6 de ellos y el bombardero sólo 2. El agente averigua que se requieren 250 cohetes para armar a todos los aviones del campo aéreo. Aún más, escucha que se tiene el doble de aviones de combate que bombarderos en la base (es decir, el número de aviones de combate menos dos veces el número de bombarderos es igual a cero). Calcule el número de aviones de combate y bombarderos en el campo aéreo o muestre que la información del agente debe ser incorrecta ya que es inconsistente.

41. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= a \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= b \\ -5x_1 - 5x_2 + 21x_3 &= c \end{aligned}$$

Muestre que es inconsistente si $c \neq 2a - 3b$.

42. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= a \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= b \\ 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 &= c \end{aligned}$$

Encuentre las condiciones sobre a, b y c para que el sistema sea inconsistente.

***43.** Considere el sistema general de las tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Encuentre las condiciones sobre los coeficientes a_{ij} para que el sistema tenga una solución única.

MANEJO DE CALCULADORA

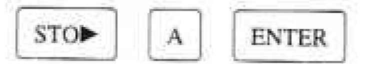
Tanto la calculadora TI-85 como la CASIO fx-7700 GB pueden resolver sistemas de n ecuaciones con n incógnitas (hasta un máximo de $n = 255$ en la TI-85 y $n = 9$ en la CASIO fx-7700 GB) cuando existe una solución única. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 3.8x_1 + 1.6x_2 + 0.9x_3 &= 3.72 \\ -0.7x_1 + 5.4x_2 + 1.6x_3 &= 3.16 \\ 1.5x_1 + 1.1x_2 - 3.2x_3 &= 43.78 \end{aligned}$$

TI-85

1. Se introduce la matriz aumentada. Hay varias maneras de hacer esto. La más sencilla es la siguiente:

   [[3.8, 1.6, .9, 3.72][−.7, 5.4, 1.6, 3.16][1.5, 1.1, −3.2, 43.78]]



   STO▶ A ENTER

   Las últimas tres teclas almacenan la matriz aumentada en A.

2. Se encuentra la forma escalonada reducida por renglones de A.

   2nd MATRX F4 (ops) F5 (rref) ALPHA A ENTER

   El resultado es

```
rref A
[[1 0 0      1.90081294721]
  0 1 0      4.19411081557]
  0 0 1    −11.3485183381]]
```

   Así, $x_1 = 1.90081294721$, etc.

Nota. La TI-85 dará respuestas correctas con 12 cifras significativas. Sin embargo, en muchas situaciones reales es inconveniente tener tantas. Se puede controlar el número de decimales oprimiendo 2nd MODE y dando el número de decimales deseados que aparecen junto al símbolo "Float". Por ejemplo, si se oprime ▼ para obtener "Float" y se mueve a la derecha hasta "3", y después se oprime ENTER, sólo se desplegarán tres lugares decimales. Siguiendo los pasos anteriores para la matriz A se obtendría

```
rref A
[[1.000  0.000  0.000    1.901]
 [0.000  1.000  0.000    4.194]
 [0.000  0.000  1.000  −11.349]
```

y así, con tres lugares decimales,

$$x_1 = 1.901, \qquad x_2 = 4.194, \qquad x_3 = -11.349$$

CASIO fx-7700 GB

La CASIO no calcula la forma escalonada reducida por renglones de una matriz, por lo que el procedimiento es un poco más elaborado.

1. Se oprime MODE 0

2. El número de ecuaciones e incógnitas se introduce como sigue:

F1 F6 F1 3 EXE 3 EXE

3. Los coeficientes de la matriz se introducen dando EXE después de cada número desplegado en la pantalla. Se dan 9 números, lo que lleva a

A	1	2	3
1	3.8	1.6	.9
2	−0.7	5.4	1.6
3	1.5	1.1	−3.2

4. Se calcula A^{-1} y se almacena en A [el símbolo A^{-1} se explicará en la sección 1.8] con F4 F1 EXE. El resultado es

A	1	2	3
1	0.2377	−0.076	0.0287
2	−1E−03	0.1687	0.0837
3	0.1107	0.0222	−0.27

5. Se introduce el número de ecuaciones para una segunda matriz B como sigue:

MODE 0 F2 F6 F1 3 EXE 1 EXE

6. Se introduce el valor del lado derecho de la misma manera que se introdujeron los números en el paso 3. Esto da

B	1
1	3.72
2	3.16
3	43.78

7. Se calcula AB (en realidad, el inverso de la matriz A original multiplicado por B) MODE 0 F5. El resultado es

C	1
1	1.9008
2	4.1941
3	−11.34

y oprimiendo EXE dos veces se puede ver la respuesta completa

$$\begin{bmatrix} 1.900812947 \\ 4.194110816 \\ -11.34851834 \end{bmatrix}$$

Así, $x = 1.900812947$, etc.

Nota. En la CASIO se obtendrá un mensaje de error si el sistema es inconsistente o si tiene un número infinito de soluciones.

En los problemas 44 al 48 utilice una calculadora para resolver cada sistema.

44.
$$\begin{aligned} 2.6x_1 - 4.3x_2 + 9.6x_3 &= 21.62 \\ -8.5x_1 + 3.6x_2 + 9.1x_3 &= 14.23 \\ 12.3x_1 - 8.4x_2 - 0.6x_3 &= 12.61 \end{aligned}$$

45.
$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 - 4x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= -4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 7x_3 - x_4 &= 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -7 \end{aligned}$$

46.
$$\begin{aligned} 1.247x_1 - 2.583x_2 + 7.161x_3 + 8.275x_4 &= -1.205 \\ 3.472x_1 + 9.283x_2 + 11.275x_3 + 3.606x_4 &= 2.374 \\ -5.216x_1 - 12.816x_2 - 6.298x_3 + 1.877x_4 &= 21.206 \\ 6.812x_1 + 5.223x_2 - 9.725x_3 - 2.306x_4 &= -11.466 \end{aligned}$$

47.
$$\begin{aligned} 23.42x_1 - 16.89x_2 + 57.31x_3 + 82.6x_4 &= 2158.36 \\ -14.77x_1 + 38.29x_2 + 92.36x_3 - 4.36x_4 &= -1123.02 \\ -77.21x_1 + 71.26x_2 - 16.55x_3 + 43.09x_4 &= 3248.71 \\ 91.82x_1 + 81.43x_2 + 33.94x_3 + 57.22x_4 &= 235.25 \end{aligned}$$

48.
$$\begin{aligned} 6.1x_1 - 2.4x_2 + 23.3x_3 - 16.4x_4 - 8.9x_5 &= 121.7 \\ -14.2x_1 - 31.6x_2 - 5.8x_3 + 9.6x_4 + 23.1x_5 &= -87.7 \\ 10.5x_1 + 46.1x_2 - 19.6x_3 - 8.8x_4 - 41.2x_5 &= 10.8 \\ 37.3x_1 - 14.2x_2 + 62.0x_3 + 14.7x_4 - 9.6x_5 &= 61.3 \\ 0.8x_1 + 17.7x_2 - 47.5x_3 - 50.2x_4 + 29.8x_5 &= -27.8 \end{aligned}$$

Más ejercicios para la TI-85

La TI-85 tiene un comando llamado (ref).
En los problemas 49 al 53 calcule la forma escalonada por renglones (ref en lugar de rref) para cada matriz aumentada.

49. La matriz del problema 45

50. La matriz del problema 44

51. La matriz del problema 47

52. La matriz del problema 46

53. La matriz del problema 48

En los problemas 54 al 58 encuentre todas las soluciones, si las hay, para cada sistema. Redondee todas las respuestas a tres lugares decimales. [*Sugerencia:* Primero obtenga la forma escalonada reducida por renglones de la matriz aumentada.]

54.
$$\begin{aligned} 2.1x_1 + 4.2x_2 - 3.5x_3 &= 12.9 \\ -5.9x_1 + 2.7x_2 + 9.8x_3 &= -1.6 \end{aligned}$$

55.
$$\begin{aligned} -13.6x_1 + 71.8x_2 + 46.3x_3 &= -19.5 \\ 41.3x_1 - 75.0x_2 - 82.9x_3 &= 46.4 \\ 41.8x_1 + 65.4x_2 - 26.9x_3 &= 34.3 \end{aligned}$$

56.
$$\begin{aligned} -13.6x_1 + 71.8x_2 + 46.3x_3 &= 19.5 \\ 41.3x_1 - 75.0x_2 - 82.9x_3 &= 46.4 \\ 41.8x_1 + 65.4x_2 - 26.9x_3 &= 35.3 \end{aligned}$$

57.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 11x_3 - 16x_4 + 12x_5 &= 105 \\ -6x_1 + 8x_2 - 14x_3 - 9x_4 + 26x_5 &= -62 \\ 7x_1 - 18x_2 - 12x_3 + 21x_4 - 2x_5 &= 53 \end{aligned}$$

58.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 11x_3 - 16x_4 + 12x_5 &= 105 \\ -6x_1 + 8x_2 - 14x_3 - 9x_4 + 26x_5 &= -62 \\ 7x_1 - 18x_2 - 12x_3 + 21x_4 - 2x_5 &= 53 \\ -15x_1 + 42x_2 + 21x_3 - 17x_4 + 42x_5 &= -63 \end{aligned}$$

59.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 11x_3 - 16x_4 + 12x_5 &= 105 \\ -6x_1 + 8x_2 - 14x_3 - 9x_4 + 26x_5 &= -62 \\ 7x_1 - 18x_2 - 12x_3 + 21x_4 - 2x_5 &= 53 \\ -15x_1 + 42x_2 + 21x_3 - 17x_4 + 42x_5 &= 63 \end{aligned}$$

INTRODUCCIÓN A MATLAB

Ejemplos de comandos básicos de MATLAB

MATLAB distingue minúsculas y mayúsculas. Esto quiere decir que **a** y **A** representan variables diferentes.

Introducción de matrices. Los elementos de un renglón se separan por espacios y las columnas se separan por ";":

A = [1 2 3;4 5 6;7 8 9] — Produce la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

```
A = [1  2  3;
     4  5  6;
     7  8  9]
```
También produce la matriz A anterior

b = [3;6;1] — Produce la matriz $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Notación para formar las submatrices y las matrices aumentadas.

f = A(2,3) — f es el elemento en el segundo renglón, tercera columna de A.
d = A(3,:) — d es el tercer renglón de A.
d = A(:,3) — d es la tercera columna de A.
C = A([2 4],:) — C es la matriz que consiste en el segundo y cuarto renglones de A.
C = [A b] — Forma una matriz aumentada $C = (A|b)$.

Ejecución de operaciones con renglones.

A(2,:) = 3*A(2,:) — $R_2 \to 3R_2$
A(2,:) = A(2,:)/4 — $R_2 \to \frac{1}{4}R_2$
A([2 3],:) = A([3 2],:) — Intercambia los renglones 2 y 3
A(3,:) = A(3,:) + 3*A(2,:) — $R_3 \to R_3 + 3R_2$

Nota. Todos estos comandos cambian a la matriz A. Si se quiere conservar la matriz original A y llamar C a la matriz cambiada,

C = A
C(2,:) = 3*C(2,:)
C = rref(A) — C = forma escalonada reducida por renglones de A

Generación de matrices aleatorias.

A = rand(2,3) — matriz 2×3 con elementos entre 0 y 1
A = 2*rand(2,3)–1 — matriz 2×3 con elementos entre -1 y 1
A = 4*(2*rand(2)–1) — matriz 2×2 con elementos entre -4 y 4
A = round(10*rand(3)) — matriz 3×3 con elementos enteros entre 0 y 10
A = 2*rand(3) –1 + i*(2*rand(3)–1) — matriz 3×3 con elementos complejos $a + bi$, a y b entre -1 y 1

Otras características usuales:

Help. Si se teclea **help** seguido de un comando MATLAB, aparecerá una descripción del comando.

Ejemplos.

help : dará una descripción de cómo se puede usar ":" en MATLAB.
help rref dará una descripción del comando rref.

Uso de las flechas. Para la versión de MS-DOS, al usar la flecha hacia arriba se desplegarán los comandos anteriores. Se pueden usar las flechas para localizar un comando y modificarlo y al oprimir la tecla "enter" se ejecuta el comando modificado.

Comentarios. Si se inicia una línea con el símbolo %, MATLAB interpretará esto como una línea de comentario.

Ejemplo.

% Éste es un comentario.

Supresión de pantalla. Uso de ;. Si se quiere realizar un comando de MATLAB y no se desea ver los resultados desplegados, se finaliza el comando con un ; (punto y coma).

Para líneas largas. Para extender una línea se usa "**. . .**".

a = [1 2 3 4 5 6 7 8 . . .
9 10] producirá $a = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10)$.

Para desplegar dígitos adicionales. Normalmente MATLAB despliega sólo 4 dígitos después del punto decimal. Así, 4/3 aparece como 1.3333. El comando **format long** causa que todos los números se desplieguen completos. De esta manera, si se da **format long** y después 4/3, aparecerá en la pantalla 1.33333333333333. Para regresar al despliegue normal de 4 dígitos después del punto decimal se da el comando **format short**.

Tutoría de MATLAB

1. Dé las siguientes matrices de dos maneras diferentes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -6 & -1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Forme C = matriz aumentada $(A|b)$ para las matrices A y **b** anteriores.
3. Forme D, una matriz aleatoria de 3×4 con elementos entre -2 y 2.
4. Forme B, una matriz aleatoria de 4×4 con elementos enteros entre -10 y 10
5. Forme K, la matriz obtenida a partir de B intercambiando los renglones 1 y 4. No cambie B. (Primero haga $K = B$. Después cambie K.)
6. Realice la operación con renglones $R_3 \to R_3 + (-1/2)R_1$ sobre la matriz C.
7. Dé el comando **B([2 4],[1 3])**. Use una línea de comentario para describir la submatriz de B que se produce.
8. Forme U, la matriz que consiste sólo en la tercera y cuarta columnas de D.

9. (*MS-DOS*). Use la flecha hacia arriba para localizar el comando que utilizó para realizar la operación con renglones en **6**. Modifique la línea para realizar la operación con renglones $R_2 \rightarrow R_2 + 3R_1$ y después ejecútela.

10. Forme T, una matriz aleatoria de 8×7 con elementos entre 0 y 1. Dé el comando **help :**. A partir de la información dada en la descripción que aparece, determine cómo se usa la notación ":" para formar, tan eficientemente como sea posible, la matriz S que consiste en los renglones 3 al 8 de la matriz T.

11. Encuentre la forma escalonada reducida por renglones de C usando el comando **rref**. Use este comando para escribir un sistema equivalente de ecuaciones.

MATLAB 1.3

1. Para cada sistema en los problemas 1, 2, 5, 8 y 16 de esta sección, dé la matriz aumentada y use el comando **rref** para encontrar la forma escalonada reducida por renglones. Muestre que cada uno de estos sistemas tiene una solución única y que la solución está contenida en la última columna de esta forma escalonada de la matriz aumentada. Use la notación ":" para asignar la variable **x** a la solución, es decir, a la última columna de esta forma escalonada reducida por renglones de la matriz aumentada.

2. Para cada sistema en los problemas 4, 7, 13 y 18 en esta sección, dé la matriz aumentada y use el comando **rref** para encontrar la forma escalonada reducida por renglones. Concluya que ninguno de estos sistemas tiene solución.

3. Las matrices siguientes son matrices aumentadas de los sistemas de ecuaciones que tienen un número infinito de soluciones.

a. Para cada una, dé la matriz y use el comando **rref** para encontrar la forma escalonada reducida por renglones.

i. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -8 & 0 \\ 8 & 3 & -18 & 0 \end{array}\right)$ **ii.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 27 & 3 & 3 & 12 \\ 9 & 27 & 10 & 1 & 19 \\ 1 & 3 & 5 & 9 & 6 \end{array}\right)$

iii. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 7 & -4 \\ 1 & 4 & 21 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -6 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **iv.** $\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 4 & 7 & 5 & 15 & 9 \\ 8 & 5 & 9 & 10 & 10 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 7 & -1 & 7 \\ 8 & 3 & 7 & 6 & 22 & 8 \\ 3 & 2 & 7/2 & 9 & -12 & -2 \end{array}\right)$

El resto de este problema necesita trabajo con papel y lápiz.

b. Para cada forma escalonada reducida por renglones, localice los pivotes dibujando un círculo a su alrededor.

c. Para cada forma escalonada reducida, escriba el sistema de ecuaciones equivalente.

d. Resuelva cada uno de estos sistemas equivalentes eligiendo las variables arbitrarias que serán las variables correspondientes a las columnas que no tienen pivote en la forma escalonada reducida por renglones. (Estas variables son las variables naturales que han de escogerse de manera arbitraria.)

4. Los siguientes sistemas representan la intersección de tres planos en el espacio de 3 dimensiones. Use el comando **rref** como herramienta para resolver los sistemas. ¿Qué se puede concluir sobre la geometría de los planos?

i. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \\ -3x_2 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

iii. Lo mismo que el (ii), cambiando el 9 por 17

iv.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

5. Utilice MATLAB para reducir las matrices aumentadas siguientes a la forma escalonada reducida por renglones paso por paso realizando las operaciones con renglones. (Vea los ejemplos de comandos para operaciones con renglones en la introducción a MATLAB en la página 32.) Verifique sus resultados usando el comando **rref.**

Nota. Si llamó A a la matriz original, haga D = A al principio y verifique **rref(D).**

i. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right)$ **ii.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$ **iii.** $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -4 & -19 \\ -3 & -6 & 12 & 2 & -12 & -8 \\ 1 & 2 & -2 & -4 & -5 & -34 \end{array}\right)$

Vea en el problema 1 de MATLAB en la sección 1.5 más opciones sobre la realización de operaciones con renglones.

6. a. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & 12 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$

Muestre que el sistema con la matriz aumentada [A **b**] no tiene solución.

b. Sea **b = 2 * A(:,1) + A(:,2) + 3 * A(:,3) – 4 * A(:,4).** Recuerde que A(:,1) es la primera columna de A. Así se están sumando múltiplos de columnas de A. Use **rref([A b])** para resolver este sistema.

c. Utilice la flecha hacia arriba para regresar a la línea de **b** = 2 * A(:,1) + etc. y edítela para obtener un nuevo conjunto de coeficientes. Una vez más, resuelva el sistema con la matriz aumentada [A **b**] para esta nueva **b**. Repita para dos nuevas elecciones de coeficientes.

d. ¿Sería posible poner coeficientes para los que no exista una solución? La pregunta es si la siguiente conjetura es cierta: un sistema [A **b**] tiene solución si **b** es una suma de múltiplos de las columnas de A. ¿Por qué?

e. Pruebe esta conjetura para A formada por:

A = 2 * rand(5) – 1
A(:,3) = 2 * A(:,1) – A(:,2)

7. Suponga que se quieren resolver varios sistemas de ecuaciones en los que las matrices de coeficientes (los coeficientes de las variables) son los mismos pero tienen lados derechos diferentes. Formando una matriz aumentada más grande se podrán resolver varios lados derechos. Suponga que A es la matriz de coeficientes y que **b** y **c** son dos lados derechos diferentes; asigne **Aug = [A b c]** y encuentre **rref(Aug).**

a. Resuelva los dos sistemas siguientes.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 9 \\ -2x_1 + 3x_3 &= -7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 16 \\ -2x_1 + 3x_3 &= 11 \end{aligned}$$

b. Resuelva los tres sistemas siguientes.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + 5x_2 - 11x_3 &= -7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -1 \\ -x_1 + 5x_2 - 11x_3 &= -6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 2 \\ -x_1 + 5x_2 - 11x_3 &= -7 \end{aligned}$$

c. Sea A la matriz de coeficientes del inciso a). Elija cualesquiera tres lados derechos de su preferencia. Resuelva.

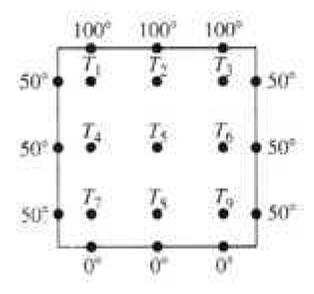
d. Se debe hacer una observación sobre las soluciones de sistemas *cuadrados*, es decir, sistemas con tantas ecuaciones como variables. Conteste las siguientes preguntas basando sus conclusiones en los incisos a) a c). (Ponga atención en particular a la forma de la parte de los coeficientes de rref.)

i. ¿Es posible que un sistema cuadrado tenga una solución única con un lado derecho y un número infinito de soluciones con otro lado derecho? ¿Por qué sí o por qué no?

ii. ¿Es posible que un sistema cuadrado tenga una solución única con un lado derecho y no tenga solución con otro?

iii. ¿Es posible que un sistema cuadrado tenga un número infinito de soluciones para un lado derecho y no tenga solución para otro? ¿Por qué sí o por qué no?

8. Distribución de calor. Se tiene una placa rectangular cuyas orillas se mantienen a cierta temperatura. Se tiene interés en encontrar la temperatura en los puntos interiores. Considere el siguiente diagrama. Se quieren encontrar aproximaciones para los puntos T_1 a T_9, o sea, la temperatura de los puntos intermedios. Suponga que la temperatura en un punto interior es el promedio de la temperatura de los cuatro puntos que lo rodean –arriba, a la derecha, abajo y a la izquierda.



a. Usando esta suposición, establezca un sistema de ecuaciones, considerando primero el punto T_1, después el punto T_2, etc. Rescriba el sistema de manera que todas las variables estén de un lado de la ecuación. Por ejemplo, para T_1 se tiene

$$T_1 = (100 + T_2 + T_4 + 50)/4$$

que se puede rescribir como $4T_1 - T_2 - T_4 = 150$.

Encuentre la matriz de coeficientes y la matriz aumentada. Describa el patrón que observe en la forma de la matriz de coeficientes. Tal matriz se llama **matriz de banda.** ¿Ve de dónde viene el nombre?

b. Resuelva el sistema usando el comando **rref**. Observe que se obtiene una solución única. Use la notación ":" para asignar la solución a la variable **x**.

c. Suponga que A es la matriz de coeficientes y **b** es el lado derecho del sistema anterior. Dé el comando **y = A\b.** (La diagonal aquí se llama **diagonal invertida**. No es la diagonal de división.) Compare **y** y **x**.

9. **Modelo de insumo-producto de Leontief**

   a. Haga referencia al ejemplo 10. Resuelva el sistema dado usando el comando **rref** y el comando "\". De nuevo observe que existe una solución única.

   b. Suponga que se tienen tres industrias independientes. La demanda externa para el producto 1 es 300 000; para el producto 2, 200 000, y para el producto 3, 200 000. Suponga que las demandas internas están dadas por

$$a_{11} = .2,\ \ a_{12} = .1,\ \ a_{13} = .3,\ \ a_{21} = .15,\ \ a_{22} = .25,\ \ a_{23} = .25,\ \ a_{31} = .1,$$
$$a_{32} = .05,\ \ a_{33} = 0$$

   i. ¿Qué le dice $a_{32} = .05$? ¿Qué le dice $a_{33} = 0$?

   ii. Establezca la matriz aumentada para que el sistema de ecuaciones encuentre x_i = producción del artículo i para i = 1, 2, 3. PRIMERO VUELVA A LEER EL EJEMPLO 10.

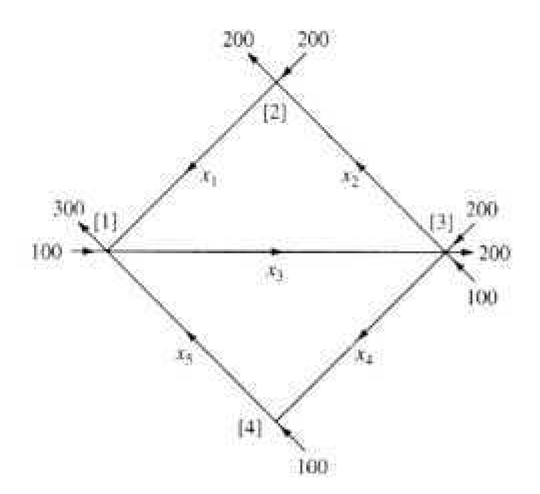
   iii. Resuelva el sistema usando MATLAB. Interprete la solución; es decir, ¿cuánto de cada artículo debe producirse para tener una oferta igual a la demanda?

   iv. Suponga que x_i se midió en $ (dólares de producción) y que está interesado en interpretar la solución en centavos. Serán necesarios más dígitos en la respuesta desplegada que los cuatro dígitos normales después del punto decimal. Suponga que ha asignado la variable **x** a la solución. Dé el comando **format long** (vea la página 33) y después el comando **x**. Esto desplegará más dígitos. (Cuando termine esta parte, dé el comando **format short** para regresar a la forma normal.)

10. **Flujo de tráfico**

   a. Considere el siguiente diagrama de una malla de calles de un sentido con vehículos que entran y salen de las intersecciones. La intersección k se denota por $[k]$. Las flechas a lo largo de las calles indican la dirección del flujo del tráfico. Sea x_i = número de vehículos/h que circulan por la calle i. Suponiendo que el tráfico que entra a una intersección también sale, establezca un sistema de ecuaciones que describa el diagrama del flujo de tráfico. Por ejemplo, en la intersección [1]

   $x_1 + x_5 + 100$ = tráfico que entra = tráfico que sale = $x_3 + 300$, lo que da $x_1 - x_3 + x_5 = 200$.



b. Resuelva el sistema usando el comando **rref.** Habrá un número infinito de soluciones. Escriba las soluciones en términos de las variables que son las naturales para elegirse de manera arbitraria.

c. Suponga que la calle de [1] a [3] necesita cerrarse; es decir, $x_3 = 0$. ¿Puede cerrarse también la calle de [1] a [4] ($x_5 = 0$) sin cambiar los sentidos del tránsito? Si no se puede cerrar, ¿cuál es la cantidad más pequeña de vehículos que debe poder admitir esta calle (de [1] a [4])?

11. Ajuste de polinomios a puntos Si se tienen dos puntos en el plano con coordenadas x distintas, existe una recta única $y = c_1x + c_2$ que pasa por ambos puntos. Si se tienen tres puntos en el plano con coordenadas x distintas, existe una parábola única

$$y = c_1x^2 + c_2x + c_3$$

que pasa por los tres puntos. Si se tienen $n + 1$ puntos en el plano con coordenadas x distintas, entonces existe un polinomio de grado n único que pasa a través de los $n + 1$ puntos:

$$y = c_1x^n + c_2x^{(n-1)} + \cdots + c_{n+1}$$

Los coeficientes $c_1, \ldots, c_{n+1}$ se pueden encontrar resolviendo un sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo.

$$P_1 = (2, 5) \qquad P_2 = (3, 10) \qquad P_3 = (4, -3)$$

Se quiere encontrar c_1, c_2 y c_3 de manera que $y = c_1x^2 + c_2x + c_3$ pase por los puntos P_1, P_2 y P_3.

$$\begin{aligned} 5 &= c_1 2^2 + c_2 2 + c_3 \\ 10 &= c_1 3^2 + c_2 3 + c_3 \\ -3 &= c_1 4^2 + c_2 4 + c_3 \end{aligned}$$

Así, se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 2^2 & 2 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \\ 4^2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema se obtiene $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ 50 \\ -59 \end{pmatrix}$, que dice que la parábola que pasa por cada uno de los puntos es $y = -9x^2 + 50x - 59$. Se dice que la parábola *se ajusta* a los puntos.

a. Para $P_1 = (1, -1)$, $P_2 = (3, 3)$ y $P_3 = (4, -2)$, establezca el sistema de ecuaciones para encontrar los coeficientes de la parábola que se ajusta a los puntos. Sea A = matriz de coeficientes y $\mathbf{b}$ = lado derecho. Resuelva el sistema. En un comentario escriba la ecuación de la parábola que se ajusta a los puntos, es decir, que pasa por los tres.

Dé **x = [1;3;4]** y **V = vander(x)**. Compare V con A.

b. Para $P_1 = (0,5)$, $P_2 = (1, -2)$, $P_3 = (3, 3)$, $P_4 = (4, -2)$, establezca el sistema de ecuaciones, dé la matriz aumentada y utilice MATLAB para resolver el sistema.

En un comentario escriba la ecuación del polinomio cúbico que se ajusta a los cuatro puntos.

Sea **x** el vector columna que contiene las coordenadas x de los puntos P_1 a P_4. Dé **x** y encuentre **V = vander(x).** Compare V con la matriz de coeficientes que encontró al establecer el sistema.

c. Usando algunas características gráficas de MATLAB se pueden visualizar los resultados con los comandos siguientes. Siga estos comandos para los puntos en a) y de nuevo para los cuatro puntos en b).

Dé **x** como el vector columna de las coordenadas x de los puntos
Dé **y** como el vector columna de las coordenadas y de los puntos
Dé los siguientes comandos:

```
V = vander(x)
c = V\y
s = min(x):.01:max(x);
yy = polyval(c,s);
plot(x,y,'*',s,yy)
```

El primer comando da la matriz de coeficientes deseada.

El segundo resuelve el sistema obteniendo los coeficientes del polinomio.

El tercero crea un vector **s** que contiene muchos elementos, cada uno entre el valor mínimo y máximo de las coordenadas x, de manera que se pueda evaluar el polinomio en muchos puntos para crear una buena gráfica.

El cuarto crea un vector **yy** que contiene las coordenadas y obtenidas evaluando el polinomio en los elementos de **s.**

El quinto produce una gráfica de los puntos originales (con un símbolo "*") y un dibujo de la gráfica del polinomio.

Debe observarse que la gráfica del polinomio pasa a través de los puntos (etiquetados con "*").

d. Genere **x = rand(7,1)** y **y = rand(7,1)** o genere un vector de coordenadas x y un vector de coordenadas y de su preferencia. Asegúrese de que cambia (o elige) las coordenadas x de manera que sean distintas. Siga los comandos del inciso c) para visualizar el ajuste polinomial.

1.4 SISTEMAS DE ECUACIONES HOMOGÉNEOS

El sistema general de $m \times n$ ecuaciones lineales [sistema (1.3.7), página 16] se llama **homogéneo** si todas las constantes $b_1, b_2, \ldots, b_m$ son cero. Es decir, el sistema general homogéneo está dado por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad & \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Los sistemas homogéneos surgen de varias maneras. Se estudiará uno de ellos en la sección 4.4. En esta sección se resolverán algunos sistemas homogéneos, de nuevo mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan.

Solución trivial
Solución cero
Soluciones no triviales

Para el sistema lineal general existen tres posibilidades: que no tenga soluciones, que tenga una solución o que tenga un número infinito de soluciones. Para el sistema general homogéneo la situación es más sencilla. Como $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ es siempre una solución (llamada **solución trivial** o **solución cero**), sólo se tienen dos posibilidades: la solución trivial es la única solución o existe un número infinito de soluciones además de la trivial. Las soluciones distintas a la solución cero se llaman **soluciones no triviales.**

EJEMPLO 1 **Un sistema homogéneo que tiene sólo la solución trivial** Resuelva el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución Ésta es la versión homogénea del sistema del ejemplo 1.3.1 en la página 7. Al reducir sucesivamente, se obtiene (después de dividir la primera ecuación entre 2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Así, el sistema tiene una solución única (0, 0, 0). Esto es, la única solución al sistema es la trivial. ✦

EJEMPLO 2 **Un sistema homogéneo con un número infinito de soluciones** Resuelva el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - 11x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución Usando la eliminación de Gauss-Jordan se obtiene, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -11 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{9}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 9R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora la matriz aumentada está en la forma escalonada reducida por renglones y, evidentemente, existe un número infinito de soluciones dadas por $(-\frac{1}{9}x_3, \frac{5}{9}x_3, x_3)$. Si, por ejemplo, $x_3 = 0$, se obtiene la solución trivial. Si $x_3 = 1$, se obtiene la solución $(-\frac{1}{9}, \frac{5}{9}, 1)$. Si $x_3 = 9\pi$, se obtiene la solución $(-\pi, 5\pi, 9\pi)$. ✦

EJEMPLO 3 **Un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene un número infinito de soluciones** Resuelva el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

Solución Reduciendo por renglones se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{6}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} & 0 \end{array}\right)$$

Así hay un número infinito de soluciones dadas por $(-\frac{5}{6}x_3, \frac{11}{6}x_3, x_3)$. Esto puede no sorprender porque el sistema (2) contiene tres incógnitas y sólo dos ecuaciones. ✦

En general, si hay más incógnitas que ecuaciones, el sistema homogéneo (1) siempre tendrá un número infinito de soluciones. Para ver esto, observe que si sólo tuviera la solución trivial, entonces la reducción por renglones conduciría al sistema

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\quad &= 0 \\ x_2 \qquad\quad &= 0 \\ \vdots \qquad \\ x_n &= 0 \end{aligned}$$

y posiblemente, algunas ecuaciones adicionales de la forma $0 = 0$. Pero este sistema tiene al menos tantas ecuaciones como incógnitas. Como la reducción por renglones no cambia ni el número de ecuaciones ni el número de incógnitas, se tiene una contradicción en la suposición de que había más incógnitas que ecuaciones. Entonces se tiene el teorema 1.

Teorema 1 El sistema homogéneo (1) tiene un número infinito de soluciones si $n > m$. ✦

PROBLEMAS 1.4

Autoevaluación

I. ¿Cuáles de los siguientes sistemas *deben* tener soluciones no triviales?

a. $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= 0 \end{aligned}$

c. $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned}$

II. ¿Para qué valores de k tendrá soluciones no triviales el siguiente sistema?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \\ 3x + 4y + kz &= 0 \end{aligned}$$

a. 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4 **e.** 5 **f.** 0

En los problemas 1al 13 encuentre todas las soluciones a los sistemas homogéneos.

1. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= 0 \\ -x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_1 - 7x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -5x_1 + 13x_2 - 10x_3 &= 0 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 0 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 0 \\ -8x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} -2x_1 \qquad\qquad + 7x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 \qquad - x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad &= 0 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 0 \\ 7x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 6x_2 &= 0 \\ 4x_1 - 12x_2 &= 0 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

Respuestas a la autoevaluación

I. c **II.** e

14. Muestre que el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

tiene un número infinito de soluciones si y sólo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

15. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + kx_3 &= 0 \end{aligned}$$

¿Para qué valor de k tendrá soluciones no triviales?

***16.** Considere el sistema homogéneo de 3×3

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Encuentre condiciones sobre los coeficientes a_{ij} tales que la solución trivial sea la única solución.

MANEJO DE CALCULADORA

Los sistemas homogéneos se pueden resolver en la TI-85 pero no en la CASIO fx-7700 GB. La razón es que la TI-85 calcula la forma escalonada reducida por renglones de una matriz mientras que la CASIO no lo hace. La CASIO puede resolver sistemas homogéneos de n ecuaciones con n incógnitas pero nada más cuando existe una solución única (es decir, la solución trivial). Los siguientes ejercicios se diseñaron para resolverse en la TI-85.

TI-85

En los problemas 17 al 20 encuentre todas las soluciones para cada sistema.

17.
$$\begin{aligned} 2.1x_1 + 4.2x_2 - 3.5x_3 &= 0 \\ -5.9x_1 + 2.7x_2 + 9.8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} -13.6x_1 + 71.8x_2 + 46.3x_3 &= 0 \\ 41.3x_1 - 75.0x_2 - 82.9x_3 &= 0 \\ 41.8x_1 + 65.4x_2 - 26.9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} 25x_1 - 16x_2 + 13x_3 + 33x_4 - 57x_5 &= 0 \\ -16x_1 + 3x_2 + x_3 + 12x_5 &= 0 \\ -8x_2 + 16x_4 - 26x_5 &= 0 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 11x_3 - 16x_4 + 12x_5 &= 0 \\ -6x_1 + 8x_2 - 14x_3 - 9x_4 + 26x_5 &= 0 \\ 7x_1 - 18x_2 - 12x_3 + 21x_4 - 2x_5 &= 0 \\ -x_1 + 11x_2 - 9x_3 + 13x_4 - 20x_5 &= 0 \end{aligned}$$

MATLAB 1.4

1. **a.** Genere cuatro matrices aleatorias con más columnas (incógnitas) que renglones (ecuaciones).
   b. Use el comando **rref** para encontrar la forma escalonada reducida por renglones de cada una.
   c. Para cada matriz use la forma escalonada reducida por renglones para escribir la solución a los sistemas homogéneos asociados. Verifique el teorema 1, es decir, que en este caso siempre hay un número infinito de soluciones.

   (Para usar MATLAB para generar las matrices aleatorias, vea la sección anterior a los problemas de MATLAB de la sección 1.3.)

2. ¿Qué puede concluir sobre la solución de un sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes tiene más renglones (ecuaciones) que columnas (incógnitas)? Resuelva los sistemas homogéneos cuyas matrices de coeficientes se dan enseguida. ¿Confirman estos resultados su conclusión?

   i. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **ii.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

3. **Balanceo de reacciones químicas** Al balancear reacciones químicas tales como la de la fotosíntesis

$$CO_2 + H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$$

se buscan enteros positivos x_1, x_2 x_3 y x_4 que no tengan un divisor común diferente de 1, de manera que en

$$x_1(CO_2) + x_2(H_2O) \rightarrow x_3(C_6H_{12}O_6) + x_4(O_2)$$

el número de átomos de cada elemento químico involucrado es el mismo en cada lado de la reacción. El número de átomos de un elemento químico está indicado por el subíndice; por ejemplo, en CO_2 hay un átomo de C (carbono) y dos átomos de O (oxígeno). Esto conduce a un sistema de ecuaciones homogéneo. ¿Por qué se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneo del "balanceo"?

$$\begin{aligned} C&: x_1 = 6x_3 \\ O&: 2x_1 + x_2 = 6x_3 + 2x_4 \\ H&: 2x_2 = 12x_3 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x_1 - 6x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 - 12x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema tiene más incógnitas que ecuaciones, por lo que se espera un número infinito de soluciones. Para resolver el sistema, se introduce la matriz aumentada, se usa el comando **rref** y se escribe la solución en términos de las variables arbitrarias. Será necesario elegir las variables arbitrarias de manera que x_1, x_2, x_3 y x_4 sean enteros sin un divisor común diferente de 1.

Para los sistemas considerados aquí, habrá una variable arbitraria correspondiente a la última columna de la rref (forma escalonada reducida por renglones) de la matriz de coeficientes. Para ayudar a encontrar la elección correcta de variables arbitrarias para producir enteros se usa la notación ":" para asignar la variable **z** a la última columna de la

rref de la matriz de coeficientes. Se da el comando **xx = rat(z,'s')**. Esto desplegará los números de esta columna en forma de fracciones en lugar de decimales. Si se está usando MATLAB 4.0, se da el comando **format rat** y después se despliega **xx**, (asegúrese de dar el comando **format short** para regresar a la forma normal).

a. Resuelva el sistema anterior para la reacción de fotosíntesis y encuentre los enteros x_1 a x_4 sin común divisor diferente de 1 que la balancean.

b. Establezca el sistema de ecuaciones homogéneas que balancea la reacción entre:

$$Pb(N_3)_2 + Cr(MnO_4)_2 \rightarrow Cr_2O_3 + MnO_2 + Pb_3O_4 + NO$$

Resuelva el sistema y encuentre los enteros x_1 a x_6 sin divisor común diferente de 1 que balancea la reacción.

1.5 VECTORES Y MATRICES

El estudio de vectores y matrices es el corazón del álgebra lineal. El estudio de vectores comenzó esencialmente con el trabajo de gran matemático irlandés Sir William Hamilton (1805-1865).† Su deseo de encontrar una forma de representar ciertos objetos en el plano y el espacio lo llevó a descubrir lo que el llamó *cuaterniones*. Esta noción condujo al desarrollo de lo que ahora se llaman *vectores*. Mientras Hamilton vivió y durante el resto del siglo XIX hubo un debate considerable sobre la utilidad de los cuaterniones y vectores. Al final del siglo el gran físico inglés Lord Kelvin escribió que los cuaterniones, "aun cuando son bellamente ingeniosos, han sido un mal peculiar para todos aquellos que los han manejado de alguna manera y, los vectores . . . nunca han sido de la menor utilidad para ninguna criatura".

Pero Kelvin estaba equivocado. Hoy casi todas las ramas de la física clásica y moderna se representan mediante el lenguaje de vectores. Los vectores también se usan, cada vez con más frecuencia, en las ciencias biológicas y sociales.‡

En la página 2 se describió la solución a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas como un par de números (x, y). En el ejemplo 1.3.1 en la página 9 se escribió la solución a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas como la terna de números $(4, -2, 3)$. Tanto (x, y) como $(4, -2, 3)$ son **vectores**.

DEFINICIÓN 1 **Vector renglón de n componentes** Se define a un **vector renglón de n componentes** como un conjunto **ordenado** de n números escritos de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \textbf{(1)}$$

† Vea la semblanza bibliográfica de Hamilton en la página 54.

‡ Un análisis interesante sobre el desarrollo del análisis vectorial moderno se puede consultar en el libro de M. J. Crowe, *A History of Vector Analysis* (Notre Dame: University of Notre Dame Press, 1967) o en el excelente libro de Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Nueva York: Oxford University Press, 1972,

DEFINICIÓN 2 **Vector columna de n componentes** Un **vector columna de n componentes** es un conjunto **ordenado** de n números escritos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

Componentes de un vector

En (1) o (2), x_1 se llama la **primera componente** del vector, x_2 es la **segunda componente**, y así sucesivamente. En general, x_k se llama la **k-ésima componente** del vector.

Para simplificar, con frecuencia se hará referencia a un vector renglón de n componentes como un **vector renglón** o un **n-vector.** De igual manera, se usará el término **vector columna** (o n-vector) para denotar a un vector columna de n componentes. Cualquier vector cuyos elementos sean todos cero se llama un **vector cero**.

Vector cero

EJEMPLO 1 **Cuatro vectores** Los siguientes son vectores:

i. (3,6) es un vector renglón (o un 2-vector).

ii. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ es un vector columna (o un 3-vector).

iii. (2, −1, 0, 4) es un vector renglón (o un 4-vector).

iv. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector columna y un vector cero.

◆

ADVERTENCIA

La palabra "ordenado" en la definición de un vector es esencial. Dos vectores con las mismas componentes escritas en diferente orden *no* son iguales. Así, por ejemplo, los vectores renglón (1, 2) y (2, 1) no son iguales. ◇

En el resto de este libro se denotarán los vectores con letras minúsculas negritas como **u**, **v**, **a**, **b**, **c**, etcétera. Un vector cero se denota por **0**. Más aún, como en general será obvio cuando se trate de un vector renglón o de un vector columna, se hará referencia a ellos simplemente como "vectores".

Los vectores surgen de diversas maneras. Suponga que el jefe de compras de una fábrica debe ordenar cantidades diferentes de acero, aluminio, aceite y papel. Él puede

mantener el control de las cantidades a ordenar con un sólo vector. El vector $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix}$ indica que ordenará 10 unidades de acero, 30 unidades de aluminio, etcétera.

Observación. Se puede observar aquí por qué es importante el orden en que se escriben las componentes de un vector. Es claro que los vectores $\begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix}$ significan cosas muy distintas para el comprador.

Ahora se describirán algunas propiedades de los vectores. Como sería repetitivo hacerlo primero para los vectores renglón y después para los vectores columna, se darán todas las definiciones en términos de vectores columna. Los vectores renglón tienen definiciones similares.

$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ Las componentes de todos los vectores en este texto son números reales o complejos.† Se denota al conjunto de todos los números reales por $\mathbb{R}$ y al conjunto de números complejos por $\mathbb{C}$.

El espacio $\mathbb{R}^n$

Se usa el símbolo $\mathbb{R}^n$ para denotar al conjunto de todos los n-vectores $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, donde cada a_i es un número real.

$\mathbb{C}^n$ De manera similar, se usa el símbolo $\mathbb{C}^n$ para denotar al conjunto de todos los n-vectores $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, donde cada c_i es un número complejo. En el capítulo 3 se analizarán los conjuntos $\mathbb{R}^2$ (vectores en el plano) y $\mathbb{R}^3$ (vectores en el espacio). En el capítulo 4 se examinarán los conjuntos arbitrarios de vectores.

En realidad los vectores son tipos especiales de matrices. Por lo tanto, en lugar de estudiar las propiedades de los vectores, se analizarán las propiedades de las matrices.

† Un número complejo es un número de la forma $a + ib$, en donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$. En el apéndice 2 se da una descripción de los números complejos. No se habla de vectores complejos otra vez hasta el capítulo 4; serán útiles en especial en el capítulo 6. Por lo tanto, a menos que se establezca de otra manera, por el momento se supondrá que todos los vectores tienen componentes reales.

DEFINICIÓN 3 **Matriz** Una **matriz A de $m \times n$** es un arreglo rectangular de mn números dispuestos en m renglones y n columnas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (3)$$

El símbolo $m \times n$ se lee "m por n". A menos que se establezca lo contrario, se supondrá siempre que los números en una matriz o vector son reales. El vector renglón

Renglones y columnas de una matriz

$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ se llama **renglón i** y el vector columna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ se llama **columna j**. La

Componente o elemento

componente o elemento ij de A, denotado por a_{ij}, es el número que aparece en el renglón i y la columna j de A. En ocasiones se escribirá la matriz A como $A = (a_{ij})$. Por lo general, las matrices se denotarán con letras mayúsculas.

Matriz cuadrada

Matriz cero

Tamaño de una matriz

Si A es una matriz $m \times n$ con $m = n$, entonces A se llama **matriz cuadrada**. Una matriz $m \times n$ con todos los elementos iguales a cero se llama **matriz cero** de $m \times n$.

Se dice que una matriz $m \times n$ tiene **tamaño** $m \times n$.

Nota histórica. El matemático inglés James Joseph Sylvester (1814-1897) fue el primero que usó el término "matriz" en 1850, para distinguir las matrices de los determinantes (que se estudiarán en el capítulo 2). De hecho, la intención era que el término "matriz" tuviera el significado de "madre de los determinantes".

EJEMPLO 2 **Cinco matrices** Enseguida se presentan cinco matrices de diferentes tamaños:

i. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz de 2×2 (cuadrada).

ii. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz de 3×2.

iii. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz de 2×3.

iv. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz de 3×3 (cuadrada).

v. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz cero de 2×4.

◆

Notación con paréntesis cuadrados. En algunos libros se dan las matrices dentro de paréntesis cuadrados en lugar de paréntesis redondos. Por ejemplo, las primeras dos matrices en el ejemplo 2 se pueden escribir como

i. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **ii.** $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

En este texto se usarán exclusivamente paréntesis redondos.

A través del libro se hace referencia al renglón i, la columna j y la componente ij de una matriz para diferentes valores de i y j. Estas ideas se ilustran en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 **Localización de las componentes de una matriz** Encuentre las componentes 1,2, 3,1 y 2,2 de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución La componente 1,2 es el número que se encuentra en el primer renglón y la segunda columna, que se han sombreado; la componente 1,2 es 6:

2da columna ↓

1er renglón → $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

En las siguientes matrices sombreadas se puede ver que la componente 3,1 es 7 y la componente 2,2 es −3:

1ra columna ↓

3er renglón → $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

2da columna ↓

2do renglón → $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

◆

Definición 4 **Igualdad de matrices** Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son **iguales** si (1) son del mismo tamaño y (2) las componentes correspondientes son iguales.

EJEMPLO 4 Matrices iguales y matrices distintas ¿Son iguales las siguientes matrices?

i. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1+3 & 1 & 2+3 \\ 1+1 & 1-4 & 6-6 \end{pmatrix}$

ii. $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

iii. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

i. Sí; ambas matrices son de 2×3 y $1 + 3 = 4$, $2 + 3 = 5$, $1 + 1 = 2$, $1 - 4 = -3$ y $6 - 6 = 0$.

ii. No; $-2 \neq 0$, por lo que las matrices son distintas ya que por ejemplo, las componentes 1,1 son diferentes. Esto es cierto aun cuando las dos matrices contienen los mismos números. Las componentes *correspondientes* deben ser iguales. Esto significa que la componente 1,1 en A debe ser igual a la componente 1,1 en B, etcétera.

iii. No; la primera matriz es de 2×2 y la segunda es de 2×3, de manera que no tienen el mismo tamaño. ✦

Los vectores son matrices de un renglón o de una columna

Cada vector es un tipo especial de matriz. Así, por ejemplo, el vector renglón de n componentes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es una matriz de $1 \times n$, mientras que el vector columna de n componentes $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ es una matriz de $n \times 1$.

Las matrices igual que los vectores surgen en un gran número de situaciones prácticas. Por ejemplo, en la página 47 se vio la manera en que el vector $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix}$ puede representar las cantidades ordenadas de cuatro productos distintos usados por un fabricante. Suponga que se tienen cinco plantas diferentes, entonces la matriz de 4×5

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 & 16 & 25 \\ 30 & 10 & 20 & 25 & 22 \\ 15 & 22 & 18 & 20 & 13 \\ 60 & 40 & 50 & 35 & 45 \end{pmatrix}$$

podría representar las órdenes de los cuatro productos en cada una de las cinco plantas.

Se puede ver, por ejemplo, que la planta 4 ordena 25 unidades del segundo producto mientras que la planta 2 ordena 40 unidades del cuarto producto.

Las matrices se pueden sumar y multiplicar por números reales.

DEFINICIÓN 5 **Suma de matrices** Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices $m \times n$. Entonces la suma de A y B es la matriz $m \times n$, $A + B$ dada por

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Es decir, $A + B$ es la matriz $m \times n$ que se obtiene al sumar las componentes correspondientes de A y B.

ADVERTENCIA La suma de dos matrices está definida sólo cuando las matrices son del mismo tamaño. Así, por ejemplo, no es posible sumar las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ o las matrices (vectores) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Es decir, son incompatibles bajo la suma. ◇

EJEMPLO 5 **Suma de dos matrices**

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & -5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & 4 \\ -6 & 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$ ◆

Escalares Cuando se manejan vectores, se hace referencia a los números como **escalares** (que pueden ser reales o complejos dependiendo de si los vectores en cuestión son reales o complejos).

Nota histórica. El término "escalar" se originó con Hamilton. Su definición de cuaternión incluía lo que él llamó una "parte real" y una "parte imaginaria". En su artículo "On Quaternions, or on a New System of Imaginaries in Algebra", en *Philosophical Magazine*, 3ª serie, 25(1844):26-27, escribió: "La parte *real* algebraicamente puede tomar . . . todos los valores contenidos en la *escala* de la progresión de números desde el infinito negativo al infinito positivo; la llamaremos, entonces, la *parte escalar* o simplemente el *escalar* del cuaternión . . .". En el mismo artículo Hamilton siguió con la definición de la parte imaginaria de su cuaternión como la parte *vectorial*. Aunque éste no fue el primer uso que se dio a la palabra "vector", sí fue la primera vez que se usó en el contexto de las definiciones contenidas en esta sección. Es justo decir que el artículo del que se tomó la cita anterior marca el inicio del análisis vectorial moderno.

DEFINICIÓN 6 **Multiplicación de una matriz por un escalar** Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de $m \times n$ y si α es un escalar, entonces la matriz $m \times n$, αA, está dada por

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

En otras palabras, $\alpha A = (\alpha a_{ij})$ es la matriz obtenida al multiplicar cada componente de A por α. Si $\alpha A = B = (b_{ij})$, entonces $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

EJEMPLO 6 **Múltiplos escalares de matrices**

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Entonces $2A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 8 & 12 \\ -4 & 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$,

$-\frac{1}{3}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -2 \\ \frac{2}{3} & -1 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$ y $0A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ♦

EJEMPLO 7 **Suma de múltiplos escalares de dos vectores**

Sea $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcule $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

Solución $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$ ♦

El siguiente teorema proporciona los hechos básicos sobre la suma de matrices y la multiplicación por escalares. Se demuestra la parte *iii)* y se deja el resto de la prueba como ejercicio para el lector (vea los problemas 41 al 43).

TEOREMA 1 Sean A, B y C tres matrices de $m \times n$ y sean α y β dos escalares. Entonces:

i. $A + 0 = A$

ii. $0A = 0$

iii. $A + B = B + A$ **(ley conmutativa para la suma de matrices)**

iv. $(A + B) + C = A + (B + C)$ **(ley asociativa para la suma de matrices)**

v. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ **(ley distributiva para la multiplicación por un escalar)**

vi. $1A = A$

vii. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Nota. El cero en la parte *i*) del teorema es la matriz cero de $m \times n$. En la parte *ii*) el cero a la izquierda es un escalar mientras que el cero a la derecha es la matriz cero de $m \times n$.

Demostración de iii) Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

Entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$a + b = b + a$ para cualesquiera dos números reales a y b

$$= \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} & \cdots & b_{1n} + a_{1n} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} & \cdots & b_{2n} + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} + a_{m1} & b_{m2} + a_{m2} & \cdots & b_{mn} + a_{mn} \end{pmatrix} = B + A$$

◆

EJEMPLO 8 **Ilustración de la ley asociativa para la suma de matrices** Para ilustrar la ley asociativa se observa que

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

De igual manera,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

◆

El ejemplo 8 ilustra la importancia de la ley asociativa de la suma de vectores ya que si se desea sumar tres matrices o más, sólo se puede hacer sumándolas de dos en dos. La ley asociativa dice que esto se puede hacer de dos maneras diferentes y obtener el mismo resultado. Si no fuera así, sería más difícil definir la suma de tres o más matrices ya que tendría que especificarse si se quiere definir la suma de $A + B + C$ como $(A + B) + C$ o como $A + (B + C)$.

Semblanza de . . .

Sir William Rowan Hamilton, 1805 –1865

Sir William Rowan Hamilton (*The Granger Collection*)

Nacido en Dublín en 1805, en donde pasó la mayor parte de su vida, William Rowan Hamilton fue sin duda el más grande matemático irlandés. El padre (un abogado) y la madre de Hamilton murieron cuando era apenas un niño. Su tío, un lingüista, se hizo cargo de su educación. Para su quinto cumpleaños, Hamilton podía leer inglés, hebreo, latín y griego. Cuando cumplió 13 años dominaba, además de los idiomas del continente europeo, sánscrito, chino, persa, árabe, malasio, hindú, bengalí y varios otros. Hamilton disfrutaba escribir poesía, tanto cuando era niño como de adulto, y entre sus amigos se contaban los grandes poetas ingleses Samuel Taylor Coleridge y William Wordsworth. Sin embargo, la poesía de Hamilton se consideraba tan mala que resultó una fortuna que desarrollara otros intereses, especialmente en matemáticas.

Aunque disfrutó las matemáticas desde niño, el interés de Hamilton creció de manera importante después de un encuentro casual a los 15 años con Zerah Colburn, el americano que calculó las descargas eléctricas de los rayos. Poco tiempo después, Hamilton comenzó a leer los libros importantes de matemáticas de su tiempo. En 1823, a los 18 años, descubrió un error en la *Mécanique céleste* de Simon Laplace y escribió un artículo impresionante sobre el tema. Un año después entró al Trinity College en Dublín.

La carrera universitaria de Hamilton fue sobresaliente. A los 21 años, siendo todavía estudiante de licenciatura, había impresionado tanto a sus maestros que fue nombrado Astrónomo Real de Irlanda y Profesor de Astronomía en la universidad. Poco después escribió lo que ahora se considera un trabajo clásico en óptica. Usando sólo la teoría matemática, predijo la refracción cónica en cierto tipo de cristales. Más tarde los físicos confirmaron esta teoría. En parte debido a este trabajo, Hamilton fue armado caballero en 1835.

El primer artículo puramente matemático de Hamilton apareció en 1833. En él describió un manera algebraica de manipular pares de números reales. Este trabajo da las reglas que se usan hoy en día para sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos. No obstante, en un principio, Hamilton no pudo desarrollar una multiplicación para ternas o n-eadas ordenadas de números para $n > 2$. Durante 10 años estudió

este problema, y se dice que lo resolvió en un rato de inspiración mientras caminaba por el Puente de Brougham en Dublín en 1843. La clave era descartar la familiar propiedad conmutativa de la multiplicación. Los nuevos objetos que creó se llamaron *cuaterniones*, que fueron los precursores de lo que ahora se conoce como *vectores*. En la actualidad, una placa incrustada en el puente cuenta la historia.

Aquí, mientras caminaba,
el 16 de octubre de 1843,
Sir William Rowan Hamilton
descubrió, en un instante de
genialidad, la fórmula fundamental
para la multiplicación de cuaterniones
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
y la grabó en una piedra de este puente.

Durante el resto de su vida, Hamilton pasó la mayor parte del tiempo desarrollando el álgebra de cuaterniones. Él pensaba que tendrían un significado revolucionario en la física matemática. Su trabajo monumental sobre este tema, *Treatise on Quaternions*, fue publicado en 1853. Después trabajó en una extensión del tema, *Elements of Quaternions*. Aunque Hamilton murió en 1865 antes de terminar esta obra, su hijo publicó el trabajo en 1866.

Los estudiantes de matemáticas y física conocen a Hamilton dentro de muchos otros contextos. En física matemática, por ejemplo, se encuentra la función hamiltoniana que con frecuencia representa la energía total de un sistema, y las ecuaciones diferenciales de dinámica de Hamilton-Jacobi. En la teoría de matrices, el teorema de Hamilton-Cayley establece que toda matriz satisface su propia ecuación característica. Esto se estudiará en el capítulo 6.

A pesar del gran trabajo desarrollado, los últimos años de Hamilton fueron un tormento. Su esposa estaba semiinválida y él fue atacado por el alcoholismo. Es gratificante por lo tanto, señalar que durante estos últimos años la recién formada American National Academy of Sciences eligió a Sir William Rowan Hamilton como su primer miembro extranjero.

PROBLEMAS 1.5

Autoevaluación

I. ¿Cuál de las siguientes aseveraciones es cierta para la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}?$$

a. Es una matriz cuadrada.

b. Si se multiplica por el escalar -1, el producto es $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Es una matriz de 3×2.

d. Es la suma de $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

II. ¿Cuál de los incisos es $2A - 4B$ si $A = (2 \;\; 0 \;\; 0)$ y $B = (3 \;\; 1)$?

a. $(-8 \;\; -4)$ b. $(5 \;\; 0 \;\; 1)$

c. $(16 \;\; -4 \;\; 0)$

d. Esta operación no se puede realizar.

III. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta cuando se encuentra la diferencia de dos matrices?

a. Las matrices deben ser del mismo tamaño.

b. Las matrices deben ser cuadradas.

c. Las matrices deben ser ambas vectores renglón o vectores columna.

d. Una matriz debe ser un vector renglón y la otra un vector columna.

IV. ¿Cuáles serían los elementos de la segunda columna de la matriz B si

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

a. $-2, -8, 1$ b. $4, -8$

c. $2, 8, -1$ d. $-4, 8$

V. ¿Cuál de las siguientes debe ser el segundo renglón de la matriz B si $3A - B = 2C$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

a. $-3, 2, 6$ b. $0, -2, 9$

c. $3, -2, 6$ d. $0, 2, -9$

Respuestas a la autoevaluación

I. b II. d III. a IV. b V. b

En los problemas 1 al 10 realice los cálculos indicados con $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **2.** $3\mathbf{b}$ **3.** $-2\mathbf{c}$

4. $\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ **5.** $2\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ **6.** $-3\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$

7. $0\mathbf{c}$ **8.** $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ **9.** $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$

10. $3\mathbf{b} - 7\mathbf{c} + 2\mathbf{a}$

En los problemas 11 al 20 realice los cálculos indicados con $\mathbf{a} = (3, -1, 4, 2)$, $\mathbf{b} = (6, 0, -1, 4)$ y $\mathbf{c} = (-2, 3, 1, 5)$.

11. $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ **12.** $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ **13.** $4\mathbf{c}$

14. $-2\mathbf{b}$ **15.** $2\mathbf{a} - \mathbf{c}$ **16.** $4\mathbf{b} - 7\mathbf{a}$

17. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ **18.** $\mathbf{c} - \mathbf{b} + 2\mathbf{a}$ **19.** $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$

20. $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$

En los problemas 21 al 32 realice las operaciones indicadas con $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 6 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$.

21. $3A$ **22.** $A + B$ **23.** $A - C$

24. $2C - 5A$ **25.** $0B$ (0 es el cero escalar) **26.** $-7A + 3B$

27. $A + B + C$ **28.** $C - A - B$ **29.** $2A - 3B + 4C$

30. $7C - B + 2A$

31. Encuentre una matriz D tal que $2A + B - D$ es la matriz cero de 3×2.

32. Encuentre la matriz E tal que $A + 2B - 3C + E$ es la matriz cero de 3×2.

En los problemas 33 al 40 realice los cálculos indicados con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

33. $A - 2B$ **34.** $3A - C$ **35.** $A + B + C$

36. $2A - B + 2C$ **37.** $C - A - B$ **38.** $4C - 2B + 3A$

39. Encuentre una matriz D tal que $A + B + C + D$ es la matriz cero de 3×3.

40. Encuentre una matriz E tal que $3C - 2B + 8A - 4E$ es la matriz cero de 3×3.

41. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$ y sea $\bar{0}$ la matriz cero de $m \times n$. Utilice las definiciones 5 y 6 para demostrar que $0A = \bar{0}$ y que $\bar{0} + A = A$. De igual manera, muestre que $1A = A$.

42. Si $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$ son tres matrices de $m \times n$, calcule $(A + B) + C$ y $A + (B + C)$ y muestre que son iguales.

43. Si α y β son escalares y A y B son matrices de $m \times n$, calcule $\alpha(A + B)$ y $\alpha A + \alpha B$ y muestre que son iguales. Calcule además $(\alpha + \beta)A$ y $\alpha A + \beta A$ muestre que son iguales.

44. Considere la "gráfica" que une los cuatro puntos de la figura 1.7. Construya una matriz de 4×4 que tenga la propiedad de que $a_{ij} = 0$ si el punto i no está conectado (unido por una línea) con el punto j, y $a_{ij} = 1$ si el punto i está conectado con el punto j.

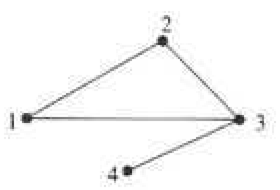


Figura 1.7

45. Haga lo mismo (construyendo una matriz de 5×5) para la gráfica de la figura 1.8.

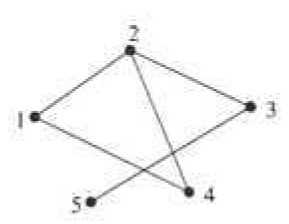


Figura 1.8

46. En la fabricación de cierto producto se necesitan cuatro materias primas. El vector $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$ representa una demanda dada de la fábrica para cada una de las cuatro materias primas para producir 1 unidad del producto. Si $\mathbf{d}$ es el vector demanda de la fábrica 1 y $\mathbf{e}$ es el vector demanda de la fábrica 2, ¿qué representan los vectores $\mathbf{d} + \mathbf{e}$ y $2\mathbf{d}$?

MANEJO DE CALCULADORA

Como se vio en la página 28, se pueden introducir matrices tanto en la TI-85 como en la CASIO fx-7700 GB. En la CASIO es necesario primero especificar el tamaño (o dimensión) de la matriz. Como en la página 29, se da el tamaño de una matriz $m \times m$ oprimiendo la siguiente secuencia de teclas:

MODE | 0 | F1 | F6 | F1 | m | EXE | n | EXE

Aquí $1 \leq m \leq 9$ y $1 \leq n \leq 9$.

En la TI-85 no es necesario especificar el tamaño de antemano.

CASIO fx-7700 GB

Suma y multiplicación por un escalar en la CASIO fx-7700 GB Para sumar dos matrices del mismo tamaño, primero se introduce una como A y la otra como B. Después se oprime la tecla F3 , que en el modo apropiado tiene la etiqueta "+".

Para multiplicar A por un escalar k, se oprime k | kA. La tecla kA se accesa oprimiendo F1 cuando la calculadora está en el modo apropiado.

TI-85

Suma y multiplicación por un escalar en la TI-85 La manera más sencilla de sumar dos matrices del mismo tamaño es introducir primero cada matriz y dar a cada una un nombre (como A y B). Después para obtener $A + B$ se oprime

ALPHA | A | + | ALPHA | B | ENTER

Para obtener kA se oprime

k | ALPHA | A | ENTER

MATLAB 1.5

1. Este problema proporciona la práctica necesaria para trabajar con la notación matricial al igual que con los procedimientos que se usarán en problemas futuros. En los problemas anteriores, al realizar la operación con renglones $R_j \rightarrow R_j + cR_k$ se encontraba el multiplicador c por observación. Este multiplicador c se puede calcular con exactitud a partir de los elementos de la matriz.

Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & 0 & f & g & h \\ 0 & 0 & i & j & k \end{pmatrix}$$

Para crear un cero en la posición que ocupa i se necesita $R_3 \rightarrow R_3 + (-i/f)R_2$. Observe que $f = A(2, 3)$ y que $i = A(3, 3)$:

c = – A(3,3)/A(2,3)

En general, $c = -$ elemento que debe hacerse cero/pivote usado:

A(3,:) = A(3,:) + c*A(2,:)

a. Para la matriz que sigue realice las operaciones con renglones $R_j \rightarrow R_j + cR_i$ para obtener la matriz en forma escalonada por renglón (no la forma escalonada reducida por renglones), excepto que el elemento pivote no necesita ser 1. (No multiplique ni divida un renglón por un número para crear unos.) Encuentre todos los multiplicadores usando la notación de matrices anterior. Para esta matriz sus multiplicadores serán números sencillos para que pueda verificar conforme el proceso avanza:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -4 \\ -3 & -6 & 12 & 2 & -12 \\ 1 & 2 & -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

b. Oprima

```
A = rand(4,5)
A(:,3) = 2*A(:,1) + 4*A(:,2)
```

Siga las instrucciones del inciso a). Debe estar seguro de calcular los multiplicadores usando la notación matricial.

Vea en el problema 2 de MATLAB en la sección 1.10 una situación en la que se quiere realizar el tipo de reducción que se acaba de describir.

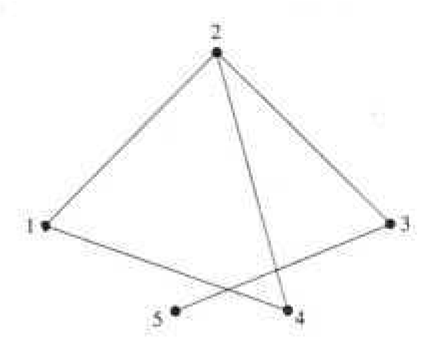
2. Características de MATLAB ***Introducción eficiente de matrices dispersas***

a. En el problema 45 se le pidió que estableciera matrices para gráficas en las que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el punto } i \text{ está conectado con el punto } j \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Para la mayor parte de este tipo de gráficas la matriz consiste en muchos ceros y algunos unos. En MATLAB se puede introducir una matriz con ceros en todos sus elementos y después modificarla renglón por renglón.

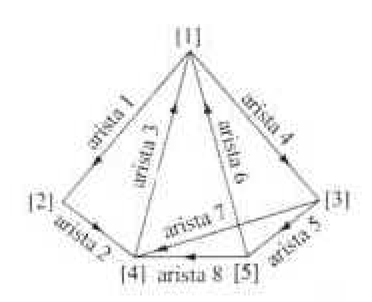
Considere la siguiente gráfica:



a = zeros(5)
a(1,[2 4] = [1 1] (1 está conectado con 2 y 4)
a(2,[1 3 4]) = [1 1 1] (2 está conectado con 1, 3 y 4)
y así sucesivamente

Termine de introducir la matriz anterior y verifique el resultado con su repuesta al problema 45.

b. Considere la siguiente gráfica dirigida.



Defina

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } j \text{ va al nodo } i \\ -1 & \text{si la arista } j \text{ sale del nodo } i \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

¿De qué tamaño será A? Introduzca **A = zeros(n,m)**, donde n es el número de renglones y m es el número de columnas. Se modificará A columna por columna viendo una arista a la vez. Por ejemplo,

A([1 2],1) = [-1;1] la arista 1 sale de [1] y va a [2]
A([4 5],8) = [1;-1] la arista 8 sale de [5] y va a [4]

Complete el proceso anterior para encontrar A.

3. a. Introduzca cualesquiera dos matrices A y B de distinto tamaño. Encuentre **A + B**. ¿Qué le dice MATLAB?

b. Introduzca cualesquiera dos matrices A y B del mismo tamaño. Suponga que s es un escalar. De sus conocimientos algebraicos sobre las manipulaciones con números, ¿a qué conclusión llegaría sobre las relaciones entre **s*A**, **s*B** y **s*(A + B)**? Utilice una línea de comentario para escribir esta conclusión. Pruebe su conclusión con tres elecciones diferentes de s. Pruebe su conclusión con otra elección de A y otra elección de B y para tres valores de s. (Si va a usar MATLAB para generar matrices aleatorias, consulte la presentación anterior de problemas de MATLAB 1.3.)

1.6 PRODUCTOS VECTORIAL Y MATRICIAL

En esta sección se ve la manera en que se pueden multiplicar dos matrices. Es evidente que se puede definir el producto de dos matrices de $m \times n$, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ como la matriz $m \times n$ cuya componente ij es $a_{ij}b_{ij}$. Sin embargo, para casi todas las aplicaciones

importantes que usan matrices, se necesita otro tipo de producto. Se intentará explicar a qué se debe esto.

EJEMPLO 1 **Producto de un vector de demanda y un vector de precios** Suponga que un fabricante produce cuatro artículos. Su demanda está dada por el **vector de demanda d** = (30 20 40 10) (una matriz de 1 × 4). El precio por unidad que recibe el fabricante por los artículos está dado por el **vector de precios p** = $\begin{pmatrix} \$20 \\ \$15 \\ \$18 \\ \$40 \end{pmatrix}$ (una matriz de 4 × 1). Si se cumple la demanda, ¿cuánto dinero recibirá el fabricante?

Solución La demanda del primer artículo es 30, y el fabricante recibe \$20 por cada artículo vendido. Entonces recibe (30)(20) = \$600 de las ventas del primer artículo. Si se sigue este razonamiento, se ve que la cantidad total de dinero que recibe es

$$\begin{aligned}(30)(20) + (20(15) + (40)(18) + (10)(40) &= 600 + 300 + 720 + 400 \\ &= \$2020\end{aligned}$$

Este resultado se escribe como

$$(30 \quad 20 \quad 40 \quad 10)\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 18 \\ 40 \end{pmatrix} = 2020$$

Es decir, se multiplicó un vector renglón de 4 componentes y un vector columna de 4 componentes para obtener un escalar (un número real). ◆

En el último ejemplo se multiplicó un vector renglón por un vector columna y se obtuvo un escalar. En general se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1 **Producto escalar** Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ dos vectores. Entonces el **producto escalar** de **a** y **b**, denotado por **a** · **b**, está dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \qquad (1)$$

Debido a la notación en (1), el producto escalar se llama con frecuencia **producto punto** o **producto interno** de los vectores. Observe que el producto escalar de dos n-vectores es un escalar (es decir, es un número).

ADVERTENCIA Al tomar el producto escalar de **a** y **b** es necesario que **a** y **b** tengan el mismo número de componentes. ◇

Con frecuencia se tomará el producto escalar de un vector renglón y un vector columna. En este caso se tiene

Producto escalar

vector renglón $1 \times n$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \quad (2)$$

Éste es un número real (un escalar)

vector columna $n \times 1$

EJEMPLO 2 **Producto escalar de dos vectores** Sea $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Solución $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1)(3) + (-2)(-2) + (3)(4) = 3 + 4 + 12 = 19$ ◆

EJEMPLO 3 **Producto escalar de dos vectores** Sea $\mathbf{a} = (2, -3, 4, -6)$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Solución Aquí $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2)(1) + (-3)(2) + (4)(0) + (-6)(3) = 2 - 6 + 0 - 18 = -22$. ◆

El siguiente teorema se deduce directamente de la definición del producto escalar. Se demuestra la parte *ii*) y se deja el resto como ejercicio.

TEOREMA 1 Sean **a**, **b** y **c** tres *n*-vectores y sean α y β dos escalares. Entonces

- **i.** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = 0$
- **ii.** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ **(ley conmutativa del producto escalar)**
- **iii.** $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ **(ley distributiva del producto escalar)**
- **iv.** $(\alpha\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

Prueba de ii) Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Entonces

$ab = ba$ para cualesquiera dos números a y b

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$ ◆

Observe que *no* existe una ley asociativa para el producto escalar. La expresión $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ no tiene sentido porque ninguno de los dos lados de la ecuación está definido. Para el lado izquierdo, esto se concluye del hecho de que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es un escalar y el producto escalar del escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y el vector $\mathbf{c}$ no está definido.

Ahora se define el producto de dos matrices.

DEFINICIÓN 2 **Producto de dos matrices** Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$, y sea $B = (b_{ij})$ una matriz $n \times p$. Entonces el **producto** de A y B es una matriz $m \times p$, $C = (c_{ij})$, en donde

$$c_{ij} = (\text{renglón } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B) \quad (3)$$

Es decir, el elemento ij de AB es el producto punto del renglón i de A y la columna j de B. Si esto se extiende, se obtiene

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \quad (4)$$

Si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, entonces se dice que A y B son **compatibles bajo la multiplicación**.

ADVERTENCIA Dos matrices se pueden multiplicar sólo si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones de la segunda. De otra manera, los vectores que forman el renglón i en A y la columna j en B no tendrán el mismo número de componentes y el producto punto en la ecuación (3) no estará definido. En otras palabras, las matrices A y B serán **incompatibles** bajo la multiplicación. Para ilustrar esto, se consideran las siguientes matrices A y B:

columna j de B

renglón i de A →

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Los vectores renglón y columna sombreados deben tener el mismo número de componentes. ◇

EJEMPLO 4 **Producto de dos matrices de 2 × 2** Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, calcule AB y BA.

Solución A es una matriz de 2 × 2 y B es una matriz de 2 × 2, entonces $C = AB = (2 \times 2) \times (2 \times 2)$ también es una matriz de 2 × 2. Si $C = (c_{ij})$, ¿cuál es el valor de c_{11}? Se sabe que

$$c_{11} = (1^{er} \text{ renglón de } A) \cdot (1^{a} \text{ columna de } B)$$

Rescribiendo las matrices, se tiene

1ª columna de B

1er renglón de A →

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Así,

$$c_{11} = (1 \quad 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 + 15 = 18$$

De manera similar, para calcular c_{12} se tiene

2ª columna de B

1er renglón de A →

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

y

$$c_{12} = (1 \quad 3)\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 + 18 = 16$$

Siguiendo el procedimiento se encuentra que

$$c_{21} = (-2 \quad 4)\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = -6 + 20 = 14$$

y

$$c_{22} = (-2 \;\; 4)\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 4 + 24 = 28$$

Entonces

$$C = AB = \begin{pmatrix} 18 & 16 \\ 14 & 28 \end{pmatrix}$$

De manera similar, sin escribir los pasos intermedios, se ve que

$$C' = BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & 9-8 \\ 5-12 & 15+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -7 & 39 \end{pmatrix}$$ ✦

Obervación. El ejemplo 4 ilustra un hecho importante: *en general, el producto de matrices no es conmutativo*. Es decir, $AB \neq BA$. Algunas veces ocurre que $AB = BA$, pero esto es una excepción, no una regla. Si $AB = BA$, se dice que A y B **conmutan**. De hecho, como lo ilustra el siguiente ejemplo, puede ocurrir que AB esté definida y BA no lo esté. Así, debe tenerse cuidado en el *orden* de la multiplicación de dos matrices.

EJEMPLO 5 **El producto de una matriz de 2 × 3 y una de 3 × 4 está definido pero el producto de una matriz de 3 × 4 y una de 2 × 3 no lo está** Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$ Calcule AB.

Solución Primero observe que A es una matriz de 2 × 3 y B es una matriz de 3 × 4. Entonces el número de columnas de A es igual al número de renglones de B. Por lo tanto, el producto AB está definido y es una matriz de 2 × 4. Sea $AB = C = (c_{ij})$. Entonces

$$c_{11} = (2 \;\; 0 \;\; -3) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 23 \qquad c_{12} = (2 \;\; 0 \;\; -3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = -5$$

$$c_{13} = (2 \;\; 0 \;\; -3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \qquad c_{14} = (2 \;\; 0 \;\; -3) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 5$$

$$c_{21} = (4 \;\; 1 \;\; 5) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 15 \qquad c_{22} = (4 \;\; 1 \;\; 5) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$$

$$c_{23} = (4 \;\; 1 \;\; 5) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 26 \qquad c_{24} = (4 \;\; 1 \;\; 5) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 39$$

Así, $AB = \begin{pmatrix} 23 & -5 & 2 & 5 \\ 15 & 6 & 26 & 39 \end{pmatrix}$. Esto completa el problema. Observe que el producto *BA no* está definido ya que el número de columnas de B (cuatro) no es igual al número de renglones de A (dos). ◆

EJEMPLO 6 **Contacto directo e indirecto con una enfermedad contagiosa** En este ejemplo se muestra cómo se puede usar la multiplicación de matrices para modelar la manera en que se extiende una enfermedad contagiosa. Suponga que cuatro individuos han contraído esta enfermedad. Este grupo hace contacto con seis personas de un segundo grupo. Estos contactos, llamados *contactos directos*, se pueden representar por una matriz de 4×6. Enseguida se da un ejemplo de este tipo de matrices.

Matriz de contacto directo: primero y segundo grupos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso se hace $a_{ij} = 1$ si la i-ésima persona del primer grupo hace contacto con la j-ésima persona del segundo grupo. Por ejemplo, el 1 en la posición 2,4 significa que la segunda persona del primer grupo (infectada) hizo contacto con la cuarta persona del segundo grupo. Ahora suponga que un tercer grupo de cinco personas tiene varios contactos directos con individuos del segundo grupo. Esto también se puede representar por una matriz.

Matriz de contato directo: segundo y tercer grupos

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que $b_{64} = 0$, lo que quiere decir que la sexta persona del segundo grupo no tiene contacto con la cuarta persona del tercer grupo.

Los contactos *indirectos* o *de segundo orden* entre los individuos del primero y tercer grupos se representan por la matriz de 4×5 $C = AB$. Para ver esto, observe que una persona del grupo 3 puede quedar contagiada por alguien del grupo 2, quien a su vez fue contagiada por alguien del grupo 1. Por ejemplo, como $a_{24} = 1$ y $b_{45} = 1$, se ve que, indirectamente, la quinta persona del grupo 3 tuvo contacto (a través de la cuarta persona del grupo 2) con la segunda persona del grupo 1. El número total de contactos indirectos entre la segunda persona en el grupo 1 y la quinta persona del grupo 3 está dado por

Así, $AB = \begin{pmatrix} 23 & -5 & 2 & 5 \\ 15 & 6 & 26 & 39 \end{pmatrix}$. Esto completa el problema. Observe que el producto *BA no* está definido ya que el número de columnas de B (cuatro) no es igual al número de renglones de A (dos). ◆

EJEMPLO 6 **Contacto directo e indirecto con una enfermedad contagiosa** En este ejemplo se muestra cómo se puede usar la multiplicación de matrices para modelar la manera en que se extiende una enfermedad contagiosa. Suponga que cuatro individuos han contraído esta enfermedad. Este grupo hace contacto con seis personas de un segundo grupo. Estos contactos, llamados *contactos directos*, se pueden representar por una matriz de 4×6. Enseguida se da un ejemplo de este tipo de matrices.

Matriz de contacto directo: primero y segundo grupos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso se hace $a_{ij} = 1$ si la i-ésima persona del primer grupo hace contacto con la j-ésima persona del segundo grupo. Por ejemplo, el 1 en la posición 2,4 significa que la segunda persona del primer grupo (infectada) hizo contacto con la cuarta persona del segundo grupo. Ahora suponga que un tercer grupo de cinco personas tiene varios contactos directos con individuos del segundo grupo. Esto también se puede representar por una matriz.

Matriz de contato directo: segundo y tercer grupos

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que $b_{64} = 0$, lo que quiere decir que la sexta persona del segundo grupo no tiene contacto con la cuarta persona del tercer grupo.

Los contactos *indirectos* o *de segundo orden* entre los individuos del primero y tercer grupos se representan por la matriz de 4×5 $C = AB$. Para ver esto, observe que una persona del grupo 3 puede quedar contagiada por alguien del grupo 2, quien a su vez fue contagiada por alguien del grupo 1. Por ejemplo, como $a_{24} = 1$ y $b_{45} = 1$, se ve que, indirectamente, la quinta persona del grupo 3 tuvo contacto (a través de la cuarta persona del grupo 2) con la segunda persona del grupo 1. El número total de contactos indirectos entre la segunda persona en el grupo 1 y la quinta persona del grupo 3 está dado por

$$\begin{aligned} c_{25} &= a_{21}b_{15} + a_{22}b_{25} + a_{23}b_{35} + a_{24}b_{45} + a_{25}b_{55} + a_{26}b_{65} \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 2 \end{aligned}$$

Ahora se calcula.

Matriz de contacto indirecto. Primero y tercer grupos

$$C = AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oberve que sólo la segunda persona en el grupo 3 no tiene contactos indirectos con la enfermedad. La quinta persona de este grupo tiene 2 + 1 + 1 = 4 contactos indirectos. ◆

Se ha visto que las matrices, en general, no conmutan. El siguiente teorema muestra que la ley asociativa sí se cumple.

TEOREMA 2 **Ley asociativa para la multiplicación de matrices** Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times m$, $B = (b_{ij})$ una matriz de $m \times p$ y $C = (c_{ij})$ una matriz de $p \times q$. Entonces la **ley asociativa**

$$\boxed{A(BC) = (AB)C} \tag{5}$$

se cumple y ABC, definida por cualquiera de los lados de la ecuación (5), es una matriz de $n \times q$. ◆

La prueba de este teorema no es difícil, pero es algo tediosa. Se desarrolla mejor usando la notación de sumatoria. Por esta razón se difiere hasta el final de esta sección.

De aquí en adelante se escribirá el producto de tres matrices simplemente como ABC. Se puede hacer esto porque $(AB)C = A(BC)$; entonces se obtiene la misma respuesta independientemente de cómo se lleve a cabo la multiplicación (siempre y cuando no se conmute ninguna de las matrices).

La ley asociativa se puede extender a productos de más matrices. Por ejemplo, suponga que AB, BC y CD están definidas. Entonces

$$\boxed{ABCD = A(B(CD)) = ((AB)C)D = A(BC)D = (AB)(CD)} \tag{6}$$

Existen dos leyes distributivas para la multiplicación de matrices.

TEOREMA 3 **Leyes distributivas para la multiplicación de matrices** Si todas las sumas y todos lo productos siguientes están definidos, entonces

$$A(B + C) = AB + AC \tag{7}$$

y

$$(A + B)C = AC + BC \tag{8}$$

Las demostraciones están dadas al final de la sección.

Multiplicación de matrices como una combinación lineal de las columnas de A

Sea A una matriz de $m \times n$ y $\mathbf{x}$ un vector de $n \times 1$. Considere el producto

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

o

$$A\mathbf{x} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Observe que $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ es la primera columna de A, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$ es la segunda columna de A, y así sucesivamente. Entonces (9) se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n \tag{10}$$

El lado derecho de la expresión (10) se llama **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, . . . , $\mathbf{c}_n$. Las combinaciones lineales se estudiarán con detalle en la sección 4.4. Aquí simplemente se observa el siguiente hecho útil:

> El producto de la matriz A de $m \times n$ y el vector columna $\mathbf{x}$ es una combinación lineal de las columnas de A.

Suponga ahora que B es una matriz de $n \times p$. Sea $C = AB$ y sea $\mathbf{c}_1$ la primera columma de C. Entonces

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1} \end{pmatrix}$$

$$= b_{11}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + b_{21}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + b_{n1}\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

es igual a la combinación lineal de las columnas de A. Como esto se cumple para todas las columnas de $C = AB$, se ve que

Cada columna del producto AB es una combinación lineal de las columnas de A.

EJEMPLO 7 **Cómo escribir las columnas de *AB* como combinación lineal de las columnas de *A***

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Entonces $AB = \begin{pmatrix} -3 & -15 \\ 10 & 26 \\ 13 & 32 \end{pmatrix}$. Ahora bien

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \text{una combinación lineal de las columnas de } A.$$

y

$$\begin{pmatrix} -15 \\ 26 \\ 32 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \text{una combinación lineal de las columnas de } A.$$

✦

Multiplicación de matrices por bloques

Existen situaciones en las que es conveniente manejar las matrices como bloques de matrices más pequeñas, llamadas **submatrices**, y después multiplicar bloque por bloque en lugar de componente por componente. Resulta que la multiplicación en bloques es muy similar a la multiplicación normal de matrices.

EJEMPLO 8 Multiplicación por bloques Considere el producto

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El lector debe verificar que este producto esté definido. Ahora se hace una partición de estas matrices mediante líneas punteadas.

$$AB = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline E & F \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} G & H \\ \hline J & K \end{array}\right)$$

Existen otras maneras de formar la partición. En este caso $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, etcétera. Ahora, suponiendo que todos los productos y las sumas de matrices están definidos, se puede multiplicar normalmente para obtener

$$AB = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & H \\ J & K \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} CG + DJ & CH + DK \\ \hline EG + FJ & EH + FK \end{array}\right)$$

Ahora

$$CG = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad DJ = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -12 & 13 \end{pmatrix}$$

y

$$CG + DJ = \begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -10 & 21 \end{pmatrix}.$$

De manera similar,

$$EH = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad FK = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

y

$$EH + FK = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El lector debe verificar que $CH + DK = \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \end{pmatrix}$ y $EG + FJ = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -11 & -1 \end{pmatrix}$ de manera que

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} CG + DJ & CH + DK \\ \hline EG + FJ & EH + FK \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -7 & 13 & 13 \\ -10 & 21 & 20 \\ \hline -3 & 4 & -1 \\ -11 & -1 & -1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -7 & 13 & 13 \\ -10 & 21 & 20 \\ -3 & 4 & -1 \\ -11 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ésta es la misma respuesta que se obtiene si se multiplica AB directamente. ◆

Cuando se hace una partición de dos matrices y, como en el ejemplo 8, todos los productos de submatrices están definidos, entonces se dice que la partición es **conformante**.

EJEMPLO 9 **Dos matrices que son conmutativas** Suponga que las matrices A y B son cuadradas y que se hacen particiones conformantes de $C = \begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} I & B \\ O & I \end{pmatrix}$. Muestre que C y D son conmutativas. Aquí O denota la matriz cero e I es una matriz cuadrada que tiene la propiedad de que $AI = IA = A$ siempre que estos productos estén definidos (vea la página 99).

Solución

$$CD = \begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & B \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + A \cdot O & IB + AI \\ O \cdot I + I \cdot O & O \cdot B + I^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B + A \\ O & I \end{pmatrix}$$

en donde $I^2 = I \cdot I$. De igual manera

$$DC = \begin{pmatrix} I & B \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + B \cdot O & IA + BI \\ O \cdot I + I \cdot O & O \cdot A + I^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A + B \\ O & I \end{pmatrix}$$

Como $B + A = A + B$, $CD = DC$, es decir, las matrices son conmutativas. ◆

Para poder probar los teoremas 2 y 3 y para estudiar muchas otras partes del material de este libro es necesario usar la *notación de sumatoria*. Si el lector no está familiarizado con ella, siga leyendo. De otra manera puede ir directamente a las demostraciones de los teoremas 2 y 3.

La notación con Σ

Una suma se puede excribir† de la siguiente manera, si $N \geq M$.

$$a_M + a_{M+1} + a_{M+2} + \cdots + a_N = \sum_{k=M}^{N} a_k \qquad \textbf{(11)}$$

Signo de sumatoria

Índice dela suma

que se lee "suma de los términos a_k cuando el valor de k va de M a N". En este contexto Σ se llama **signo de sumatoria** y k se conoce como **índice de la suma.**

† El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) fue el primero en usar la letra griega Σ (sigma) para denotar una suma.

EJEMPLO 10 **Interpretación de la notación de sumatoria** Extienda la suma $\Sigma_{k=1}^{5} b_k$.

Solución Comenzando con $k = 1$ y terminando con $k = 5$, se obtiene

$$\sum_{k=1}^{5} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$ ✦

EJEMPLO 11 **Interpretación de la notación de sumatoria** Extienda la suma $\Sigma_{k=3}^{6} c_k$.

Solución Comenzando en $k = 3$ y terminando en $k = 6$, se obtiene

$$\sum_{k=3}^{6} c_k = c_3 + c_4 + c_5 + c_6$$ ✦

EJEMPLO 12 **Interpretación de la notación de sumatoria** Calcule $\Sigma_{-2}^{3} k^2$

Solución En este caso $a_k = k^2$, y k va de -2 a 3.

$$\sum_{-2}^{3} k^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$$
$$= 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 = 19$$ ✦

Nota. Como en el ejemplo 12, el índice de la sumatoria puede tomar valores enteros negativos o cero.

EJEMPLO 13 **Cómo escribir una suma usando la notación de sumatoria** Escriba la suma $S_8 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8$ usando el signo de sumatoria.

Solución Como $1 = (-1)^2, -2 = (-1)^3 \cdot 2, 3 = (-1)^4 \cdot 3, \ldots$, se tiene

$$S_8 = \sum_{k=1}^{8} (-1)^{k+1} k$$ ✦

EJEMPLO 14 **Cómo escribir el producto escalar usando la notación de sumatoria** La ecuación (1) para el producto escalar se puede escribir de manera compacta usando la notación de sumatoria:

Solución

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

La fórmula (4) para la componente ij del producto AB se puede escribir

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \tag{12}$$

◆

La notación de sumatoria tiene propiedades útiles. Por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n$$
$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

A continuación se resumen éste y otros hechos.

Hechos sobre la notación de sumatoria

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones reales y sea c un número real. Entonces

$$\sum_{k=M}^{N} ca_k = c\sum_{k=M}^{N} a_k \tag{13}$$

$$\sum_{k=M}^{N} (a_k + b_k) = \sum_{k=M}^{N} a_k + \sum_{k=M}^{N} b_k \tag{14}$$

$$\sum_{k=M}^{N} (a_k - b_k) = \sum_{k=M}^{N} a_k - \sum_{k=M}^{N} b_k \tag{15}$$

$$\sum_{k=M}^{N} a_k = \sum_{k=M}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{N} a_k \quad \text{si } M < m < N \tag{16}$$

Las pruebas de estos hechos se dejan como ejercicios (vea los problemas 87 al 89).

Ahora se usará la notación de sumatoria para probar las leyes asociativa y distributiva.

Demostración de los teoremas 2 y 3

Ley asociativa Como A es de $n \times m$ y B es de $m \times p$, AB es de $n \times p$. Entonces $(AB)C = (n \times p) \times (p \times q)$ es una matriz de $n \times q$. De manera similar, BC es de $m \times q$ y $A(BC)$ es de $n \times q$ de manera que $(AB)C$ y $A(BC)$ son ambas del mismo tamaño. Debe demostrarse que la componente ij de $(AB)C$ es igual a la componente ij de $A(BC)$. Si se define $D = (d_{ij}) = AB$, entonces

$$d_{ij} \overset{\text{de (12)}}{=} \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

La componente ij de $(AB)C = DC$ es

$$\sum_{l=1}^{p} d_{il}c_{lj} = \sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{p} a_{ik}b_{kl}c_{lj}$$

Ahora se define $E = (e_{ij}) = BC$. Entonces

$$e_{kj} = \sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj}$$

y la componente ij de $A(BC) = AE$ es

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}e_{kj} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{p} a_{ik}\, b_{kl}\, c_{lj}$$

Así, la componente ij de $(AB)C$ es igual a la componente ij de $A(BC)$. Esto demuestra la ley asociativa. ◆

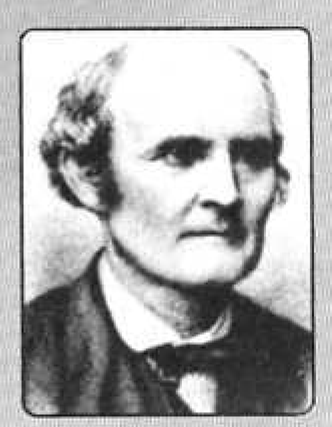
Leyes distributivas Se demuestra la primera ley distributiva [ecuación (7)]. La demostración de la segunda [ecuación (8)] es prácticamente idéntica y por lo mismo se omite. Sea A una matriz de $n \times m$ y sean B y C matrices de $m \times p$. Entonces la componente kj de $B + C$ es $b_{kj} + c_{kj}$ y la componente ij de $A(B + C)$ es

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \overset{\text{de (12)}}{=} \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kj} = \text{componente } ij \text{ de } AB \text{ más}$$

la componente ij de AC y esto demuestra la ecuación (7). ◆

Semblanza de . . .

Arthur Cayley y el álgebra de matrices



Arthur Cayley (*Library of Congress*)

El matemático inglés Arthur Cayley (1821-1895) desarrolló, en 1857, el álgebra de matrices, es decir, las reglas que indican cómo se suman y multiplican las matrices. Cayley nació en Richmond, en Surrey (cerca de Londres) y fue educado en el Trinity College, Cambridge, donde se graduó en 1842. En ese año obtuvo el primer lugar en la difícil prueba para el premio Smith. Durante un periodo de varios años estudió y ejerció la carrera de leyes, pero nunca dejó que su práctica en la abogacía interfiriera con su trabajo en matemáticas. Siendo estudiante de la barra viajó a Dublín y asistió a las conferencias de Hamilton sobre cuaterniones. Cuando se estableció la cátedra Sadlerian en Cambridge en 1863, le ofrecieron el puesto a Cayley y él lo aceptó, renunciando a un lucrativo futuro como abogado por la modesta remuneración de la vida académica. Pero fue entonces que pudo dedicar *todo* su tiempo a las matemáticas.

Cayley está clasificado como el tercer matemático más prolífico en la historia; lo sobrepasan sólo Euler y Cauchy. Comenzó a publicar siendo todavía estudiante de la Universidad en Cambridge, durante sus años de abogado publicó entre 200 y 300 artículos y continuó su copioso trabajo el resto de su larga vida. La colección masiva *Collected Mathematical Papers* de Cayley contiene 966 artículos y consta de 13 grandes volúmenes con un promedio de 600 páginas por volumen. Casi no existe un área dentro de las matemáticas puras que el genio de Cayley no haya estudiado y enriquecido.

Además de desarrollar la teoría de matrices, Cayley fue pionero en sus contribuciones a la geometría analítica, la teoría de determinantes, la geometría de n dimensiones, la teoría de curvas y superficies, el estudio de formas binarias, la teoría de funciones elípticas y el desarrollo de la teoría de invariantes.

El estilo matemático de Cayley refleja su formación legal ya que sus artículos son severos, directos, metódicos y claros. Poseía una memoria fenomenal y parecía nunca olvidar nada que hubiera visto o leído una vez. Poseía además un temperamento singularmente sereno, calmado y amable. Se le llamaba "el matemático de los matemáticos".

Cayley desarrolló una avidez poco común por la lectura de novelas. Las leía mientras viajaba, mientras esperaba que una junta comenzara y en cualquier momento que se presentara. Durante su vida leyó miles de novelas, no sólo en inglés, sino también en griego, francés, alemán e italiano. Disfrutaba mucho pintar, en especial acuarela y mostraba un marcado talento como acuarelista. También era un estudiante apasionado de la botánica y la naturaleza en general.

Cayley era, en el verdadero sentido de la tradición inglesa, un alpinista amateur e hizo viajes frecuentes al Continente para realizar caminatas y escalar montañas. Cuenta la historia que decía que la razón por la que se unió al alpinismo fue que,

aunque sentía que el ascenso era arduo y cansado, la gloriosa sensación de felicidad que lograba cuando conquistaba una cima era como la que experimentaba cuando resolvía un problema difícil de matemáticas o cuando completaba una teoría matemática intrincada, y le era más sencillo lograr esta sensación escalando.

Las matrices surgieron con Cayley, relacionadas con las transformaciones lineales del tipo

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \qquad (17)$$

donde a, b, c, d son números reales, y donde puede pensarse que son funciones que convierten al vector (x, y) en el vector (x', y'). Las transformaciones se estudiarán con detalle en el capítulo 5. En este momento se observa que la transformación (17) está completamente determinada por los cuatro coeficientes a, b, c, d y por lo tanto pueden simbolizarse por el arreglo matricial cuadrado

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

al que se ha dado el nombre de matriz de 2×2. Como dos transformaciones del tipo de (17) son idénticas si y sólo si tienen los mismos coeficientes, Cayley definió que dos matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

eran iguales si y sólo si $a = e$, $b = f$, $c = g$ y $d = h$.

Ahora suponga que la transformación (17) va seguida de la transformación

$$\begin{aligned} x'' &= ex' + fy' \\ y'' &= gx' + hy' \end{aligned} \qquad (18)$$

Entonces

$$x'' = e(ax + by) + f(cx + dy) = (ea + fc)x + (eb + fd)y$$

y

$$y'' = g(ax + by) + h(cx + dy) = (ga + hc)x + (gb + hd)y$$

Esto llevó a Cayley a la siguiente definición para el producto de dos matrices:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$$

que es, por supuesto, un caso especial de la definición general del producto de matrices que se dio en la página 64.

Es interesante observar cómo en matemáticas, observaciones muy sencillas, pueden llevar a definiciones y teoremas importantes.

PROBLEMAS 1.6

Autoevaluación

I. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para la multiplicación de las matrices A y B?

a. Se puede realizar sólo si A y B son matrices cuadradas.

b. Cada elemento c_{ij} es el producto de a_{ij} y b_{ij}.

c. $AB = BA$.

d. Se puede realizar sólo si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B.

II. ¿Cuál de los siguientes sería el tamaño de la matriz producto AB si se multiplica la matriz A de 2×4 por la matriz B de 4×3?

a. 2×3 **b.** 3×2 **c.** 4×4

d. Este producto no se puede calcular.

III. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para las matrices A y B si AB es un vector columna?

a. B es un vector columna.

b. A es un vector renglón.

c. A y B son matrices cuadradas.

d. El número de renglones de A debe ser igual al número de columnas de B.

IV. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el producto AB es cierta si A es una matriz de 4×5?

a. B debe tener cuatro renglones y el resultado tendrá cinco columnas.

b. B debe tener cinco columnas y el resultado será una matriz cuadrada.

c. B debe tener cuatro columnas y el resultado tendrá cinco renglones.

d. B debe tener cinco renglones y el resultado tendrá cuatro renglones.

En los problemas 1 al 7 calcule el producto escalar de los dos vectores.

1. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. $(1, 2, -1, 0)$; $(3, -7, 4, -2)$

3. $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

4. $(8, 3, 1)$; $(7, -4, 3)$

5. (a, b); (c, d)

6. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$

7. $(-1, -3, 4, 5)$; $(-1, -3, 4, 5)$

8. Sea **a** un n-vector. Pruebe que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$.

9. Encuentre las condiciones sobre un vector **a** tales que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$.

Respuestas a la autoevaluación

I. d **II.** a **III.** a **IV.** d

En los problemas 10 al 14 realice las operaciones indicadas con $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

10. $(2\mathbf{a}) \cdot (3\mathbf{b})$

11. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

12. $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$

13. $(2\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{c} - 5\mathbf{a})$

14. $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (3\mathbf{b} - 4\mathbf{a})$

En los problemas 15 al 29 realice los cálculos indicados.

15. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ -6 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $a, b, c, d, e, f, g, h, j$, son números reales

30. Encuentre una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

***31.** Sean a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} números reales dados tales que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Encuentre los números b_{11}, b_{12}, b_{21} y b_{22} tales que $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

32. Verifique la ley asociativa para la multiplicación de las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

33. Igual que en el ejemplo 6, suponga que un grupo de personas ha contraído una enfermedad contagiosa. Estas personas tienen contacto con un segundo grupo que, a su vez, tiene contacto con un tercer grupo. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ representa los contactos entre el grupo contagioso y los miembros del grupo 2, y si

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

representa los contactos entre los grupos 2 y 3, a) ¿Cuántas personas hay en cada grupo? b) Encuentre la matriz de contactos indirectos entre los grupos 1 y 3.

34. Conteste las preguntas del problema 33 para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

VECTORES ORTOGONALES

Se dice que dos vectores **a** y **b** son **ortogonales** si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. En los problemas 35 al 39 determine cuáles pares de vectores son ortogonales†.

35. $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

38. $(1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)$

39. $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \\ c \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \\ e \\ 0 \end{pmatrix}$

40. Determine el número α tal que $(1, -2, 3, 5)$ es ortogonal a $(-4, \alpha, 6, -1)$.

41. Determine todos los números α y β tales que los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2\beta \\ 7 \end{pmatrix}$ son ortogonales.

42. Demuestre el teorema 1 usando la definición de producto escalar.

† Los vectores [illegible] capítulos 3 y 4.

43. Un fabricante de joyería sobre diseño tiene órdenes por dos anillos, tres pares de aretes, cinco prendedores y un collar. El fabricante estima que le lleva 1 hora de mano de obra hacer un anillo, $1\frac{1}{2}$ horas hacer un par de aretes, $\frac{1}{2}$ hora un prendedor y 2 horas un collar.

a. Exprese las órdenes del fabricante como un vector renglón.

b. Exprese los requerimientos en horas para los distintos tipos de joyas como un vector columna.

c. Utilice el producto escalar para calcular el número total de horas que requerirá para terminar las órdenes.

44. Un turista regresó de un viaje por Europa con moneda extranjera de las siguientes denominaciones: 1000 chelines austriacos, 20 libras inglesas, 100 francos franceses, 5000 liras italianas y 50 marcos alemanes. En dólares, un chelín valía \$0.055, la libra \$1.80, el franco \$0.20, la lira \$0.001 y el marco \$0.40.

a. Exprese la cantidad de cada tipo de moneda por medio de un vector renglón.

b. Exprese el valor de cada tipo de moneda en dólares por medio de un vector columna.

c. Utilice el producto escalar para calcular cuántos dólares valía el dinero extranjero del turista.

45. Una compañía paga un salario a sus ejecutivos y les da un porcentaje de sus acciones como un bono anual. El año pasado el presidente de la compañía recibió \$80 000 y 50 acciones, se pagó a cada uno de los vicepresidentes \$45 000 y 20 acciones y el tesorero recibió \$40 000 y 10 acciones.

a. Exprese los pagos a los ejecutivos en dinero y acciones como una matriz de 2×3.

b. Exprese el número de ejecutivos de cada nivel como un vector columna.

c. Utilice la multiplicación de matrices para calcular la cantidad total de dinero y el número total de acciones que pagó la compañía a los ejecutivos el año pasado.

46. La siguiente tabla contiene ventas, utilidades brutas por unidad y los impuestos por unidad sobre las ventas de una compañía grande:

	Producto					
Mes	**Artículo vendido I**	**II**	**III**	**Artículo**	**Utilidad unitaria (en cientos de dólares)**	**Impuestos unitarios (en cientos de dólares)**
Enero	4	2	20	I	3.5	1.5
Febrero	6	1	9	II	2.75	2
Marzo	5	3	12	III	1.5	0.6
Abril	8	2.5	20			

Encuentre una matriz que muestre la utilidades y los impuestos totales para cada mes.

47. Sea A una matriz cuadrada. Entonces A^2 se define simplemente como AA. Calcule $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}^2$.

48. Calcule A^2 si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

49. Calcule A^3 si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

50. Calcule A^2, A^3, A^4 y A^5 donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

51. Calcule A^2, A^3, A^4 y A^5 donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

52. Una matriz A de $n \times n$ tiene la propiedad de que AB es la matriz cero para cualquier matriz B de $n \times n$. Pruebe que A es la matriz cero.

53. Una **matriz de probabilidades** es una matriz cuadrada que tiene dos propiedades: *i*) todos sus elementos son no negativos (≥ 0) y *ii*) la suma de los elementos en cada renglón es 1. Las siguientes son matrices de probabilidades:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Pruebe que PQ es una matriz de probabilidades.

***54.** Sea P una matriz de probabilidades. Pruebe que P^2 es una matriz de probabilidades.

****55.** Sean P y Q dos matrices de probabilidades del mismo tamaño. Pruebe que PQ es una matriz de probabilidades.

56. Pruebe la fórmula (6) usando la ley asociativa [ecuación (5)].

***57.** Un torneo de tenis se puede organizar de la siguiente manera. Cada uno de los n tenistas juega contra todos los demás y se registran los resultados en una matriz R de $n \times n$ de la siguiente manera:

$$R_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el tenista } i \text{ le gana al tenista } j \\ 0 & \text{si el tenista } i \text{ pierde contra el tenista } j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Después se asigna al tenista i la calificación

$$S_i = \sum_{j=1}^{N} R_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} (R^2)_{ij} \dagger$$

† $(R^2)_{ij}$ es la componente ij de la matriz R^2.

a. Para un torneo entre cuatro tenistas

$$R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

Clasifique a los tenistas según sus calificaciones.

b. Interprete el significado de la calificación.

58. Sea O una matriz cero de $m \times n$ y sea A una matriz $n \times p$. Demuestre que $OA = O_1$, donde O_1 es la matriz cero de $m \times p$.

59. Verifique la ley distributiva [ecuación (7)] para las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\3&-1&0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2&7\\-1&4\\6&0\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}-1&2\\3&7\\4&1\end{pmatrix}$$

En los problemas 60 al 64 multiplique las matrices usando los bloques indicados.

60. $\left(\begin{array}{cc|cc}2&3&1&5\\0&1&-4&2\\\hline 3&1&6&4\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}1&4\\-1&0\\\hline 2&3\\1&5\end{array}\right)$

61. $\left(\begin{array}{c}1\\\hline 6\\\hline 2\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c|c}3&7&1&5\end{array}\right)$

62. $\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-1&1\\2&1&-3&4\\\hline -2&1&4&6\\0&2&3&5\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc}2&4&1&6\\3&0&-2&5\\\hline 2&1&-1&0\\-2&-4&1&3\end{array}\right)$

63. $\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline 0&0&a&b\\0&0&c&d\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc}e&f&0&0\\g&h&0&0\\\hline 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)$

64. $\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&2&3&1\\0&1&5&2&6\\\hline 0&0&-1&2&4\\0&0&2&1&3\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc}-1&1&4\\0&4&-3\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)$

65. Sea $A=\begin{pmatrix}I&O\\C&I\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}I&O\\D&I\end{pmatrix}$. Si se hace una partición conformante de A y B, demuestre que A y B conmutan. Para esto I está definida en el ejemplo 9.

En los problemas 66 al 73 evalúe las sumas dadas.

66. $\sum_{k=1}^{4} 2k$ **67.** $\sum_{i=1}^{3} i^3$ **68.** $\sum_{k=0}^{6} 1$ **69.** $\sum_{k=1}^{8} 3^k$

70. $\sum_{i=2}^{5} \frac{1}{1+i}$ **71.** $\sum_{j=5}^{7} \frac{2j+3}{j-2}$ **72.** $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} ij$ **73.** $\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=2}^{4} k^2 j^3$

En los poblemas 74 al 86 escriba cada suma usando la notación de sumatoria.

74. $1 + 2 + 4 + 8 + 16$

75. $1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243$

76. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8} + \cdots + \frac{n}{n+1}$

77. $1 + 2^{1/2} + 3^{1/3} + 4^{1/4} + 5^{1/5} + \cdots + n^{1/n}$

78. $1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15} + x^{18} + x^{21}$

79. $-1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^7} - \frac{1}{a^8} + \frac{1}{a^9}$

80. $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 7 \cdot 9 + 9 \cdot 11 + 11 \cdot 13 + 13 \cdot 15 + 15 \cdot 17$

81. $2^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 6 + 4^2 \cdot 8 + 5^2 \cdot 10 + 6^2 \cdot 12 + 7^2 \cdot 14$

82. $a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{22} + a_{23}$

83. $a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} + a_{31} + a_{32}$

84. $a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} + a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44}$

85. $a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + a_{34}b_{42} + a_{35}b_{52}$

86. $a_{21}b_{11}c_{15} + a_{21}b_{12}c_{25} + a_{21}b_{13}c_{35} + a_{21}b_{14}c_{45}$
$+ a_{22}b_{21}c_{15} + a_{22}b_{22}c_{25} + a_{22}b_{23}c_{35} + a_{22}b_{24}c_{45}$
$+ a_{23}b_{31}c_{15} + a_{23}b_{32}c_{25} + a_{23}b_{33}c_{35} + a_{23}b_{34}c_{45}$

87. Pruebe la fórmula (14) extendiendo los términos de

$$\sum_{k=M}^{N} (a_k + b_k)$$

88. Pruebe la fórmula (15).

[*Sugerencia:* Utilice (13) para demostrar que $\sum_{k=M}^{N} (-a_k) = -\sum_{k=M}^{N} a_n$ Después use (14).]

89. Pruebe la fórmula (16).

MANEJO DE CALCULADORA

La multiplicación de matrices (de la que el producto escalar es un caso especial) se puede realizar con facilidad tanto en la TI-85 como en la CASIO fx-7700 GB.

TI-85

Esto se puede hacer de dos maneras sencillas. Si las matrices A y B están ya en la calculadora, entonces se oprime la secuencia de teclas

ALPHA

ENTER

y se obtiene el producto AB en la pantalla.

Si el producto no está definido, la calculadora deplegará el mensaje

ERROR 14 UNDEFINED

De otra manera, se puede simplemente introducir las matrices. Por ejemplo,

[[1,2][3,4]][[5,6][7,8]] ENTER da como resultado [[19 22]]
[43 50]]

CASIO fx-7700 GB

Se introducen las matrices A y B. Después se presiona MODE 0 F5 . Si el producto está indefinido se desplegará el mensaje Dim ERROR.

En los problemas 90 al 92 utilice una calculadora para obtener cada producto.

90. $\begin{pmatrix} 1.23 & 4.69 & 5.21 \\ -1.08 & -3.96 & 8.57 \\ 6.28 & -5.31 & -4.27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9.61 & -2.30 \\ -8.06 & 0.69 \\ 2.67 & -5.23 \end{pmatrix}$

91. $\begin{pmatrix} 125 & 216 & 419 \\ 383 & 516 & 237 \\ 209 & 855 & 601 \\ 403 & 237 & 506 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 73 & 36 \\ 21 & 28 \\ 49 & 67 \end{pmatrix}$

92. $\begin{pmatrix} 23.2 & 56.3 & 19.6 & -31.4 \\ 18.9 & -9.6 & 17.4 & 51.2 \\ 30.8 & -17.9 & -14.4 & 28.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.071 & 0.068 \\ 0.051 & -0.023 \\ -0.011 & -0.082 \\ 0.053 & 0.065 \end{pmatrix}$

93. En el problema 55 se le pidió que demostrara que el producto de dos matrices de probabilidades es una matriz de probabilidad. Sea

$$P = \begin{pmatrix} 0.23 & 0.16 & 0.57 & 0.04 \\ 0.15 & 0.09 & 0.34 & 0.42 \\ 0.66 & 0.22 & 0.11 & 0.01 \\ 0.07 & 0.51 & 0.20 & 0.22 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 0.112 & 0.304 & 0.081 & 0.503 \\ 0.263 & 0.015 & 0.629 & 0.093 \\ 0.402 & 0.168 & 0.039 & 0.391 \\ 0.355 & 0.409 & 0.006 & 0.230 \end{pmatrix}$$

a. Muestre que P y Q son matrices de probabilidades.
b. Calcule PQ y muestre que es una matriz de probabilidades.

94. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule A^2, A^5, A^{10}, A^{50} y A^{100}.

[*Sugerencia:* en la TI-85, A ^n calculará A^n para $0 \le n \le 255$; en la CASIO fx-7700 GB, debe introducirse A a la memoria A y a la memoria B. Después se oprime MODE 0 F5 y A^2 se desplegará en la memoria C. Se oprime F1 y A^2 pasa a la memoria A. Después el producto AB da como resultado $A^2B = A^3$, y así sucesivamente. De otra manera, se almacena A^2 en B también y AB da como resultado $A^2A^2 = A^4$.]

95. Sea $A = \begin{pmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Con base en los cálculos del problema 94, adivine la forma de las componentes de la diagonal de A^n. Aquí, x, y y z denotan números reales.

MATLAB 1.6

Información de MATLAB

Una matriz producto AB se forma mediante **A*B**.
Una potencia entera de una matriz, A^n, se encuentra con **A^n**, donde n tiene un valor asignado previamente.

Se repiten algunos comandos básicos para generar matrices aleatorias: para una matriz aleatoria de $n \times m$ con elementos entre $-c$ y c, **A = c*(2*rand(n,m)–1);** para una matriz aleatoria de $n \times m$ con elementos enteros entre $-c$ y c, **B = round(c*(2*rand(n,m)–1)).** Para generar matrices con elementos complejos, se generan A y B como se acaba de indicar y se hace **C = A + i*B.** Si un problema pide que se generen matrices aleatorias con ciertos elementos, genere matrices tanto reales como complejas.

1. Introduzca cualesquiera dos matrices A de 3×4 y B de 4×2. Encuentre **A*B** y **B*A**. Comente sobre los resultados.
2. Genere dos matrices aleatorias, A y B, con elementos entre –10 y 10. Encuentre AB y BA. Repita el proceso para al menos siete pares de matrices A y B. ¿Cuántos pares satisfacen $AB = BA$? ¿Qué puede concluir sobre la probabilidad de que $AB = BA$?
3. Introduzca las matrices A, B, **x** y **z** siguientes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -23 & 0 \\ 0 & 4 & -12 & 4 \\ 7 & 5 & -1 & 1 \\ 7 & 8 & -10 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 34 \\ 24 \\ 15 \\ 33 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   a. Muestre que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $A\mathbf{z} = \mathbf{0}$.
   b. Con base en sus conocimientos de la manipulación algebraica normal, y usando los resultados del inciso a), ¿qué podría decir que sería igual $A(\mathbf{x} + s\mathbf{z})$, donde s es cualquier escalar? Pruebe su conclusión calculando $A(\mathbf{x} + s\mathbf{z})$ para al menos cinco escalares s diferentes.
4. a. Genere dos matrices aleatorias con elementos enteros, A y B, tales que el producto AB esté definido. Modifique B de manera que tenga dos columnas iguales. (Por ejemplo, **B(:,2) = B(:,3)**.)
   b. Encuentre AB y vea sus columnas. ¿Qué puede decir sobre las columnas de AB si B tiene dos columnas iguales?
   c. Pruebe su conclusión repitiendo las instrucciones anteriores para otros tres pares de matrices A y B. (No elija sólo matrices cuadradas.)
   d. (*Lápiz y papel*) Pruebe su conclusión usando la definición de multiplicación de matrices.
5. Genere una matriz aleatoria A de 5×6 con elementos entre –10 y 10 y genere un vector aleatorio **x** de 6×1 con elementos entre –10 y 10. Encuentre

   A*x – (x(1)*A(:,1) + · · · + x(m)*A(:,m)).

   Repita el proceso para otros pares de A y **x**. ¿Qué relación tiene esto con la expresión (10) de esta sección?
6. a. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Suponga que $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$.

   Establezca el sistema de ecuaciones, con incógnitas x_1 a x_4, que surge al hacer $AB = BA$.

Verifique que el sistema sea homogéneo con matriz de coeficientes

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}$$

b. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, se quiere encontrar una matriz B tal que $AB = BA$.

i. Introduzca la matriz R anterior y obtenga x_1, x_2, x_3 y x_4 del sistema homogéneo con matriz de coeficientes R. Explique por qué hay un número infinito de soluciones con un valor arbitrario para una variable.

ii. Encuentre **rat(rref(R),'s')** y utilice esto para elegir un valor para la variable arbitraria de manera que x_i sea un entero. Si está usando MATLAB 4.0, dé los comandos **format rat** seguido de **rref(R).**

iii. Introduzca la matriz $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ que resulta y verifique que $AB = BA$.

iv. Repita *iii*) para otra elección de la variable arbitraria.

c. Repita el proceso anterior para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

d. Repita el proceso anterior para una matriz A de 2×2 de su elección.

7. Genere un par de matrices aleatorias, A y B de 2×2 con elementos entre -10 y 10. Encuentre $C = (A + B)^2$ y $D = A^2 + 2AB + B^2$. Compare C y D (encuentre $C - D$). Genere dos pares más de matrices de 2×2 y repita lo anterior. Introduzca el par de matrices, A y B, generadas con MATLAB en el problema 6 b) de esta sección y encuentre $C - D$ como antes. Introduzca el par de matrices, A y B, generadas con MATLAB en el problema 6 c) de esta sección y encuentre $C - D$. Con esta evidencia, ¿qué puede concluir sobre la afirmación $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Pruebe su conclusión.

8. **a.** Introduzca **A = round(10*(2*rand (6,5)–1))**. Dé **E = [1 0 0 0 0 0]** y encuentre **E*A**. Sea **E = [0 0 1 0 0 0]** y encuentre **E*A**. Describa cómo se compone EA de partes de A y la manera en que esto depende de la posición de los elementos iguales a 1 en la matriz E.

b. Sea **E = [2 0 0 0 0 0]**; encuentre **E*A**. Sea **E = [0 0 2 0 0 0]**; encuentre **E*A**. Describa cómo se compone EA de partes de A y la manera en que esto depende de la posición del elemento 2 en la matriz E.

c. **i.** Sea **E = [1 0 1 0 0 0]** y encuentre **E*A**. Describa cómo se compone EA de partes de A y la manera en que la relación depende de la posición de los elementos 1 en la matriz E.

ii. Sea **E = [2 0 1 0 0 0]** y encuentre **E*A**. Describa cómo se compone EA de partes de A y la manera en que la relación depende de la posición de los elementos distintos de cero en E.

d. Suponga que A es una matriz de $n \times m$ y E es de $1 \times n$, donde el k-ésimo elemento de E es igual a algún número p. De a) y b), formule una conclusión sobre la relación entre A y EA. Pruebe su conclusión generando una matriz aleatoria A (para alguna elección de n y m), formando dos matrices E diferentes (para alguna elección de k y p), y encontrando EA para cada E. Repita esto para otra matriz A.

e. Suponga que A es una matriz de $n \times m$ y E es de $1 \times n$, donde el k-ésimo elemento de E es igual a algún número p y el j-ésimo elemento de E es igual a algún número q. Del

inciso c), formule una conclusión sobre la relación entre A y EA. Pruebe su conclusión generando una matriz aleatoria A, formando dos matrices diferentes E de la forma descrita y encontrando EA para cada E. Repita lo anterior para otra matriz A.

f. Suponga que A es de $n \times m$ y que F es de $m \times 1$, donde el k-ésimo elemento de F es igual a algún número p y el j-ésimo elemento de F es igual a algún número q. Considere AF. Realice un experimento como el anterior para determinar una conclusión sobre la relación entre AF y A.

9. Matriz triangular superior

a. Sean A y B cualesquiera dos matrices aleatorias de 3×3, sea **UA = triu(A)** y **UB = triu(B)**. El comando **triu** forma matrices triangulares superiores. Encuentre **UA*UB**. ¿Qué propiedad tiene el producto? Repita para otros tres pares de matrices aleatorias de $n \times n$, usando diferentes valores de n.

b. (*Lápiz y papel*) A partir de sus observaciones escriba una conclusión sobre el producto de dos matrices triangulares superiores. Pruebe su conclusión usando la definición de multiplicación de matrices.

c. ¿Qué concluiría sobre el producto de dos matrices triangulares inferiores? Pruebe su conclusión para al menos tres pares de matrices triangulares inferiores. [*Sugerencia:* Use **tril(A)** y **tril(B)** para generar matrices triangulares inferiores a partir de las matrices aleatorias A y B.]

10. Matrices nilpotentes Se dice que una matriz A diferente de cero es **nilpotente** si existe un entero k tal que $A^k = 0$. El **índice de nilpotencia** se define como el entero más pequeño para el que $A^k = 0$.

a. Genere una matriz aleatoria A de 5×5. Sea **B = triu(A,1)**. ¿Qué forma tiene B? Compare B^2, B^3, etcétera; demuestre que B es nilpotente y encuentre su índice de nilpotencia.

b. Repita las instrucciones del inciso a) para **B = triu(A,2)**.

c. Genere una matriz aleatoria A de 7×7. Repita los incisos a) y b) usando esta A.

d. Con la experiencia adquirida en las partes a), b) y c) (y más investigación sobre el comando **B = triu(A,j)**, donde j es un entero), genere una matriz C de 6×6 que sea nilpotente con un índice de nilpotencia igual a 3.

11. Matrices por bloques Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, entonces $AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$.

Explique cuándo es cierto este patrón si $a, b, \ldots, h$ son matrices en lugar de números.

Genere ocho matrices de 2×2, A, B, C, D, E, F, G y H. Encuentre **AA = [A B; C D]** y **BB = [E F; G H]**. Encuentre **AA*BB** y compárela con **K = [A*E+B*G A*F+B*H; C*E+D*G C*F+D*H]** (es decir, encuentre **AA*BB − K**.) Repita para otros dos conjuntos de matrices $A, B, \ldots, H$.

12. Producto exterior Genere una matriz aletoria A de 3×4 y una matriz aleatoria B de 4×5. Calcule

$$(\text{col } 1\ A)(\text{row } 1\ B) + (\text{col } 2\ A)(\text{row } 2\ B) + \cdots + (\text{col } 4\ A)(\text{row } 4\ B)$$

y etiquete esta expresión como D. Encuentre $D - AB$. Describa la relación entre D y AB. Repita esto para una matriz aleatoria A de tamaño 5×5 y una matriz aleatoria B de tamaño 5×6. (En este caso la suma para calcular D implica la suma de cinco productos.)

13. **Matrices de contacto** Considere cuatro grupos de personas: el grupo 1 consiste en $A1$, $A2$ y $A3$, el grupo 2 consiste en 5 personas $B1$ a $B5$, el grupo 3 consta de 8 personas $C1$ a $C8$, y el grupo 4 de 10 personas $D1$ a $D10$.
   a. Dada la siguiente información, introduzca las tres matrices de contacto directo. (Vea en el problema 2 de MATLAB de la sección 1.5 una manera eficiente de introducir estas matrices.)

   Contactos:

   ($A1$ con $B1$, $B2$) ($A2$ con $B2$, $B3$) ($A3$ con $B1$, $B4$, $B5$)
   ($B1$ con $C1$, $C3$, $C5$) ($B2$ con $C3$, $C4$, $C7$)
   ($B3$ con $C1$, $C5$, $C6$, $C8$) ($B4$ con $C8$) ($B5$ con $C5$, $C6$, $C7$)
   ($C1$ con $D1$, $D2$, $D3$) ($C2$ con $D3$, $D4$, $D6$) ($C3$ con $D8$, $D9$, $D10$)
   ($C4$ con $D4$, $D5$, $D7$) ($C5$ con $D1$, $D4$, $D6$, $D8$) ($C6$ con $D2$, $D4$)
   ($C7$ con $D1$, $D5$, $D9$) ($C8$ con $D1$, $D2$, $D4$, $D6$, $D7$, $D9$, $D10$)

   b. Encuentre la matriz de contacto indirecto para los contactos del grupo 1 con el grupo 4. ¿Cuáles elementos son cero? ¿Qué significa esto? Interprete el elemento (1, 5) y el (2, 4) de esta matriz de contacto indirecto.
   c. ¿Qué persona del grupo 4 tiene más contactos indirectos con el grupo 1? ¿Qué persona tiene menos contactos? ¿Qué persona del grupo 1 es la "más peligrosa" (por contagiar la enfermedad) para las personas del grupo 4? ¿Por qué?

   [*Sugerencia:* Existe una manera de usar la multiplicación de matrices para calcular las sumas de renglón y columna. Utilice los vectores **d = ones(10,1)** y **e = ones(1,3)**. Aquí el comando **ones(n,m)** produce una matriz de tamaño $n \times m$, en donde todos los elementos son iguales a 1.]

14. **Cadena de Markov** Una empresa que hace investigaciones de mercado está estudiando los patrones de compra para tres productos competidores. La empresa ha determinado el porcentaje de residentes de casas que cambiarían de un producto a otro después de un mes. (Suponga que cada residente compra uno de estos tres productos y que los porcentajes no cambian de un mes a otro.) Esta información se presenta en forma de matriz:

   P_{ij} = porcentaje que cambia *del* producto j *al* producto i después de 1 mes

   $$P = \begin{pmatrix} .8 & .2 & .05 \\ .05 & .75 & .05 \\ .15 & .05 & .9 \end{pmatrix}$$ P se llama **matriz de transición.**

   Por ejemplo, $P_{12} = .2$ significa que el 20% de los residentes que compran el producto 2 cambian al producto 1 después de un mes y $P_{22} = .75$ significa que 75% de los residentes que compraban el producto 2 continúan comprándolo después de un mes. Suponga que existe un total de 30 000 residentes.
   a. (*Lápiz y papel*) Interprete los otros elementos de P.
   b. Sea $\mathbf{x}$ una matriz de 3×1, donde x_k = el número de residentes que compran el producto k. ¿Cuál es la interpretación de $P\mathbf{x}$? ¿Y de $P^2\mathbf{x} = P(P\mathbf{x})$?
   c. Suponga incialmente que

   $$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10\,000 \\ 10\,000 \\ 10\,000 \end{pmatrix}$$

Encuentre $P^n\mathbf{x}$ para $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$ y 50. Describa el comportamiento de los vectores $P^n\mathbf{x}$ conforme n crece. ¿Cómo puede interpretarse esto?

d. Suponga incialmente que

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30\,000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Repita las instrucciones anteriores. Compare los resultados de c) y d).

e. Elija su propio vector incial para $\mathbf{x}$, en donde las componentes de $\mathbf{x}$ sumen 30 000. Repita las instrucciones y haga una comparación con los resultados anteriores.

f. Calcule P^n y $30\,000P^n$ para los valores de n dados antes. ¿Qué observa sobre las columnas de P^n? ¿Cuál es la relación de las columnas de $30\,000P^n$ y los resultados anteriores de este problema?

g. Suponga que una agencia de renta de automóviles tiene tres oficinas. Un auto rentado en una oficina puede ser entregado en cualquiera de ellas. Suponga que

$$P = \begin{pmatrix} .8 & .1 & .1 \\ .05 & .75 & .1 \\ .15 & .15 & .8 \end{pmatrix}$$

es una matriz de transición tal que P_{ij} = porcentaje de autos rentados en la oficina j y entregados en la oficina i después de un periodo. Suponga que se tiene un total de 1000 automóviles. Según sus observaciones en los incisos anteriores de este problema, encuentre la distribución a largo plazo de los autos, es decir, el número de autos que habrá en cada oficina a la larga. ¿Cómo puede usar esta información una oficina de renta de automóviles?

PROBLEMA PROYECTO

15. Matriz de población Una población de peces está dividida en cinco grupos de edad en donde el grupo 1 representa a los bebés y el grupo 5 al grupo de mayor edad. La matriz S siguiente representa las tasas de nacimiento y supervivencia:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ .4 & .2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & .2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & .2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .4 & .1 \end{pmatrix}$$

s_{1j} = número de peces que nacen por cada pez en el grupo j en un año
s_{ij} = porcentaje de peces en el grupo j que sobrevive y pasa al grupo i, donde $i > 1$

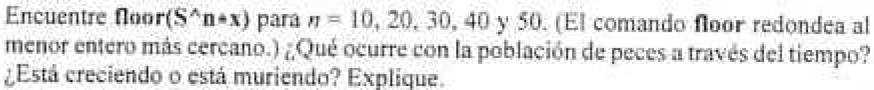
Por ejemplo, $s_{13} = 2$ dice que cada pez del grupo 3 tiene 2 bebés en un año y $s_{21} = .4$ dice que el 40% de los peces en el grupo 1 sobrevive al grupo 2 un año después.

a. (*Lápiz y papel*) Interprete los otros elementos de S.

b. (*Lápiz y papel*) Sea $\mathbf{x}$ la matriz de 5×1 tal que x_k = número de peces en el grupo k. Explique por qué $S^2\mathbf{x}$ representa el número de peces en cada grupo 2 años más tarde.

c. Sea

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5\,000 \\ 10\,000 \\ 20\,000 \\ 20\,000 \\ 5\,000 \end{pmatrix}$$



Encuentre **floor(S^n*x)** para n = 10, 20, 30, 40 y 50. (El comando **floor** redondea al menor entero más cercano.) ¿Qué ocurre con la población de peces a través del tiempo? ¿Está creciendo o está muriendo? Explique.

d. Los cambios en las tasas de nacimiento y supervivencia pueden afectar el crecimiento de la población. Cambie s_{13} de 2 a 1 y repita los comandos del inciso c). Describa lo que parece ocurrir con la población. Cambie s_{13} otra vez a 2 y s_{32} a .3 y repita los comandos del inciso c). Describa lo que parece ocurrir con la población.

e. (*Lápiz y papel*) Suponga que se tiene interés en cosechar esta población de peces. Sea **h** el vector de 5 × 1, en donde h_j = número de peces cosechados del grupo j al final del año. Argumente por qué **u = S*x– h** proporciona el número de peces que se tienen al final del año después de la cosecha y luego por qué el número de peces al final de 2 años después de la cosecha está dado por **w = S*u–h**.

f. Cambie s_{13} otra vez a 2 y s_{32} otra vez a .5. Suponga que se decide cosechar sólo peces maduros, es decir, peces del grupo 5. Se examinarán las posibilidades de cosecha a través de un periodo de 15 años. Sea **h = [0;0;0;0;2000]**. Para demostrar que ésta no es una cosecha que se pueda seguir, dé los comandos

u = S*x–h
u = S*u–h

Repita el último comando (con la flecha hacia arriba) hasta que obtenga un número negativo de peces después de una cosecha. ¿Durante cuántos años se puede recoger esta cantidad?

g. Experimente con otras cosechas del grupo 5 para encontrar la cantidad máxima de peces que se pueden sacar en un año dado con el fin de sostener este nivel de cosecha durante 15 años. (Introduzca **h = [0;0;0;0;n]** para un número n y repita los comandos del inciso f) según sea necesario para representar 15 años de cosecha.) Escriba una descripción de su experimento y de sus resultados.

h. Continúe el experimento para ver si puede encontrar un vector **h** que represente las cosechas de los grupos 4 y 5 que permitirían que cada año se cosecharan más peces (y que se sostuviera la cosecha durante 15 años). Escriba una descripción de su experimento y de sus resultados.

1.7. MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En la sección 1.3, página 16, se estudiaron los siguientes sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (1)$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

la matriz de coeficientes, **x** el vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y **b** el vector $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Como A es una matriz de $m \times n$, y x es una matriz de $n \times 1$ el producto matricial $A\mathbf{x}$ es una matriz de $m \times 1$. No es difícil ver que el sistema (1) se puede escribir como

Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2}$$

EJEMPLO 1 **Cómo escribir un sistema mediante su representación matricial** Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{3}$$

(Vea el ejemplo 1.3.1 en la página 7.) Esto se puede escribir como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$.

◆

Es evidentemente más sencillo escribir el sistema (1) en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Existen además muchas otras ventajas. En la sección 1.8 se verá la rapidez con que se puede resolver un sistema cuadrado si se conoce una matriz llamada la *inversa* de A. Aún sin ella, como ya se vio en la sección 1.3, es mucho más sencillo escribir los cálculos usando una matriz aumentada.

Si $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ es el vector cero de $m \times 1$, entonces el sistema (1) es homogéneo (vea la sección 1.4) y se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$ forma matricial de un sistema de ecuaciones homogéneo

Existe una relación fundamental entre los sistemas homogéneos y los no homogéneos. Sea A una matriz $m \times n$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ (m ceros)

El sistema lineal no homogéneo general se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{4}$$

Sistema homogéneo asociado

Con A y $\mathbf{x}$ dados en (4) y $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, un **sistema homogéneo asociado** se define como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{5}$$

TEOREMA 1 Sean $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ soluciones al sistema no homogéneo (4). Entonces su diferencia, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, es una solución al sistema homogéneo relacionado (5).

Demostración

Por la ley distributiva (7) en la página 69

$$A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$ ◆

COROLARIO Sea $\mathbf{x}$ una solución particular al sistema no homogéneo (4) y sea $\mathbf{y}$ otra solución a (4). Entonces existe una solución $\mathbf{h}$ al sistema homogéneo (5) tal que

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h} \tag{6}$$

Demostración Si $\mathbf{h}$ está definida por $\mathbf{h} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, entonces $\mathbf{h}$ es una solución de (5) por el teorema 1 y $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h}$. ◆

El teorema 1 y su corolario son muy útiles. Establecen que

> Con el fin de encontrar todas las soluciones al sistema no homogéneo (4), es suficiente encontrar *una* solución a (4) y todas las soluciones al sistema homogéneo asociado (5).

Observación. Un resultado muy similar se cumple para las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas (vea los problemas 23 y 24). Una de las bondades de las matemáticas es que temas en apariencia muy diferentes tienen una fuerte interrelación.

EJEMPLO 2 **Cómo escribir un número infinito de soluciones como una solución particular a un sistema no homogéneo más las soluciones al sistema homogéneo** Encuentre todas las soluciones al sistema no homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 5 \\ -x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= -1 \end{aligned}$$

usando el resultado anterior.

Solución Primero, se encuentra una solución mediante reducción por renglones:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 8 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 13 & 4 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las ecuaciones correspondientes a los primeros dos renglones del último sistema son

$$x_1 = 4 - 13x_3 \quad \text{y} \quad x_2 = -1 + 7x_3$$

con lo que las soluciones son

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (4 - 13x_3, -1 + 7x_3, x_3) = \mathbf{x_p} + \mathbf{x_h}$$

donde $\mathbf{x_p} = (4, -1, 0)$ es una solución particular y $\mathbf{x_h} = x_3(-13, 7, 1)$, donde x_3 es un número real, es una solución al sistema homogéneo asociado. Por ejemplo, $x_3 = 0$ lleva a la solución $(4, -1, 0)$, mientras que $x_3 = 2$ da la solución $(-22, 13, 2)$. ◆

PROBLEMAS 1.7

Autoevaluación

I. Si el sistema $\begin{aligned} x \quad\quad - z &= 2 \\ y + z &= 3 \\ x + 2y \quad\quad &= 4 \end{aligned}$ se escribe en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, entonces $A =$ ________.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

En los problemas 1 al 6 escriba el sistema dado en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

1. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 7 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= -4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -7 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 &= 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \quad\quad &= 9 \end{aligned}$

Respuestas a la autoevaluación

I. d

5. $\begin{aligned} x_2 - x_3 &= 7 \\ x_1 \quad + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad &= -5 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 7x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 0 \end{aligned}$

En los problemas 7 al 15 escriba el sistema de ecuaciones representado por la matriz aumentada dada.

7. $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 20 \end{array}\right)$

8. $\left(\begin{array}{rr|r} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$

9. $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 5 \end{array}\right)$

10. $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

11. $\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$

12. $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right)$

13. $\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

14. $\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$

15. $\left(\begin{array}{rr|r} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{array}\right)$

16. Encuentre la matriz A y los vectores **x** y **b** tales que el sistema representado por la siguiente matriz aumentada se pueda escribir en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y resuelva el sistema.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

En los problemas 17 al 22 encuentre todas las soluciones al sistema no homogéneo dado encontrando primero una solución (si es posible) y después todas las soluciones al sistema homogéneo asociado.

17. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 2 \\ -2x_1 + 6x_2 &= -4 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 18 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 - 4x_2 - 5x_3 &= 2 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 - 4x_2 - 5x_3 &= 2 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 6 \end{aligned}$

Cálculo **†23.** Considere la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son continuas y se supone que la función desconocida y tiene una segunda derivada. Muestre que si y_1 y y_2 son soluciones a (7), entonces $c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución para cualesquiera constantes c_1 y c_2.

Cálculo **24.** Suponga que y_p y y_q son soluciones a la ecuación no homogénea

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \qquad \textbf{(8)}$$

Demuestre que $y_p - y_q$ es una solución a (7). Suponga aquí que $f(x)$ no es la función cero.

† El símbolo Cálculo indica que se necesita el cálculo para resolver el problema.

MATLAB 1.7

Nota. Para generar matrices aleatorias, consulte la presentación anterior de los problemas de MATLAB 1.6.

1. **a.** Genere una matriz aleatoria A de 3×3 con elementos entre -10 y 10 y genere un vector aleatorio **b** de 3×1 con elementos entre -10 y 10. Usando MATLAB, resuelva el sistema con la matriz aumentada $[A \;\; \mathbf{b}]$ usando **rref**. Utilice la notación "**:**" para poner la solución en la variable **x**. Encuentre $A\mathbf{x}$ y compare con **b** (encuentre **A*x–b**). Encuentre **y = x(1)*A(:,1) + x(2)*A(:,2) + x(3)*A(:,3)** y compare con **b** (encuentre **y–b**). Repita esto para otros tres vectores **b**. ¿Qué puede concluir sobre la relación entre $A\mathbf{x}$, **y** y **b**?

   b. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 17 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 5 & 9 & 19 & 4 \\ 9 & 5 & 23 & -4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 16 \\ 40 \end{pmatrix}$$

   i. Resuelva el sistema con la matriz aumentada $[A \;\; \mathbf{b}]$ usando **rref**. Si existe un número infinito de soluciones, haga una elección para las variables arbitrarias y encuentre e introduzca el vector solución **x** correspondiente.

   ii. Encuentre **A*x** y **y = x(1)*A(:,1) + x(2)*A(:,2) + x(3)*A(:,3) + x(4)*A(:,4)** y compare $A\mathbf{x}$, **y** y **b**.

   iii. Repita para otras dos variables arbitrarias.

   iv. ¿Qué puede concluir sobre la relación entre $A\mathbf{x}$, **y** y **b**?

   c. ¿Qué dicen los incisos a) y b) sobre las soluciones a los sistema de ecuaciones? ¿De qué manera se relaciona esto con el problema 6 de MATLAB 1.3?

2. **a.** Suponga que los elementos de A y **x** son números reales. Usando la definición de multiplicación de matrices, argumente por qué $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ significa que cada renglón de A es perpendicular a **x**. (Recuerde que dos vectores reales son perpendiculares si su producto escalar es cero.)

   b. Usando el resultado del inciso a) encuentre todos los vectores **x** perpendiculares a los dos vectores:

$$(1, 2, -3, 0, 4) \;\; \text{y} \;\; (4, -5, 2, 0, 1)$$

3. **a.** Recuerde el problema 3 de MATLAB 1.6. (Vuelva a resolverlo.) ¿De qué manera se relaciona esto con el corolario del teorema 1?

   b. Considere las matrices A y **b** del problema 1b) de MATLAB en esta sección.

   i. Verifique que el sistema $[A \;\; \mathbf{b}]$ tiene un número infinito de soluciones.

   ii. Sea **x = A\b**. Verifique usando la multiplicación de matrices que esto produce una solución al sistema con la matriz aumentada $[A \;\; \mathbf{b}]$. (Observe que hace una advertencia. Si no existe una solución única, el comando "\" proporciona la solución de mínimos cuadrados. En caso de que el sistema tenga un número infinito de soluciones la solución de mínimos cuadrados será una solución.)

   iii. Considerando **rref(A)**, encuentre cuatro soluciones al sistema homogéneo $[A \;\; \mathbf{0}]$. Introduzca uno a la vez, llamándolo **z**, y verifique mediante la multiplicación de matrices que **x** + **z** es una solución al sistema con la matriz aumentada $[A \;\; \mathbf{b}]$.

4. a. Observe **rref(A)** para la A dada a continuación y argumente por qué el sistema $[A \;\; \mathbf{b}]$ tiene una solución independientemente del vector **b** de 4×1 que se elija.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 9 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

b. Concluya que todo vector **b** es una combinación lineal de las columnas de A. Genere tres vectores aleatorios **b** de 4×1 y, para cada **b**, encuentre los coeficientes necesarios para escribir **b** como una combinación lineal de las columnas de A.

c. Observando **rref(A)** para la siguiente A, argumente por qué existe un vector **b** de 4×1 para el que el sistema $[A \;\; \mathbf{b}]$ no tiene solución. Realice un experimento para encontrar un vector **b** para el que no exista una solución.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 & 0 \\ 4 & 5 & -6 & 7 \\ 3 & 9 & -15 & 9 \\ 9 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

d. ¿Cómo pueden generarse vectores **b** que garanticen que habrá una solución? Decida sobre el procedimiento y descríbalo con un comentario. Pruebe su procedimiento formando con él tres vectores **b** y después resolviendo los sistemas correspondientes. (Vea el problema 6 de MATLAB en la sección 1.3.)

e. Pruebe que su procedimiento es válido usando la teoría desarrollada en el texto.

5. En este problema descubrirá las relaciones entre la forma escalonda reducida por renglones de una matriz y la información sobre las combinaciones lineales de las columnas de A. La parte de MATLAB del problema sólo implica el cálculo de algunas formas escalonadas reducidas por renglones. La teoría se basa en los hechos de que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ significa que **x** es una solución al sistema $[A \;\; \mathbf{0}]$ y que

$$\mathbf{0} = x_1(\text{col } 1 \text{ of } A) + \cdots + x_n(\text{col } n \text{ of } A)$$

a. **i.** Sea A la matriz del problema 4c) de MATLAB en esta sección. Encuentre **rref(A)**. (El resto de este inciso necesita trabajo con papel y lápiz.)

ii. Encuentre las soluciones al sistema homogéneo escrito en términos de las elecciones naturales de las variables arbitrarias.

iii. Establezca una variable arbitraria igual a 1 y las otras variables arbitrarias iguales a 0 y encuentre las otras incógnitas para producir un vector solución **x**. Para esta **x**, escriba lo que dice la afirmación

$$\mathbf{0} = A\mathbf{x} = x_1(\text{col } 1 \text{ of } A) + \cdots + x_n(\text{col } n \text{ of } A)$$

y despeje la columna de A que corresponde a la variable arbitraria que igualó a 1. Verifique sus resultados.

iv. Ahora establezca otra variable arbitraria igual a 1 y las otras variables arbitrarias iguales a 0. Repita *iii)*. Continúe de la misma manera para cada variable arbitraria.

v. Revise **rref(A)** y vea si reconoce algunas relaciones entre lo que acaba de descubrir y los números en **rref(A)**.

b. Sea A la matriz en el problema 1b) de MATLAB en esta sección. Repita las instrucciones anteriores.

c. Sea A una matriz aleatoria de 6 × 6. Modifique A de manera que

```
A(:,3) = 2*A(:,2) - 3*A(:,1)
A(:,5) = -A(:,1) + 2*A(:,2) - 3*A(:,4)
A(:,6) = A(:,2) + 4*A(:,4)
```

Repita las instrucciones anteriores.

1.8 INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

En esta sección se definen dos tipos de matrices que son básicas en la teoría de matrices. En primer lugar se presenta un ejemplo sencillo. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Un cálculo sencillo muestra que $AB = BA = I_2$, donde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matriz I_2 se llama *matriz identidad* de 2 × 2. La matriz B se llama *matriz inversa* de A y se denota por A^{-1}.

DEFINICIÓN 1 **Matriz identidad** La **matriz identidad** I_n de $n \times n$ es una matriz de $n \times n$ cuyos elementos de la **diagonal principal**† son iguales a 1 y todos los demás son 0. Esto es,

$$I_n = (b_{ij}) \quad \text{donde} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{1}$$

EJEMPLO 1 **Dos matrices identidad**

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◆

† La diagonal principal de $A = (a_{ij})$ consiste en las componentes a_{11}, a_{22}, a_{33}, etcétera. A menos que se establezca de otra mane[illegible]implemente como la **diagonal**.

TEOREMA 1 Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces

$$AI_n = I_nA = A$$

Es decir, I_n conmuta con toda matriz de $n \times n$ y la deja sin cambio después de la multiplicación por la derecha o por la izquierda.

Nota. I_n funciona para las matrices de $n \times n$ de la misma manera que el número 1 funciona para los números reales ($1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para todo número real a).

Demostración Sea c_{ij} el elemento ij de AI_n. Entonces

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ij}b_{jj} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Pero por (1), esta suma es igual a a_{ij}. Así, $AI_n = A$. De una manera similar se puede demostrar que $I_nA = A$, y esto demuestra el teorema. ◆

Notación. De aquí en adelante se escribirá la matriz identidad sólo como I ya que si A es de $n \times n$ los productos IA y AI están definidos sólo si I es también de $n \times n$.

DEFINICIÓN 2 **La inversa de una matriz** Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Suponga que

$$AB = BA = I$$

Entonces B se llama la **inversa** de A y se denota por A^{-1}. Entonces se tiene

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Si A tiene invesa, entonces se dice que A es **invertible**.

Una matriz cuadrada que no es invertible se llama **singular** y una matriz invertible se llama también **no singular**.

Observación 1. De esta definición se sigue inmediatamente que $(A^{-1})^{-1} = A$ si A es invertible.

Observación 2. Esta definición *no* establece que toda matriz cuadrada tiene inversa. De hecho, existen muchas matrices cuadradas que no tienen inversa. (Ejemplo 3 de la página 103.)

En la definición 2 se establece *la* inversa de una matriz. Esta definición sugiere que la inversa es única. Por supuesto que así es, como lo dice el siguiente teorema.

TEOREMA 2 Si una matriz A es invertible, entonces su inversa es única.

Demostración Suponga que B y C son dos inversas de A. Se puede demostrar que $B = C$. Por definición se tiene $AB = BA = I$ y $AC = CA = I$. $B(AC) = (BA)C$ por la ley asociativa de la multiplicación de matrices. Entonces

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

Entonces $B = C$ y el teorema queda demostrado. ◆

A continuación se da otro hecho importante sobre las inversas.

TEOREMA 3 Sean A y B dos matrices invertibles de $n \times n$. Entonces AB es invertible y

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

Demostración Para probar este resultado se necesita la definición 2. Es decir, $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ si y sólo si $B^{-1}A^{-1}(AB) = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. Pero esto es una consecuencia ya que

ecuación (6), página 68

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) \overset{\downarrow}{=} B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

y

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$ ◆

Nota. Del teorema 3 se concluye que $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. Vea el problema 16.

Considere el sistema de n ecuaciones con n incógnitas

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

y suponga que A es invertible. Entonces

$$\begin{aligned} A^{-1}A\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} && \text{se multiplicó por la izquierda por } A^{-1} \\ I\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} && A^{-1}A = I \\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} && I\mathbf{x} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

Ésta es una solución al sistema porque

$$A\mathbf{x} = A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = I\,\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

Si $\mathbf{y}$ es un vector tal que $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$, entonces los cálculos anteriores demuestran que $\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Es decir, $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Se ha demostrado lo siguiente:

> Si A es invertible, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. **(2)**

Ésta es una de las razones por la que se estudian las matrices inversas.

Una vez que se ha definido la inversa de una matriz, surgen dos preguntas básicas.

Pregunta 1. ¿Qué matrices tienen inversa?

Pregunta 2. Si una matriz tiene inversa, ¿cómo se puede calcular?

En esta sección se contestan ambas preguntas. Se comenzará por analizar lo que ocurre en el caso de 2×2.

EJEMPLO 2 **Cálculo de la inversa de una matriz de 2 × 2** Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

Solución Suponga que A^{-1} existe. Se escribe $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ y se usa el hecho de que $AA^{-1} = I$. Entonces

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3z & 2y - 3w \\ -4x + 5z & -4y + 5w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las dos últimas matrices pueden ser iguales sólo si cada una de sus componentes correspondientes son iguales. Esto significa que

$$2x - 3z = 1 \quad (3)$$
$$2y - 3w = 0 \quad (4)$$
$$-4x + 5z = 0 \quad (5)$$
$$-4y + 5w = 1 \quad (6)$$

Éste es un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Observe que hay dos ecuaciones que involucran sólo a x y a z [las ecuaciones (3) y (5)] y dos que incluyen sólo a y y w [las ecuaciones (4) y (6)]. Se escriben estos dos sistemas en la forma aumentada:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{array}\right) \quad (7)$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \end{array}\right) \quad (8)$$

De la sección 1.3 se sabe que si el sistema (7) (con las variables x y z) tiene una solución única, entonces la eliminación de Gauss-Jordan en (7) dará como resultado

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & z \end{array}\right)$$

en donde (x, z) es el único par de números que satisface $2x - 3z = 1$ y $-4x + 5z = 0$. De igual manera, la reducción por renglones de (8) dará como resultado

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & w \end{array}\right)$$

donde (y, w) es el único par de números que satisface $2y - 3w = 0$ y $-4y + 5w = 1$.

Como las matrices de coeficientes en (7) y (8) son iguales, se puede realizar la reducción por renglones sobre las dos matrices aumentadas al mismo tiempo considerando la nueva matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{9}$$

Si A es invertible, entonces el sistema definido por (3), (4), (5) y (6) tiene una solución única y, por lo que acaba de decirse, la reducción por renglones da

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & z & w \end{array}\right)$$

Ahora se llevan a cabo los cálculos, observando que la matriz de la izquierda en (9) es A y la matriz de la derecha es I:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + 4R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + \frac{3}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Así, $x = -\frac{5}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$, $z = -2$, $w = -1$ y $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Se calcula

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces A es invertible y $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. ◆

EJEMPLO 3 **Una matriz de 2 × 2 que no es invertible** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Determine si A es invertible y si es así calcule su inversa.

Solución Si $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ existe, entonces

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2w \\ -2x - 4z & -2y - 4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto conduce al sistema

$$\begin{aligned} x \quad\quad + 2z \quad\quad &= 1 \\ y \quad\quad + 2w &= 0 \\ -2x \quad\quad - 4z \quad\quad &= 0 \\ -2y \quad\quad - 4w &= 1 \end{aligned} \tag{10}$$

Usando el mismo razonamiento que en el ejemplo 1, se puede escribir este sistema en la forma de matriz aumentada $(A|I)$ y reducir por renglones:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Hasta aquí se puede llegar. La última línea se lee $0 = 2$ o $0 = 1$, dependiendo de cuál de los dos sistemas de ecuaciones (en x y z o en y y w) se esté resolviendo. Entonces el sistema (10) es inconsistente y A no es invertible. ◆

Los últimos dos ejemplos ilustran un procedimiento que siempre funciona cuando se quiere encontrar la inversa de una matriz.

Procedimiento para encontrar la inversa de una matriz cuadrada A

Paso 1. Se escribe la matriz aumentada $(A|I)$.

Paso 2. Se utiliza la reducción por renglones para poner la matriz A a su forma escalonada reducida por renglones.

Paso 3. Se decide si A es invertible.

a. Si la forma escalonada reducida por renglones de A es la matriz identidad I, entonces A^{-1} es la matriz que se tiene a la derecha de la barra vertical.

b. Si la reducción de A conduce a un renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces A no es invertible.

Observación. a) y b) se pueden expresar de otra manera:

> *Una matriz A de n × n es invertible si y sólo si su forma escalonada reducida por renglones es la matriz identidad; es decir, si su forma escalonda reducida por renglones tiene n pivotes.*

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Entonces se define

Determinante de una matriz de 2 × 2

$$\text{Determinante de } A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{11}$$

El determinante de A se denota por det A.

TEOREMA 4 Sea A una matriz de 2 × 2. Entonces

i. A es invertible si y sólo si det $A \neq 0$.

ii. Si det $A \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Demostración Primero, suponga que det $A \neq 0$ y sea $B = (1/\det A)\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$. Entonces

$$BA = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

De manera similar, $AB = I$, lo que muestra que A es invertible y que $B = A^{-1}$. Todavía debe demostrarse que si A es invertible, entonces det $A \neq 0$. Para esto, se considera el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{13}$$

Se hace esto porque del teorema de resumen (teorema 1.2.1, página 5) se sabe que si este sistema tiene una solución única, entonces $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. El sistema se puede escribir en la forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{14}$$

con $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ y $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$. Entonces, como A es invertible, se ve de (2) que el sistema (14) tiene una solución única dada por

$$\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$$

Pero por el teorema 1.2.1, el hecho de que el sistema (13) tenga una solución única implica que $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\det A\neq 0$. Esto completa la prueba. ◆

Nota. La fórmula (12) se puede obtener directamente aplicando el procedimiento para calcular una inversa (ver el problema 46).

EJEMPLO 4 Cálculo de la inversa de una matriz de 2 × 2 Sea $A=\begin{pmatrix}2&-4\\1&3\end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

Solución Se encuentra que $\det A=(2)(3)-(-4)(1)=10$; por lo tanto A^{-1} existe. De la ecuación (12) se tiene

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3&4\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{10}&\frac{4}{10}\\-\frac{1}{10}&\frac{2}{10}\end{pmatrix}$$

Verificación

$$A^{-1}A=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3&4\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4\\1&3\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}10&0\\0&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

y

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}2&-4\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{10}&\frac{4}{10}\\-\frac{1}{10}&\frac{2}{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

◆

EJEMPLO 5 Una matriz de 2 × 2 que no es invertible Sea $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-4\end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

Solución Se encuentra que $\det A=(1)(-4)-(2)(-2)=-4+4=0$, de manera que A^{-1} no existe, como se vio en el ejemplo 3. ◆

El procedimiento descrito para encontrar la inversa (si existe) de una matriz de 2 × 2 funciona para matrices de $n\times n$ donde $n>2$. Se ilustra con varios ejemplos.

EJEMPLO 6 **Cálculo de la inversa de una matriz de 3 × 3** Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (vea el ejemplo 1.3.1 en la página 7). Calcule A^{-1} si existe.

Solución Primero se pone A seguido de I en la forma de matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y después se lleva a cabo la reducción por renglones.

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{11}{6} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{array}\right)$$

Como A se redujo a I, se tiene

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

Se factoriza $\frac{1}{6}$ para que los cálculos sean más sencillos.

Verificación

$$A^{-1}A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = I.$$

También se puede verificar que $AA^{-1} = I$. ◆

ADVERTENCIA Es fácil cometer errores numéricos al calcular A^{-1}. Por lo tanto es importante verificar los cálculos viendo que $A^{-1}A = I$. ◇

EJEMPLO 7 **Una matriz de 3 × 3 que no es invertible** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

Solución Siguiendo el procedimiento anterior se obtiene, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to R_1 + 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hasta aquí se puede llegar. La matriz A *no puede* reducirse a la matriz identidad, por lo que se puede concluir que A *no* es invertible. ◆

Existe otra manera de ver el resultado del último ejemplo. Sea **b** cualquier vector de 3×1 y considere el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si se trata de resolver esto por el método de eliminación gaussiana, se terminaría con una ecuación que se lee $0 = c \neq 0$ como en el ejemplo 3, o $0 = 0$. Es decir, el sistema no tiene solución o bien tiene un número infinito de soluciones. La posibilidad que se elimina es que el sistema tenga una solución única. Pero si A^{-1} existiera, entonces habría una solución única dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. La conclusión que se obtiene es

> Si la reducción por renglones de A produce un renglón de ceros, entonces A *no* es invertible.

DEFINICIÓN 3 **Matrices equivalentes por renglones** Suponga que la matriz A se puede transformar en la matriz B mediante operaciones con renglones. Entonces se dice que A y B son **equivalentes por renglones**.

El razonamiento anterior se puede usar para probar el siguiente teorema (vea el problema 47).

TEOREMA 5 Sea A una matriz de $n \times n$.

i. A es invertible si y sólo si A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n; esto es, si la forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.

ii. A es invertible si y sólo si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector **b**.

iii. Si A es invertible, entonces la solución única de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

iv. A es invertible si y sólo si su forma escalonada reducida por renglones tiene n pivotes. ◆

EJEMPLO 8 **Uso de la inversa de una matriz para resolver un sistema de ecuaciones** Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_2 - x_3 &= -4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Solución Este sistema se puede escribir como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Así, la solución única está dada por

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$ ◆

EJEMPLO 9 **La tecnología y las matrices de Leontief: modelo de la economía norteamericana en 1958** En el modelo de insumo-producto de Leontief, descrito en el ejemplo 1.3.9 en la página 19, se obtuvo el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 &= x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 &= x_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \;\; & \;\; \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + e_n &= x_n \end{aligned} \tag{15}$$

que se puede escribir como

$$A\mathbf{x} + \mathbf{e} = \mathbf{x} = I\mathbf{x}$$

o

$$(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{e} \tag{16}$$

La matriz A de demandas internas se llama **matriz tecnológica**, y la matriz $I - A$ se llama **matriz de Leontief**. Si la matriz de Leontief es invertible, entonces los sistemas (15) y (16) tienen soluciones únicas.

Leontief usó su modelo para analizar la economía de Estados Unidos en 1958.† Dividió la economía en 81 sectores y los agrupó en seis familias de sectores relacionados. Para simplificar, se tratará cada familia de sectores como un solo sector de manera que se pueda ver la economía estadounidense como una economía con seis industrias. Estas industrias se enumeran en la tabla 1.1

† *Scientifi*

Tabla 1.1

Sector	Ejemplos
No metales terminados (NMT)	Muebles, alimentos procesados
Metales terminados (MT)	Electrodomésticos, vehículos automotores
Metales básicos (MB)	Herramientas (producción intermitente), minería
No metales básicos (NMB)	Agricultura, imprenta
Energía (E)	Petróleo, carbón
Servicios (S)	Diversiones, bienes raíces

La tabla de insumo-producto, tabla 1.2, da las demandas internas durante 1958 basadas en las cifras de Leontief. Las unidades en la tabla son millones de dólares. Así, por ejemplo, el número 0.173 en la posición 6,5 significa que para producir energía equivalente a $1 millón, es necesario proporcionar $0.173 millones = $173 000 en servicios. De manera similar, 0.037 en la posición 4,2 significa que con el fin de producir artículos metálicos terminados, es necesario gastar $0.037 millones = $37 000 en productos no metálicos básicos.

Tabla 1.2 Demandas internas en 1958 en la economía de Estados Unidos

	NMT	MT	MB	NMB	E	S
NMT	0.170	0.004	0	0.029	0	0.008
MT	0.003	0.295	0.018	0.002	0.004	0.016
MB	0.025	0.173	0.460	0.007	0.011	0.007
NMB	0.348	0.037	0.021	0.403	0.011	0.048
E	0.007	0.001	0.039	0.025	0.358	0.025
S	0.120	0.074	0.104	0.123	0.173	0.234

Por último, las demandas externas estimadas por Leontief sobre la economía de Estados Unidos en 1958 (en millones de dólares) se dan en la tabla 1.3.

Tabla 1.3 Demandas externas sobre la economía de Estados Unidos en 1958 (en millones de dólares)

NMT	99 640
MT	75 548
MB	14 444
NMB	33 501
E	23 527
S	263 985

Con el fin de manejar la economía de Estados Unidos en 1958 para satisfacer todas las demandas externas, ¿cuántas unidades deben producirse en cada uno de los seis sectores?

Solución La matriz tecnológica está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0.170 & 0.004 & 0 & 0.029 & 0 & 0.008 \\ 0.003 & 0.295 & 0.018 & 0.002 & 0.004 & 0.016 \\ 0.025 & 0.173 & 0.460 & 0.007 & 0.011 & 0.007 \\ 0.348 & 0.037 & 0.021 & 0.403 & 0.011 & 0.048 \\ 0.007 & 0.001 & 0.039 & 0.025 & 0.358 & 0.025 \\ 0.120 & 0.074 & 0.104 & 0.123 & 0.173 & 0.234 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 99\,640 \\ 75\,548 \\ 14\,444 \\ 33\,501 \\ 23\,527 \\ 263\,985 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz de Leontief, se resta

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.170 & 0.004 & 0 & 0.029 & 0 & 0.008 \\ 0.003 & 0.295 & 0.018 & 0.002 & 0.004 & 0.016 \\ 0.025 & 0.173 & 0.460 & 0.007 & 0.011 & 0.007 \\ 0.348 & 0.037 & 0.021 & 0.403 & 0.011 & 0.048 \\ 0.007 & 0.001 & 0.039 & 0.025 & 0.358 & 0.025 \\ 0.120 & 0.074 & 0.104 & 0.123 & 0.173 & 0.234 \end{pmatrix}$$

El cálculo de la inversa de una matriz de 6×6 es una actividad tediosa. Los siguientes resultados (redondeados a tres cifras decimales) se obtuvieron usando MATLAB:

$$(I - A)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1.234 & 0.014 & 0.007 & 0.064 & 0.006 & 0.017 \\ 0.017 & 1.436 & 0.056 & 0.014 & 0.019 & 0.032 \\ 0.078 & 0.467 & 1.878 & 0.036 & 0.044 & 0.031 \\ 0.752 & 0.133 & 0.101 & 1.741 & 0.065 & 0.123 \\ 0.061 & 0.045 & 0.130 & 0.083 & 1.578 & 0.059 \\ 0.340 & 0.236 & 0.307 & 0.315 & 0.376 & 1.349 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el vector de la salida "ideal" está dado por

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\,\mathbf{e} \approx \begin{pmatrix} 131\,033.21 \\ 120\,458.90 \\ 80\,680.56 \\ 178\,732.04 \\ 66\,929.26 \\ 431\,562.04 \end{pmatrix}$$

Esto significa que se requeriría aproximadamente 131 033 unidades (equivalentes a \$131 033 millones) de productos no metálicos terminados, 120 459 unidades de productos metálicos terminados, 80 681 unidades de productos metálicos básicos, 178 732 unidades de productos no metálicos básicos, 66 929 unidades de energía y 431 562 unidades de servicios, para manejar la economía de Estados Unidos y cumplir con las demandas externas en 1958. ◆

En la sección 1.2 se encontró la primera forma del teorema de resumen (teorema 1.2.1, págiguiente teorema establece que varias afirmaciones sobre la inversa, la unicidad de las soluciones, la equivalencia por renglones

y los determinantes son equivalentes. En este momento, se puede probar la equivalencia de los incisos *i*), *ii*), *iii*), *iv*) y *v*). La prueba concluirá después de desarrollar cierta teoría básica sobre determinantes (vea el teorema 2.4.4 en la página 216).

TEOREMA 6 **Teorema de resumen (punto de vista 2)** Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las seis afirmaciones siguientes son equivalentes. Es decir, cada una de ellas implica las otras cinco (de manera que si se cumple una, todas se cumplen, y si una es falsa, todas son falsas).

- **i.** A es invertible.
- **ii.** La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).
- **iii.** El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.
- **iv.** A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n de $n \times n$; es decir, la forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.
- **v.** La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.
- **vi.** $\det A \neq 0$ (hasta ahora sólo se ha definido $\det A$ si A es una matriz de 2×2).

Demostración Ya se ha visto que las afirmaciones *i*), *iii*), *iv*) y *vi*) son equivalentes [teorema 5]. Se demostrará que *ii*) y *iv*) son equivalentes. Suponga que *ii*) se cumple. Entonces la forma escalonada reducida por renglones de A tiene n pivotes; de otra manera al menos una columna de esta forma no tendría pivote y entonces el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tendría un número infinito de soluciones porque se podría dar un valor arbitrario a la variable correspondiente a esa columna (los coeficientes en la columna son cero). Pero si la forma escalonada reducida por renglones de A tiene n pivotes, entonces se trata de I_n.

Inversamente, suponga que *iv*) se cumple; esto es, suponga que A es equivalente por renglones a I_n. Entonces por el teorema 5, inciso *i*), A es invertible, y por el teorema 5, inciso *iii*), la solución única de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Así, *ii*) y *iv*) son equivalentes. En el teorema 1.2.1 se demostró que *i*) y *vi*) son equivalentes en el caso de 2×2. Se probará la equivalencia de *i*) y *vi*) en la sección 2.4. ✦

Observación. Si la forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes, entonces tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(17)}$$

Es decir, R es una matriz con unos en la diagonal y ceros debajo de ella.

Para verificar que $B = A^{-1}$, se debe comprobar que $AB = BA = I$. Resulta que sólo se tiene que hacer la mitad de este trabajo.

TEOREMA 7 Sean A y B matrices de $n \times n$. Entonces A es invertible y $B = A^{-1}$ ya sea si *i*) $BA = I$ o si *ii*) $AB = I$.

Demostración

i. Se supone que $BA = I$. Considere el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Multiplicando por la izquierda ambos lados de esta ecuación por B, se obtiene

$$BA\mathbf{x} = B\mathbf{0} \tag{18}$$

Pero $BA = I$ y $B\mathbf{0} = \mathbf{0}$, de manera que (18) se convierte en $I\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Esto muestra que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la única solución a $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y por el teorema 6, incisos *i*) y *ii*), esto quiere decir que A es invertible. Todavía debe demostrarse que $B = A^{-1}$. Sea $A^{-1} = C$. Entonces, $AC = I$. Así

$$BAC = B(AC) = BI = B \;\text{ y }\; BAC = (BA)C = IC = C$$

Por lo tanto, $B = C$ y el inciso *i*) queda demostrado.

ii. Sea $AB = I$. Entonces del inciso *i*), $A = B^{-1}$. De la definición 2 esto significa que $AB = BA = I$, lo que prueba que A es invertible y que $B = A^{-1}$. Esto completa la demostración. ✦

PROBLEMAS 1.8

Autoevaluación

I. ¿Cuál de la siguientes afirmaciones es cierta?

a. Toda matriz cuadrada tiene inversa.

b. Una matriz cuadrada tiene inversa si su reducción por renglones lleva a un renglón de ceros.

c. Una matriz cuadrada es invertible si tiene inversa.

d. Una matriz cuadrada B es la inversa de A si $AI = B$.

II. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre una sistema de ecuaciones en forma de matriz?

a. Es de la forma $A^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b. Si tiene una solución única, la solución será $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

c. Tiene solución si A no es invertible.

d. Tiene una solución única.

III. ¿Cuál de las siguientes matrices es invertible?

a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

IV. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para una matriz invertible A?

a. El producto de A por I es A^{-1}.

b. A es una matriz de 2×3.

c. $A = A^{-1}$.

d. A es una matriz cuadrada.

V. Diga cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre el sistema

$$\begin{aligned} 4x - 5y &= 3 \\ 6x - 7y &= 4 \end{aligned}$$

a. No tiene solución porque $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ no es invertible.

b. Tiene la solución $(-1, -\frac{1}{5})$.

c. Si tuviera una solución, se encontraría resolviendo $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

d. Su solución es $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

En los problemas 1 al 15 determine si la matriz dada es invertible. Si lo es, calcule la inversa.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & -4 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 19 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

16. Muestre que si A, B y C son matrices invertibles, entonces ABC es invertible y $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

17. Si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son matrices invertibles de $n \times n$, muestre que $A_1A_2 \cdots A_m$ es invertible y calcule su inversa.

18. Muestre que la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ es su propia inversa.

19. Muestre que la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es su propia inversa si $A = \pm I$ o si $a_{11} = -a_{22}$ y $a_{21}a_{12} = 1 - a_{11}^2$.

20. Encuentre el vector de producción $\mathbf{x}$ en el modelo de insumo-producto de Leontief si $n = 3$, $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Respuestas a la autoevaluación

I. c **II.** b **III.** c **IV.** d **V.** c

*21. Suponga que A es de $n \times m$ y B es de $m \times n$, de manera que AB es de $n \times n$. Demuestre que AB no es invertible si $n > m$. [*Sugerencia:* muestre que existe un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero tal que $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y después aplique el teorema 6.]

*22. Utilice los métodos de esta sección para encontrar las inversas de las siguientes matrices con elementos complejos:

a. $\begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 1+i & 1-i \end{pmatrix}$

23. Demuestre que para todo número real θ la matriz $\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.

24. Calcule la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

25. Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se llama **diagonal** si todos sus elementos fuera de la diagonal principal son cero. Esto es, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. (La matriz del problema 24 es diagonal.) Demuestre que una matriz diagonal es invertible si y sólo si cada uno de los elementos de la diagonal es diferente de cero.

26. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matriz diagonal tal que sus componentes en la diagonal principal son todas diferentes de cero. Calcule A^{-1}.

27. Calcule la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

28. Demuestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ no es invertible.

*29. Una matriz cuadrada se llama **triangular superior (inferior)** si todos sus elementos abajo (arriba) de la diagonal principal son cero. (La matriz en el problema 27 es triangular superior y la matriz en el problema 28 es triangular inferior.) Demuestre que una matriz triangular superior o triangular inferior es invertible si y sólo si cada uno de los elementos de la diagonal es diferente de cero.

*30. Demuestre que la inversa de una matriz triangular superior invertible es triangular superior. [*Sugerencia:* primero demuestre el resultado para una matriz de 3×3.]

En los problemas 31 y 32 se da una matriz. En cada caso demuestre que la matriz no es invertible encontrando un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

31. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ 32. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -6 & 8 \end{pmatrix}$

33. Una fábrica de muebles de calidad tiene dos divisiones: una taller de máquinas herramienta donde se fabrican las partes de los muebles y una división de ensamble y terminado en la que se unen las partes para obtener el producto terminado. Suponga que se tienen 12 empleados en el taller y 20 en la división, y que cada empleado trabaja 8 horas. Suponga que se producen sólo dos artículos: sillas y mesas. Una silla requiere $\frac{384}{17}$ horas de maquinado y $\frac{480}{17}$ horas de ensamble y terminado. Una mesa requiere $\frac{240}{17}$ horas de maquinado y $\frac{640}{17}$ horas de ensamble y terminado. Suponiendo que se tiene una demanda ilimitada de estos productos y que el fabricante quiere mantener ocupados a todos sus empleados, ¿cuántas sillas y cuántas mesas al día puede producir esta fábrica?

34. La alacena de ingredientes mágicos de una bruja contiene 10 onzas de tréboles de cuatro hojas molidos y 14 onzas de raíz de mandrágora en polvo. La alacena se resurte automáticamente siempre que ella use justo todo lo que tiene. Una poción de amor requiere $3\frac{1}{13}$ onzas de tréboles y $2\frac{2}{13}$ onzas de mandrágora. Una receta de una conocida (por brujas) cura para el resfriado común requiere $5\frac{5}{13}$ onzas de tréboles y $10\frac{10}{13}$ onzas de mandrágora. ¿Qué cantidad de la poción de amor y del remedio para resfriado debe hacer la bruja para usar toda la reserva en su alacena?

35. Un granjero da de comer a su ganado una mezcla de dos tipos de alimento. Una unidad estándar del alimento A proporciona a un novillo 10% del requerimiento diario de proteína y 15% del de carbohidratos. Una unidad estándar del alimento tipo B contiene 12% del requerimiento diario de proteína y 8% del de carbohidratos. Si el granjero quiere alimentar a su ganado con el 100% de los requerimientos mínimos diarios de proteína y carbohidratos, ¿cuántas unidades de cada tipo de alimento debe dar a un novillo al día?

36. Una versión muy simplificada de una tabla de insumo-producto para la economía de Israel en 1958 divide esa economía en tres sectores — agricultura, manufactura y energía — con los siguientes resultados.†

	Agricultura	**Manufactura**	**Energía**
Agricultura	0.293	0	0
Manufactura	0.014	0.207	0.017
Energía	0.044	0.010	0.216

a. ¿Cuántas unidades de producción agrícola se requieren para obtener 1 unidad de producto agrícola?

b. ¿Cuántas unidades de producción agrícola se requieren para obtener 200 000 unidades de productos agrícolas?

c. ¿Cuántas unidades de producción agrícola se requieren para obtener 50 000 unidades de energía?

d. ¿Cuántas unidades de energía se requieren para obtener 50 000 unidades de productos agrícolas

† Wassily Leontief, *Input-Output Economics* (Nueva York: Oxford University Press, 1966), 54-57.

37. Continuando con el problema 36, las exportaciones (en miles de libras israelíes) en 1958 fueron:

Agricultura	13 213
Manufactura	17 597
Energía	1 786

a. Calcule las matrices tecnológica y de Leontief.

b. Determine el valor en libras israelíes de los productos agrícolas, los artículos manufacturados y la energía requeridos para hacer funcionar este modelo y exportar el valor establecido de cada producto.

En los problemas 38 al 45 calcule la forma escalonada por renglones de la matriz dada y utilícela para determinar directamente si la matriz es invertible.

38. La matriz del problema 3.

39. La matriz del problema 1.

40. La matriz del problema 4.

41. La matriz del problema 7.

42. La matriz del problema 9.

43. La matriz del problema 11.

44. La matriz del problema 13.

45. La matriz del problema 14.

46. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y suponga que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Derive la fórmula (12) mediante reducción por renglones de la matriz aumentada $\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}\right)$.

47. Demuestre los incisos *i*), *ii*) y *iv*) del teorema 5.

48. Calcule la inversa de $\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$ donde A es una matriz cuadrada. [*Sugerencia:* revise la multiplicación de matrices por bloques en la página 70]†.

49. Considere que A_{11} y A_{22} son invertibles y encuentre la inversa de $\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$.

MANEJO DE CALCULADORA

TI-85

Para obtener una inversa en la TI-85, dé un nombre a la matriz, por ejemplo A, y después oprima

ALPHA   A   2nd x^{-1} ENTER

Si A no es invertible, aparecerá el mensaje

ERROR 03 SINGULAR MAT

es decir, error 03 matriz singular.

† David Carlson dio este problema y el siguiente en su artículo "Teaching Linear Algebra: Must the Fog Always Roll in"? en *The College Mathematics Journal* 24(1), enero de 1993, 29-40.

CASIO fx-7700 GB

Para obtener una inversa en la CASIO fx-7700 GB, dé A. Después oprima F4 y aparecerá A^{-1} (en la memoria C).

Si A no es invertible, se obtendrá el mensaje de error Ma ERROR.
En los problemas 50 al 53 utilice una calculadora para calcular la inversa de la matriz dada.

50. $\begin{pmatrix} 1.6 & 2.3 & 7.5 \\ -4.2 & 3.9 & 5.7 \\ -6.8 & -0.9 & 4.1 \end{pmatrix}$

51. $\begin{pmatrix} 20 & 37 & 11 \\ 26 & 49 & 10 \\ 57 & 98 & 36 \end{pmatrix}$

52. $\begin{pmatrix} -0.03 & 0.21 & 0.46 & -0.33 \\ -0.27 & 0.79 & 0.16 & 0.22 \\ 0.33 & 0.02 & 0 & -0.88 \\ 0.44 & -0.68 & 0.37 & 0.79 \end{pmatrix}$

53. $\begin{pmatrix} 23.46 & -59.62 & 38.36 & -44.21 \\ -59.32 & 77.01 & 91.38 & 50.02 \\ 36.38 & 67.92 & -81.31 & 15.06 \\ -61.31 & -70.80 & 43.59 & 71.22 \end{pmatrix}$

54. Demuestre que la inversa de

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 & 4 \\ 0 & 8 & 13 & 22 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

tiene ceros abajo de la diagonal.

55. Haga lo mismo para la matriz

$$\begin{pmatrix} 23.1 & -42.1 & -63.7 & -19.4 & 23.8 \\ 0 & -14.5 & 36.2 & -15.9 & 61.3 \\ 0 & 0 & -37.2 & 64.8 & 23.5 \\ 0 & 0 & 0 & 91.2 & 13.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 46.9 \end{pmatrix}$$

56. Las matrices en los problemas 54 y 55 se llaman **triangulares superiores**. Usando los resultados de esos problemas, obtenga una conclusión sobre la inversa de una matriz triangular superior.

MATLAB 1.8

Información de MATLAB. El comando de MATLAB **eye(n)** forma la matriz identidad de $n \times n$.

1. a. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$, forme **R = [A eye(3)]**.

i. Encuentre la forma escalonada reducida por renglones de R. Utilice la notación ":" para asignar el nombre de la variable S a la matriz que consiste en las tres últimas columnas de la forma escalonada reducida por renglones de R.

ii. Encuentre SA y AS. Describa la relación entre A y S.

iii. Compare S con **inv(A)**.

b. Repita las instrucciones anteriores para **A = 2*rand(5)–1**. (Utilice **eye(5)** y haga S igual a las cinco columnas de la forma escalonada reducida por renglones.)

2. Considere las matrices

i. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

ii. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \\ 7 & -14 & 0 \end{pmatrix}$

iii. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

iv. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

v. $\frac{-1}{56}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

vi. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Para cada matriz A:

a. Use el comando **rref** para probar si es invertible y encuentre **inv(A)**.

b. Si A no es invertible, ponga atención en los mensajes de MATLAB cuando dé **inv(A)**.

c. Si A es invertible, verifique que **inv(A)** da la inversa. Seleccione un vector aleatorio **b** para el lado derecho, muestre que el sistema [A **b**] tiene una solución única usando el comando **rref**, asigne la solución a la variable **x** y compare **x** con **y = inv(A)*b** (encuentre **x–y**). Repita esto para otro vector **b**.

3. a. Sea **A = round(10*(2*rand(5)–1))**. Sea **B = A** pero cambie uno de los renglones de B a **B(3,:) = 3*B(1,:) + 5*B(2,:)**. Muestre que B no es invertible.

b. Sea **B = A** y cambie el renglón que quiera por una combinación lineal de otros renglones de B. Muestre que B no es invertible.

c. (*Lápiz y papel*) Considerando el proceso de reducción a la forma escalonada reducida por renglones, demuestre que una matriz B no es invertible si un renglón es una combinación lineal de otros renglones.

4. Sea **A = round(10*(2*rand(7)–1))**.

Sea **B = A** pero **B(:,3) = 2*B(:,1)–B(:,2)**.

Sea **C =A** pero **C(:,4) = C(:,1)+C(:,2)–C(:,3)** y **C(:,6) = 3*C(:,2)**.

Sea **D = A** pero **D(:,2) = 3*D(:,1)**, **D(:,4) = 2*D(:,1)–D(:,2)+4*D(:,3)**,

D(:,5) = [illegible]

a. Encuentre **rref** de B, C y D. ¿A qué conclusión llega sobre la invertibilidad de una matriz en la que algunas columnas son combinaciones lineales de las otras columnas?
b. Pruebe su conclusión con otra matriz aleatoria generada E y modificada cambiando algunas columnas a una combinación lineal de otras.
c. Para B, C, D y E, busque patrones en los números de **rref** que reflejen los coeficientes de las combinaciones lineales. Describa estos patrones.
d. ¿De qué manera se relaciona este problema con el problema 5 de MATLAB 1.7?

5. Tipos especiales de matrices

a. Genere cinco matrices aleatorias triangulares superiores con elementos enteros entre −10 y 10. Utilice el comando **triu**. Para dos de las matrices generadas cambie un elemento de la diagonal a 0. (Por ejemplo, si la matriz se llama A, modifíquela con el comando **A(2,2) = 0**.)

i. Pruebe si cada una es invertible. Describa una conclusión que relacione los términos de la diagonal de la matriz triangular superior con la propiedad de ser o no invertible. Pruebe su conclusión con tres o más matrices triangulares superiores.

ii. Para cada matriz invertible encontrada en i) encuentre la inversa usando el comando **inv**. ¿A qué conclusión puede llegar sobre la forma de la inversa de una matriz triangular superior? ¿Cómo son los elementos de la diagonal de la inversa en relación con los elementos de la diagonal de la matriz original? ¿De qué manera se relaciona esta observación con i)?

iii. (*Lápiz y papel*) Suponga que A es una matriz triangular superior de 3×3

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}.$$

Describa los pasos necesarios para reducir la matriz aumentada $[A \;\; I]$ (I es la matriz identidad) a la forma escalonada reducida por renglones y utilice la descripción para verificar las conclusiones sobre las inversas de matrices triangulares superiores a las que llegó en i) y ii).

b. Pruebe si las siguientes matrices y otras con el mismo patrón general son o no invertibles. Describa sus resultados:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

c. En el problema 11 de MATLAB 1.3 se aseguró que el sistema obtenido al ajustar un polinomio de grado n a $n + 1$ puntos con coordenadas distintas llevaría a una solución única. ¿Qué dice esto sobre la matriz de coeficientes? Pruebe su conclusión: primero dé un vector **x** con coordenadas distintas y encuentre **V = vander(x)**; después pruebe V. Repita esto para otros tres vectores **x**.

6. Considere las siguientes matrices.

$$A1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A3 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 9 & 10 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad A4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & 8 & -8 & -9 \\ 1 & 2 & -2 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A5 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -9 \\ 7 & -14 & 8 & 7 & -2 \\ 7 & -14 & 0 & 4 & 11 \\ 9 & -18 & 1 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

a. Usando el comando **rref**, pruebe si las matrices *A1* a *A5* son o no invertibles. Pruebe la invertibilidad de *A1*A2*, *A1*A3*, *A1*A4*, *A1*A5*, *A2*A3*, *A2*A4*, *A2*A5*, *A3*A4*, *A3*A5* y *A4*A5*. Obtenga una conclusión sobre la relación entre la invertibilidad de dos matrices y la invertibilidad de su producto. Explique de qué manera la evidencia apoya su conclusión.

b. Para cada par de matrices A y B, del problema anterior, tales que AB es invertible, encuentre

inv(A*B) – inv(A)*inv(B) y **inv(A*B) – inv(B)*inv(A)**

Obtenga una fórmula para $(AB)^{-1}$ en términos de A^{-1} y B^{-1}. Explique.

7. **Perturbaciones: matrices cercanas a una matriz no invertible** Introduzca la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Verifique que A no es invertible. En lo que sigue A se cambia a una matriz invertible C que es cercana a A, modificando uno de los elementos de A:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9+f \end{pmatrix}$$

donde f es un número pequeño.

Antes de continuar, dé el comando **format short e**. Este comando hará que los números aparezcan en notación científica. En MATLAB, por ejemplo, **1.e–5** representa 10^{-5}.

a. Introduzca

f = 1.e–5; C = A; C(3,3) = A(3,3) + f;

Verifique que C es invertible y encuentre **inv(C)**.

b. Repita para **f = 1.e–7** y **f = 1.e–10**.

c. Comente sobre el tamaño de los elementos de **inv(C)** (comparado con el tamaño de los elementos de C) conforme f se hace pequeño, es decir, conforme C se acerca más a no ser invertible.

d. Se investigará la exactitud de las soluciones a los sistemas en los que la matriz de coeficientes es cercana a ser invertible. Observe que si

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9+f \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24+f \end{pmatrix}$$

entonces $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; es decir, **x** es la solución exacta. Introduzca **x = [1;1;1]**.

Para cada f usada en a) y b), forme C y **b** y resuelva el sistema $C\mathbf{y} = \mathbf{b}$ usando **inv(C)** (dando el nombre de **y** a la solución). Encuentre **z = x–y**. ¿Qué tan cercana es la solución calculada **y** a la solución exacta **x**? ¿De qué manera cambia la exactitud conforme f se hace más pequeña, es decir, conforme C se acerca a no ser invertible?

Antes de continuar con otros problemas dé el comando **format** para regresar a la notación normal.

8. Este problema se refiere al modelo de insumo-producto de Leontief. Resuelva los problemas usando $(I - A)^{-1}$, donde A es la matriz tecnológica que describe las demandas internas. Interprete sus resultados. [*Sugerencia de* MATLAB: La matriz identidad I de $n \times n$ se puede generar con **eye(n)**.]

a. El problema 37 de esta sección.

b. El problema 9b) de MATLAB 1.3.

Utilice **format long** si desea más dígitos en las respuestas.

9. Criptografía Un proceso para encriptar un mensaje secreto es usar cierta matriz cuadrada cuyos elementos son enteros con elementos enteros en la inversa. Se recibe un mensaje, se asigna un número a cada letra (por ejemplo, A = 1, B = 2, etcétera, y espacio = 27), se arreglan los números en una matriz de izquierda a derecha en cada renglón, donde el número de elementos en el renglón es igual al tamaño de la matriz decódigo, se multiplica esta matriz por la matriz de código *por la derecha*, se transcribe el mensaje a una cadena de números (que se lee de izquierda a derecha a lo largo de cada renglón), y se manda el mensaje.

La persona que debe recibir el mensaje conoce la matriz de código. Él o ella arreglan el mensaje encriptado en una matriz de izquierda a derecha en cada renglón, en donde el número de elementos en un renglón coincide con el tamaño de la matriz de código, multiplica *por la derecha* por el inverso de la matriz de código y puede leer el mensaje decodificado (de izquierda a derecha por cada renglón).

a. (*Lápiz y papel*) Si se arregla el mensaje en una matriz leyendo de izquierda a derecha de manera que el número de elementos en un renglón coincide con el tamaño de la matriz de código, ¿por qué debe multiplicarse por la derecha?

¿Por qué al multiplicar por la inversa se decodifica el mensaje (es decir, se deshace el encriptado)?

b. Usted ha recibido el siguiente mensaje que fue encriptado usando la matriz A dada. Decodifíquelo. (Suponga que A = 1, B = 2, etcétera, y espacio = 27.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & 8 & -8 & -9 \\ 1 & 2 & -2 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Mensaje. 47, 49, −19, 257, 487, 10, −9, 63, 137, 236, 79, 142, −184, 372, 536, 59, 70 −40, 332, 588

Nota. El primer renglón de la matriz que necesita construir es 47 49 −19 257 487. Ahora continúe con el segundo renglón.

1.9 TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

Correspondiente a toda matriz existe otra matriz que, como se verá en el capítulo 2, tiene propiedades muy similares a las de la matriz original.

DEFINICIÓN 1 **Transpuesta** Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$. Entonces la **transpuesta** de A, que se escribe A^t, es la matriz de $n \times m$ obtenida al intercambiar los renglones por las columnas de A. De manera breve, se puede escribir $A^t = (a_{ji})$. En otras palabras,

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{entonces } A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Simplemente se coloca el renglón i de A como la columna i de A^t y la columna j de A como el renglón j de A^t.

EJEMPLO 1 **Obtención de las transpuestas de tres matrices** Encuentre las transpuestas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución Al intercambiar los renglones y las columnas de cada matriz se obtiene

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Observe, por ejemplo, que 4 es la componente en el renglón 2 y la columna 3 de C mientras que 4 es la componente en el renglón 3 y la columna 2 de C^t. Esto es, el elemento 2,3 de C es el elemento 3,2 de C^t. ◆

TEOREMA 1 Suponga que $A = (a_{ij})$ es una matriz de $n \times m$ y $B = (b_{ij})$ es una matriz de $m \times p$. Entonces

i. $(A^t)^t = A$. (2)

ii. $(AB)^t = B^tA^t$. (3)

iii. Si A y B son de $n \times m$, entonces $(A + B)^t = A^t + B^t$. (4)

iv. Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. (5)

Demostración

i. Esto sigue directamente de la definición de la transpuesta.

ii. Primero, se observa que AB es una matriz de $n \times p$, de manera que $(AB)^t$ es de $p \times n$. También, B^t es de $p \times m$ y A^t es de $m \times n$, de manera que B^tA^t es de $p \times n$. Así ambas matrices en la ecuación (3) tienen el mismo tamaño. Ahora, el elemento ij de AB es $\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$, y éste es el elemento ji de $(AB)^t$. Sean $C = B^t$ y $D = A^t$. Entonces el elemento ij, c_{ij}, de C es b_{ji} y el elemento ij, d_{ij}, de D es a_{ji}. Así, el elemento ji de CD = elemento ji de $B^tA^t = \sum_{k=1}^{m} c_{jk}d_{ki} = \sum_{k=1}^{m} b_{kj}a_{ik} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} =$ elemento ji de $(AB)^t$. Esto completa la demostración de la parte *ii*).

iii. Esta parte se deja como ejercicio (vea el problema 11).

iv. Sea $A^{-1} = B$. Entonces $AB = BA = I$ de manera que, del inciso *ii*), $(AB)^t = B^tA^t = I^t = I$ y $(BA)^t = A^tB^t = I$. Por lo tanto, A^t es invertible y B^t es el inverso de A^t; es decir, $(A^t)^{-1} = B^t = (A^{-1})^t$. ◆

La transpuesta juega un papel importante en la teoría de matrices. Se verá, en capítulos posteriores, que A y A^t tienen muchas propiedades en común. Como las columnas de A^t son renglones de A, se podrán establecer hechos sobre la transpuesta para concluir que casi todo lo que es cierto para los renglones de una matriz se cumple para sus columnas.

La siguiente definición es fundamental en la teoría de matrices.

DEFINICIÓN 2 **Matriz simétrica** La matriz (cuadrada) A de $n \times n$ se llama **simétrica** si $A^t = A$. Es decir, las columnas de A son también los renglones de A.

EJEMPLO 2 **Cuatro matrices simétricas** Las siguientes cuatro matrices son simétricas:

$$I \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$ ◆

En los capítulos 5 y 6 se verá la importancia de las matrices simétricas reales.

Otra manera de escribir el producto escalar

Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ dos vectores columna con n componentes. Entonces, de la ecuación (1) en la página 62,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

Ahora bien, $\mathbf{a}$ es una matriz de $n \times 1$ de manera que $\mathbf{a}'$ es una matriz de $1 \times n$ y

$$\mathbf{a}' = (a_1\ a_2 \cdots a_n)$$

Entonces $\mathbf{a}'\mathbf{b}$ es una matriz (o escalar) de 1×1, y por la definición de la multiplicación de matriz

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = (a_1\ a_2 \cdots a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

Así, si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores columna de n componentes, entonces

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}'\mathbf{b}} \qquad (6)$$

La fórmula (6) será útil más adelante en este libro.

PROBLEMAS 1.9

Autoevaluación

I. Si A es una matriz de 3×4, entonces A' es una matriz de _______.

a. 4×3 **b.** 3×4 **c.** 3×3 **d.** 4×4

II. *Falso-verdadero:* A' está definida sólo si A es una matriz cuadrada.

III. *Falso-verdadero:* Si A es una matriz de $n \times n$, entonces la diagonal principal de A' es la misma que la diagonal principal de A.

IV. *Falso-verdadero:* $[(A')']' = A'$

V. La transpuesta de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es _______.

a. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Respuestas a la autoevaluación

I. a **II.** F **III.** V **IV.** V **V.** b

En los problemas 1 al 10 encuentre la transpuesta de la matriz dada.

1. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. Sean A y B matrices de $n \times m$. Demuestre, usando la definición 1, que $(A + B)^t = A^t + B^t$.

12. Encuentre los números α y β tales que $\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 5 & -6 & 2 \\ \beta & 2 & 4 \end{pmatrix}$ es simétrica.

13. Si A y B son matrices simétricas de $n \times n$, pruebe que $A + B$ es simétrica.

14. Si A y B son matrices simétricas de $n \times n$, demuestre que $(AB)^t = BA$.

15. Demuestre que para cualquier matriz A la matriz producto AA^t está definido y es una matriz simétrica.

16. Demuestre que toda matriz diagonal es simétrica (vea el problema 1.8.25, página 114).

17. Demuestre que la transpuesta de toda matriz diagonal superior es triangular inferior (vea el problema 1.8.29, página 114).

18. Una matriz cuadrada se llama **antisimétrica** si $A^t = -A$ (es decir, $a_{ij} = -a_{ji}$). ¿Cuáles de las siguientes matrices son antisimétricas?

a. $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

19. Sean A y B dos matrices antisimétricas de $n \times n$. Demuestre que $A + B$ es antisimétrica.

20. Si A es una matriz real antisimétrica, demuestre que toda componente en la diagonal principal de A es cero.

21. Si A y B son matrices antisimétricas de $n \times n$, demuestre que $(AB)^t = BA$ de manera que AB es simétrica si y sólo si A y B conmutan.

22. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que la matriz $\frac{1}{2}(A + A^t)$ es simétrica.

23. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que $\frac{1}{2}(A - A^t)$ es antisimétrica.

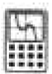
***24.** Demuestre que cualquier matriz cuadrada se puede escribir de una manera única como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

***25.** Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz con elementos reales no negativos que tiene las propiedades siguientes: *i)* $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$ y $a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1$ y *ii)* $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = 0$. Demuestre que A es invertible y que $A^{-1} = A^t$.

En los problemas 26 al 29 calcule $(A^t)^{-1}$ y $(A^{-1})^t$ y demuestre que son iguales.

26. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **27.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

28. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **29.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$



MANEJO DE CALCULADORA

TI-85

Para obtener A^t en la TI-85, oprima

2nd MATRX F3 (MATH) ALPHA A (T) F2 ENTER

CASIO fx-7700 GB

Para obtener A^t en la CASIO fx-7700 GB, primero obtenga A en la pantalla. Después presione F2 . A^t estará almacenado en la memoria C.

MATLAB 1.9

Información de MATLAB. Para la mayoría de las aplicaciones, para encontrar la transpuesta de A, A^t, se da **A'**. Aquí ' es el apóstrofe. Si A tiene elementos complejos, **A'** producirá la transpuesta conjugada compleja; si desea encontrar la transpuesta de A (sin conjugación compleja), use **A.'**.

Para generar matrices aleatorias, consulte los problemas de la sección anterior, MATLAB 1.6.

1. Genere cuatro pares, A y B, de matrices aleatorias tales que AB esté definido. Elija algunas matrices cuadradas y otras no cuadradas. Encuentre $(AB)^t - A^tB^t$ y $(AB)^t - B^tA^t$. Concluya una fórmula para $(AB)^t$ en términos de las transpuestas de A y B.

2. Consulte el problema 2 de MATLAB 1.8. Para cada matriz de ahí, verifique si A^t es o no invertible y relacione esto con la invertibilidad de A. Cuando tenga sentido para la matriz, compare **inv(A')** con **inv(A)'**.

3. Genere cuatro matrices cuadradas aleatorias de diferentes tamaños.

- **a.** Para cada matriz A, encuentre **B = A' + A**. Describa los patrones observados en la forma de estas matrices B.
- **b.** Para cada matriz A, sea **C = A' − A**. Describa los patrones observados en estas matrices C.
- **c.** Genere cuatro matrices aleatorias de diferentes tamaños, algunas cuadradas y otras no cuadradas. Para cada matriz F generada, encuentre **G = F*F'**. Describa los patrones observados en la forma de estas matrices G.
- **d.** (*Lápiz y papel*) Pruebe sus observaciones en los incisos a), b) y c) usando las propiedades de la transpuesta.

4. **a.** (*Lápiz y papel*) Si A es una matriz con elementos reales, explique por qué al resolver el sistema $A^t\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se obtienen todos los vectores reales $\mathbf{x}$ tales que $\mathbf{x}$ es perpendicular a todas las *columnas* de A.

   b. Para cada matriz A dada, encuentre todos los vectores reales $\mathbf{x}$ tales que $\mathbf{x}$ es perpendicular a todas las *columnas* de A.

   i. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **ii.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 0 \\ 7 & 0 & 4 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   iii. **A = rand(5,3)**

PROBLEMA PROYECTO

5. **Matrices ortogonales** Sea **A = 2*rand(4)−1** y sea **Q = orth(A)**. Q es un ejemplo de matriz *ortogonal*. Las matrices ortogonales tienen propiedades especiales que se explorarán en este problema.

   a. Genere un par de vectores aleatorios de 4×1, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$. Calcule el producto escalar de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$; llámelo **s**. Calcule el producto escalar de $Q\mathbf{x}$ y $Q\mathbf{y}$; llámelo **r**. Encuentre **s−r** y use **format short e** para el despliegue en pantalla. Repita para otros tres pares de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$.

   ¿A qué conclusión llega al comparar el producto escalar de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ con el producto escalar de $Q\mathbf{x}$ y $Q\mathbf{y}$?

   b. Pruebe su conclusión del inciso a). Genere tres matrices ortogonales Q de diferentes tamaños (usando el comando **orth**) y al menos dos pares de vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ por cada Q. Genere al menos una matriz compleja Q. Para cada Q y par $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, compare el producto escalar de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ con el producto escalar de $Q\mathbf{x}$ y $Q\mathbf{y}$. Escriba una descripción de su proceso y sus resultados.

   c. Para cada Q generada, demuestre que la longitud de cada columna de Q es igual a 1 y que cualesquiera dos columnas diferentes de Q son perpendiculares entre sí. (La longitud de un vector está dada por la raíz cuadrada del producto escalar de un vector consigo mismo: longitud = **sqrt(x'*x)**. Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es igual a cero.)

   d. Para cada Q, explore la relación entre **Q**, **Q'** e **inv(Q)**. Formule una conclusión sobre esta relación. Describa su investigación y su proceso de pensamiento. Genere otras dos matrices aleatorias ortogonales de tamaños más grandes y pruebe su conclusión.

   e. (*Lápiz y papel*) Utilice la conclusión a la que llegó en el inciso d) (y otras propiedades conocidas) para probar la conclusión del inciso b).

   Utilice la conclusión del inciso b) para probar la observación del inciso c). [*Sugerencia:* Dada una columna de Q, seleccione un vector adecuado $\mathbf{x}$ tal que $Q\mathbf{x}$ sea igual a la columna dada.]

1.10 MATRICES ELEMENTALES Y MATRICES INVERSAS

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces, como se verá enseguida, se pueden realizar operaciones elementales con renglones en A multiplicando A por la izquierda por una matriz adecuada. Las operaciones elementales con renglones son:

i. Multiplicar el renglón i por un número c diferente de cero. $R_i \rightarrow cR_i$

ii. Sumar un múltiplo del renglón i al renglón j. $R_j \rightarrow R_j + cR_i$

iii. Permutar (intercambiar) los renglones i y j. $R_i \rightleftarrows R_j$

DEFINICIÓN 1 **Matriz elemental** Una matriz (cuadrada) E de $n \times n$ se llama una **matriz elemental** si se puede obtener a partir de la matriz identidad, I_n, de $n \times n$ mediante *una sola* operación elemental con renglones.

Notación. Una matriz elemental se denota por E, o por cR_i, $R_j + cR_i$, o por P_{ij} según la forma en que se obtuvo de I. En este caso P_{ij} es la matriz obtenida al intercambiar los renglones i y j de I.

EJEMPLO 1 **Tres matrices elementales** Obtenga tres matrices elementales de 3×3.

i. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to 5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5R_2$ Matriz obtenida multiplicando el segundo renglón de I por 5.

ii. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_3 - 3R_1$ Matriz obtenida multiplicando el primer renglón de I por -3 y sumándolo al tercer renglón.

iii. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightleftarrows R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{23}$ Matriz obtenida permutando el segundo y tercer renglones de I. ✦

La prueba del siguiente teorema se deja como ejercicio (vea los problemas 54 al 56).

TEOREMA 1 Para realizar una operación elemental en una matriz A, se multiplica A por la izquierda por la matriz elemental adecuada. ✦

EJEMPLO 2 **Operaciones elementales mediante la multiplicación por matrices elementales.** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Realice las siguientes operaciones elementales con los renglones de A multiplicando A por la izquierda por una matriz elemental adecuada.

i. Multiplique el segundo renglón por 5.
ii. Multiplique el primer renglón por -3 y súmelo al tercer renglón.
iii. Permute el segundo y tercer renglones.

Solución Como A es una matriz de 3×4, cada matriz elemental E debe ser de 3×3, ya que E debe ser cuadrada y multiplica a A por la izquierda. Se usan aquí los resultados del ejemplo 1.

i. $(5R_2)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 10 & 15 & -25 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\textbf{ii. } (R_3 - 3R_1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -8 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{iii. } (P_{23})A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

◆

Considere los siguientes tres productos, con $c \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) sugieren que toda matriz elemental es invertible y que su inversa es del mismo tipo (tabla 1.4). Estos hechos se deducen a partir del teorema 1. Es evidente que si se realizan las operaciones $R_j \to R_j + cR_i$ seguida de $R_j \to R_j - cR_i$ sobre la matriz A, la matriz A no cambia. También, $R_i \to cR_i$ seguida de $R_i \to \frac{1}{c}R_i$, y la permuta de los mismos dos renglones dos veces deja la matriz A sin cambio. Se tiene

$$(cR_i)^{-1} = \frac{1}{c}R_i \qquad (4)$$

$$(R_j + cR_i)^{-1} = R_j - cR_i \qquad (5)$$

$$(P_{ij})^{-1} = P_{ij} \qquad (6)$$

La ecuación (6) indica que

Toda matriz de permutación elemental es su propia inversa.

Resumiendo los resultados:

Tabla 1.4

Matriz elemental tipo E	Efecto de multiplicar A por la izquierda por E	Representación simbólica de las operaciones elementales	Al multiplicar por la izquierda, E^{-1} hace lo siguiente	Representación simbólica de la operación inversa
Multiplicación	Multiplica el renglón i de A por $c \neq 0$	cR_i	Multiplica el renglón i de A por $\frac{1}{c}$	$\frac{1}{c}R_i$
Suma	Multiplica el renglón i de A por c y lo suma al renglón j	$R_j + cR_i$	Multiplica el renglón i de A por $-c$ y lo suma al renglón j	$R_j - cR_i$
Permutación	Permuta los renglones i y j de A	P_{ij}	Permuta los renglones i y j de A	P_{ij}

TEOREMA 2 Toda matriz elemental es invertible. El inverso de una matriz elemental es una matriz del mismo tipo. ◆

Nota. El inverso de una matriz elemental se puede encontrar por inspección. No es necesario hacer cálculos.

TEOREMA 3 Una matriz cuadrada es invertible si y sólo si es el producto de matrices elementales.

Demostración Sea $A = E_1E_2 \cdots E_m$ donde cada E_i es una matriz elemental. Por el teorema 2, cada E_i es invertible. Más aún, por el teorema 1.8.3, página 100, A es invertible† y

$$A^{-1} = E_m^{-1}E_{m-1}^{-1} \cdots E_2^{-1}E_1^{-1}$$

Inversamente, suponga que A es invertible. De acuerdo con el teorema 1.8.6 (teorema de resumen), A es equivalente por renglones a la matriz identidad. Esto significa que A se puede reducir a I mediante un número finito de operaciones elementales. Por el teorema 1 cada operación de este tipo se logra multiplicando A por la izquierda por una matriz elemental y por lo tanto, existen matrices elementales E_1, $E_2, \ldots, E_m$

† Aquí se usó la generalización del teorema 1.8.3 para más de dos matrices. Vea, por ejemplo, el problema 1.8.16 en la página 113.

tales que

$$E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1 A = I$$

Así, del teorema 1.8.7 en la página 112,

$$E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1 = A^{-1}$$

y como cada E_i es invertible por el teorema 2,

$$A = (A^{-1})^{-1} = (E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{m-1}^{-1} E_m^{-1} \qquad (7)$$

Como la inversa de una matriz elemental es una matriz elemental, se ha escrito A como el producto de matrices elementales y esto completa la prueba. ◆

EJEMPLO 3 Cómo escribir una matriz invertible como el producto de matrices elementales

Demuestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es invertible y escríbala como un producto de matrices elementales.

Solución Ya se ha trabajado con esta matriz, en el ejemplo 1.3.1 en la página 7. Para resolver el problema, se reduce A a I y se registran las operaciones elementales con renglones. En el ejemplo 1.8.6 en la página 106 se redujo A a I usando las siguientes operaciones:

$\frac{1}{2}R_1$ $\quad R_2 - 4R_1$ $\quad R_3 - 3R_1$ $\quad -\frac{1}{3}R_2$
$R_1 - 2R_2$ $\quad R_3 + 5R_2$ $\quad -R_3$ $\quad R_1 + R_3$
$R_2 - 2R_3$

A^{-1} se obtuvo comenzando con I y aplicando estas nueve operaciones elementales. Así, A^{-1} es el producto de nueve matrices elementales:

$$A^{-1} = \underset{R_2 - 2R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_1 + R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{-R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \underset{R_3 + 5R_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_1 - 2R_2}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\times \underset{-\frac{1}{3}R_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_3 - 3R_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_2 - 4R_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\frac{1}{2}R_1}{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Entonces $A = (A^{-1})^{-1}$ = producto de las inversas de las nueve matrices en orden opuesto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \underset{2R_1}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_2 + 4R_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_3 + 3R_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{-3R_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_1 + 2R_2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\times \underset{R_3 - 5R_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}} \underset{-R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \underset{R_1 - R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_2 + 2R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$ ✦

Se puede usar el teorema 3 para extender el teorema de resumen, cuya última versión se dio en la página 111.

TEOREMA 4 **Teorema de resumen (punto de vista 3)** Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes siete afirmaciones son equivalentes. Esto es, cada una implica a las otras seis (de manera que si una afirmación es cierta, todas son ciertas, y si una es falsa, todas son falsas).

i. A es invertible.

ii. La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

iv. A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n; es decir, la forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.

v. A se puede escribir como el producto de matrices elementales.

vi. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii. $\det A \neq 0$ (por ahora, $\det A$ está definido sólo si A es una matriz de 2×2).

Existe un resultado más que será útil en la sección 2.3. Primero, se necesita una definición (dada antes en el problema 1.8.29, página 114).

DEFINICIÓN 2 **Matriz triangular superior y matriz triangular inferior** Una matriz cuadrada se llama **triangular superior (inferior)** si todas sus componentes abajo (arriba) de la diagonal principal son cero.

Nota. a_{ij} está abajo de la diagonal principal si $i > j$.

EJEMPLO 4 **Dos matrices triangulares superiores y dos matrices triangulares inferiores** Las matrices U y V son triangulares superiores mientras que las matrices L y M son triangulares inferiores:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$ ✦

TEOREMA 5 Sea A una matriz cuadrada. Entonces A se puede escribir como un producto de matrices elementales y una matriz triangular superior U. En el producto, las matrices elementales están a la izquierda y la matriz triangular superior a la derecha.

Demostración La eliminación gaussiana para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ da como resultado una matriz triangular superior. Para ver esto, observe que la eliminación gaussiana terminará cuando la matriz esté en la forma escalonada por renglones, y la forma escalonada por renglones de una matriz cuadrada es triangular superior. Se denota por U a la forma escalonada por renglones de A. Entonces A se reduce a U mediante una serie de operaciones elementales por renglón, cada una de las cuales se puede obtener multiplicando por una matriz elemental. Así,

$$U = E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1 A$$

y

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{m-1}^{-1} E_m^{-1} U$$

Como la inversa de una matriz elemental es una matriz elemental, se ha escrito A como el producto de matrices elementales y U. ✦

EJEMPLO 5 **Cómo escribir una matriz como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior** Escriba la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior.

Solución Se reduce A por renglones para obtener la forma escalonada por renglones:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{3}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Después, al trabajar hacia atrás, se ve que

$$U=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-5\\0&0&0\end{pmatrix}=\underset{R_3+R_2}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}\underset{R_3-R_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}}$$

$$\times\underset{R_2-2R_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\underset{\frac{1}{3}R_1}{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\underset{A}{\begin{pmatrix}3&6&9\\2&5&1\\1&1&8\end{pmatrix}}$$

y tomando las inversas de las cuatro matrices elementales, se obtiene

$$A=\begin{pmatrix}3&6&9\\2&5&1\\1&1&8\end{pmatrix}=\underset{3R_1}{\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\underset{R_2+2R_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

$$\times\underset{R_3+R_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}\underset{R_3-R_2}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}}\underset{U}{\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-5\\0&0&0\end{pmatrix}}$$ ✦

PROBLEMAS 1.10

Autoevaluación

Falso-verdadero

I. El producto de dos matrices elementales es una matriz elemental.

II. El inverso de una matriz elemental es una matriz elemental.

III. Toda matriz se puede escribir como el producto de matrices elementales.

IV. Toda matriz cuadrada se puede escribir como el producto de matrices elementales.

V. Toda matriz invertible se puede escribir como el producto de matrices elementales.

VI. Toda matriz cuadrada se puede escribir como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior.

Opción múltiple

VII. La inversa de $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$ es

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

VIII. La inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ es______.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

IX. La inversa de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es______.

a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En los problemas 1 al 12 determine cuáles matrices **son** matrices elementales.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En los problemas 13 al 20 escriba la matriz elemental de 3×3 que lleva a cabo las operaciones con renglones dadas sobre una matriz A de 3×5 mediante multiplicaciones por la izquierda.

13. $R_2 \to 4R_2$ **14.** $R_2 \to R_2 + 2R_1$ **15.** $R_1 \to R_1 - 3R_2$

Respuestas a la autoevaluación

I. F **II.** V **III.** F **IV.** F **V.** V **VI.** V **VII.** a
VIII. b **IX.** d

16. $R_1 \to R_1 + 4R_3$ **17.** $R_1 \rightleftarrows R_3$ **18.** $R_2 \rightleftarrows R_3$

19. $R_2 \to R_2 + R_3$ **20.** $R_3 \to -R_3$

En los problemas 21 al 30 encuentre la matriz elemental E tal que $EA = B$.

21. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$

22. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

23. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

24. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

25. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

26. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

27. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

28. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

29. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -10 & -27 & -3 \end{pmatrix}$

30. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

En los problemas 31 al 40 encuentre la inversa de la matriz elemental dada.

31. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **32.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **33.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **35.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **36.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **38.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **39.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

40. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En los problemas 41 al 48 demuestre que cada matriz es invertible y escríbala como un producto de matrices elementales.

41. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ **42.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **43.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

44. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

48. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

49. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ donde $ac \neq 0$. Escriba A como un producto de tres matrices elementales y concluya que A es invertible.

50. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ donde $adf \neq 0$. Escriba A como un producto de seis matrices elementales y concluya que A es invertible.

*51. Sea A una matriz triangular superior de $n \times n$. Pruebe que si toda componente en la diagonal de A es diferente de cero, entonces A es invertible. [*Sugerencia:* vea los problemas 49 y 50].

*52. Demuestre que si A es una matriz triangular superior de $n \times n$ con componentes diferentes de cero en la diagonal, entonces A^{-1} es triangular superior.

*53. Utilice el teorema 1.9.1*iv*), página 122, y el resultado del problema 52 para demostrar que si A es una matriz triangular inferior con componentes diferentes de cero en la diagonal, entonces A es invertible y A^{-1} es triangular inferior.

54. Demuestre que si P_{ij} es la matriz de $n \times n$ obtenida permutando los renglones i y j de I_n, entonces $P_{ij}A$ es la matriz obtenida al permutar los renglones i y j de A.

55. Sea A_{ij} la matriz con c en la posición ji, unos en la diagonal y ceros en otro lado. Demuestre que $A_{ij}A$ es la matriz obtenida al multiplicar el renglón i de A por c y sumarlo al renglón de j.

56. Sea M_i la matriz con c en la posición ii, unos en las otras posiciones de la diagonal, y ceros en otro lado. Demuestre que M_iA es la matriz obtenida al multiplicar el renglón i de A por c.

En los problemas 57 al 62 escriba cada matriz cuadrada como un producto de matrices elementales y de una matriz triangular superior.

57. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

58. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

59. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

60. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

61. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

62. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

MATLAB 1.10

1. Este problema explora la forma de la matrices elementales. Observe que cada matriz elemental se puede obtener a partir de la matriz identidad con un cambio. Por ejemplo,

$$F=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&c&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \text{es la identidad con } F(2,2)=c$$

En MATLAB, **F = eye(3); F(2,2) = c**

$$F=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&c&1\end{pmatrix} \qquad \text{es la identidad con } F(3,2)=c$$

En MATLAB, **F = eye(3); F(3,2) = c**

$$F=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \qquad \text{es la identidad con los renglones 2 y 3 intercambiados}$$

En MATLAB, **F = eye(3); F([2 3],:) = F([3 2],:)**

a. Dé **A = round(10*(2*rand(4)–1)**. De la manera que se acaba de describir, introduzca las matrices F que representan las siguientes operaciones con renglones. Encuentre **F*A** para probar que F realiza las operaciones deseadas.

i. $R_3 \to 4R_3$ **ii.** $R_1 \to R_1 - 3R_2$ **iii.** Intercambio de R_1 y R_4

b. Encuentre **inv(F)** para cada F de a). Para cada F, explique por qué **inv(F)** es una matriz elemental y describa qué operaciones con renglones representa. ¿Por qué es esta operación la "inversa" de la operación con renglones original?

2. Se quiere reducir una matriz dada a la forma escalonada reducida por renglones multiplicándola por matrices elementales, guardando el producto en el orden en el que se usan. Por exactitud deberán calcularse los multiplicadores usando la notación matricial. (Vea en MATLAB 1.5, problema 1, el cálculo de los multiplicadores y vea en el problema 1 de esta sección cómo se forman las matrices elementales.)

a. Sea $A=\begin{pmatrix}7&2&3\\-1&0&4\\2&1&1\end{pmatrix}$

Introduzca esta matriz y guárdela en A. Dé **B = A**. Esto pone una copia de A en B. Se puede reducir B de manera que contenga **rref(A)** y quede en A la matriz original.

c = –B(2,1)/B(1,1)

F1 = eye(3); F1(2,1) = c

B = F1*B

F = F1

c = –B(3,1)/B(1,1)

forme **F2** con c en la posición correcta

B = F2*B

F = F2*F

Continúe de esta manera hasta que **B** esté en la forma escalonada reducida por renglones. Si cualquier elemento pivote es cero, será necesario realizar un intercambio de renglones multiplicando por la matriz elemental adecuada.

b. Encuentre **F*A** y **A*F**, donde F es el producto de las matrices elementales usadas y A es la matriz original. ¿Qué le dice esto sobre la relación entre F y A? (Justifique su respuesta.)

c. Encuentre $D = F1^{-1}*F2^{-1}*\ldots*Fm^{-1}$, donde $F1$ es la primera matriz elemental usada y Fm es la última. ¿Cuál es la relación entre D y A? (Justifique su respuesta.)

d. Repita los incisos a) a c) para $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. a. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Realice las operaciones por renglones usando la multiplicación por matrices elementales que se describió en el problema 1 de esta sección, guardando los productos de las matrices elementales pero realizando sólo operaciones con renglones de la forma $R_j \to R_j + cR_i$ hasta que A se reduce a la forma triangular superior. (No cree unos en las posiciones pivote.) Dé a cada matriz elemental un nombre de variable y despliegue todas las que use y sus inversas. Llame U a la forma triangular superior, que es el resultado final, y F al producto de todas las matrices elementales usadas.

b. Encuentre $L = F1^{-1}*F2^{-1}*\ldots*Fm^{-1}$, donde $F1$ es la primera matriz elemental usada y Fm la última. ¿Qué puede decir acerca de la forma de L, los de las matrices elementales y los de las inversas de éstas? (Analice los elementos y sus posiciones.)

Explique por qué podemos decir que L contiene toda la información necesaria para reducir A a la forma triangular superior.

c. Verifique que $LU = A$. (Asegúrese de que A sea la matriz original. Recuerde que U es el resultado final de la reducción.) Pruebe que esto debe ser cierto.

d. Repita los incisos a) a c) para $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 & 3 \\ 8 & 10 & 1 & 4 \\ 10 & 7 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$.

1.11 FACTORIZACIONES *LU* DE UNA MATRIZ

En esta sección se muestra cómo se escribe una matriz cuadrada como un producto de matrices triangulares. Esta factorización es útil para resolver sistemas lineales sobre una computadora y se puede usar para probar resultados importantes sobre matrices.

En la sección 1.3 se estudió la **eliminación gaussiana**. En ese proceso se puede reducir a una matriz a la forma escalonada por renglones. Recuerde que la forma escalonada por renglones de una matriz cuadrada es una matriz triangular superior con unos y ceros en la diagonal principal.

Por ejemplo, la forma escalonada por renglones de una matriz de 3 × 3 se ve como sigue:

$$\begin{pmatrix}1 & x & x\\0 & 1 & x\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix}1 & x & x\\0 & 1 & x\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix}1 & x & x\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix}1 & x & x\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{o}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & x\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Para los propósitos de esta sección se quiere, más bien, reducir por renglones una matriz a la forma triangular superior donde los números diferentes de cero en la diagonal principal no son necesariamente unos. Esto se puede hacer simplemente no insistiendo en que cada pivote sea igual a 1.

EJEMPLO 1 **Encuentre una factorización LU de una matriz A** Reduzca por renglones la matriz

$$A = \begin{pmatrix}2 & 3 & 2 & 4\\4 & 10 & -4 & 0\\-3 & -2 & -5 & -2\\-2 & 4 & 4 & -7\end{pmatrix}$$

a una matriz triangular superior y después escriba A como un producto de una matriz triangular inferior y una matriz triangular superior.

Solución Se procede como antes; sólo que esta vez no se dividen los elementos de la diagonal (pivotes) por sí mismos:

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 2 & 4\\4 & 10 & -4 & 0\\-3 & -2 & -5 & -2\\-2 & 4 & 4 & -7\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 + \frac{3}{2}R_1\\ R_4 \to R_4 + R_1}]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix}2 & 3 & 2 & 4\\0 & 4 & -8 & -8\\0 & \frac{5}{2} & -2 & 4\\0 & 7 & 6 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - \frac{7}{4}R_2]{R_3 \to R_3 - \frac{5}{8}R_2} \begin{pmatrix}2 & 3 & 2 & 4\\0 & 4 & -8 & -8\\0 & 0 & 3 & 9\\0 & 0 & 20 & 11\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - \frac{20}{3}R_3} \begin{pmatrix}2 & 3 & 2 & 4\\0 & 4 & -8 & -8\\0 & 0 & 3 & 9\\0 & 0 & 0 & -49\end{pmatrix} = U$$

Usando las matrices elementales como en el ejemplo 1.10.5, página 133, se puede escribir

$$U = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & -\frac{20}{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & -\frac{7}{4} & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & -\frac{5}{8} & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\\frac{3}{2} & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} A$$

o

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix} U$$

Se ha escrito A como un producto de seis matrices elementales y una matriz triangular superior. Sea L el producto de las matrices elementales. Debe usted verificar que

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{7}{4} & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix},$$ que es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal.

Después se puede escribir $A = LU$, donde L es triangular inferior y U es triangular superior. Los elementos de la diagonal de L son todos iguales a 1 y los elementos de la diagonal de U son los pivotes. Esta factorización se llama **factorización LU de A**. ✦

El procedimiento usado en el ejemplo 1 se puede llevar a cabo mientras no se requieran permutaciones para poder reducir A a la forma triangular. Esto no siempre se puede. Por ejemplo, el primer paso en la reducción por renglones de

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

es permutar (intercambiar) los renglones 1 y 2 o los renglones 1 y 3.

Suponga que por el momento esa permutación no es necesaria. Entonces, igual que en el ejemplo 1, se puede escribir $A = E_1E_2 \cdots E_n U$, donde U es una matriz triangular superior y cada matriz elemental es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal. Esto se deduce del hecho de que E es de la forma $R_j + cR_i$. (No hay permutaciones ni multiplicaciones de renglones por constantes.) Más aún, los números que se hacen cero en la reducción por renglones están siempre *abajo* de la diagonal de manera que en $R_j + cR_i$ siempre se cumple que $j > i$. Así, las c aparecen abajo de la diagonal. La prueba del siguiente teorema no es difícil (vea los problemas 24 y 25).

TEOREMA 1 El producto de las matrices triangulares inferiores con unos en la diagonal es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal. Más aún, el producto de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior. ✦

TEOREMA 2 **Teorema de factorización *LU*** Sea A una matriz cuadrada ($n \times n$) y suponga que A se puede reducir por renglones a una matriz triangular U sin hacer algunas permutaciones entre sus renglones. Entonces existe una matriz triangular inferior L invertible con unos en la diagonal tal que $A = LU$. Si, además, U tiene n pivotes (es decir, A es invertible), entonces esta factorización es única.

Demostración U y L se obtienen como en el ejemplo 1. Sólo es necesario probar la unicidad en el caso de que A sea invertible. Como U tiene n pivotes, su forma escalonada por renglones también tiene n pivotes (para ver esto divida cada renglón de U por el pivote en ese renglón). Entonces, por el teorema de resumen en la página 132, U es invertible.

Para demostrar que L es invertible, considere la ecuación $L\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se deduce que $x_1 = 0$, $a_{21}x_1 + x_2 = 0$, etcétera, lo que muestra que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ y L es invertible por el teorema de resumen. Para demostrar la unicidad, suponga que $A = L_1U_1 = L_2U_2$. Entonces

$$U_1U_2^{-1} = (L_1^{-1}L_1)(U_1U_2^{-1}) = L_1^{-1}(L_1U_1)U_2^{-1} = L_1^{-1}(L_2U_2)U_2^{-1} = \\ (L_1^{-1}L_2)(U_2U_2^{-1}) = L_1^{-1}L_2$$

Por el resultado del problema 1.8.30 en la página 114, U_2^{-1} es triangular superior y L_1^{-1} es triangular inferior. Todavía más, según el teorema 1, $L_1^{-1}L_2$ es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal mientras que $U_1U_2^{-1}$ es triangular superior. La única manera en que una matriz triangular superior y una inferior pueden ser iguales es si ambas son diagonales. Como $L_1^{-1}L_2$ tiene unos en la diagonal, se ve que

$$U_1U_2^{-1} = L_1^{-1}L_2 = I$$

de lo que se deduce que $U_1 = U_2$ y $L_1 = L_2$. ✦

Uso de la factorización *LU* para resolver un sistema de ecuaciones

Suponga que se quiere resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es invertible. Si A satisface la hipótesis del teorema 2, se puede escribir

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Como L es invertible, existe un vector único $\mathbf{y}$ tal que $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Como U también es invertible, existe un vector único $\mathbf{x}$ tal que $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Entonces $A\mathbf{x} = L(U\mathbf{x}) = L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ y nuestro sistema está resuelto. Observe que $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ se puede resolver directamente por **sustitución hacia adelante** y $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede resolver directamente por **sustitución hacia atrás**. Se ilustra esto en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 **Uso de la factorización LU para resolver un sistema** Resuelva el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución Del ejemplo 1 se puede escribir $A = LU$, donde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{7}{4} & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix}$$

El sistema $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ conduce a las ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 4 \\ 2y_1 + y_2 \qquad\qquad\quad &= -8 \\ -\tfrac{3}{2}y_1 + \tfrac{5}{8}y_2 + y_3 \qquad &= -4 \\ -y_1 + \tfrac{7}{4}y_2 + \tfrac{20}{3}y_3 + y_4 &= -1 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} y_1 &= 4 \\ y_2 &= -8 - 2y_1 = -16 \\ y_3 &= -4 + \tfrac{3}{2}y_1 - \tfrac{5}{8}y_2 = 12 \\ y_4 &= -1 + y_1 - \tfrac{7}{4}y_2 - \tfrac{20}{3}y_3 = -49 \end{aligned}$$

Se acaba de realizar la sustitución hacia adelante. Ahora, de $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ se obtiene

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 4 \\ 4x_2 - 8x_3 - 8x_4 &= -16 \\ 3x_3 + 9x_4 &= 12 \\ -49x_4 &= -49 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} x_4 &= 1 \\ 3x_3 &= 12 - 9x_4 = 3, \text{ de manera que } x_3 = 1 \\ 4x_2 &= -16 + 8x_3 + 8x_4 = 0, \text{ de manera que } x_2 = 0 \\ 2x_1 &= 4 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -2, \text{ por lo que } x_1 = -1 \end{aligned}$$

La solución es

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

◆

La factorización $PA = LU$

Suponga que con el fin de reducir A a una matriz triangular se requiere alguna permutación. Una matriz de permutación elemental es una matriz elemental asociada con la operación con renglones $R_i \leftrightarrows R_j$. Suponga que por el momento se sabe antes de comenzar qué permutaciones deben realizarse. Cada permutación se lleva a cabo multiplicando A por la izquierda por una matriz de permutación elemental denotada por P_i. Suponga que en la reducción por renglones se realizan m permutaciones. Sea

$$P = P_n P_{n-1} \cdots P_2 P_1$$

El producto de las matrices de permutaciones *elementales* se llama **matriz de permutación.** De manera alternativa, una matriz de permutación es una matriz de $n \times n$ cuyos renglones son los renglones de I_n, pero no necesariamente en el mismo orden.

Ahora, hacer las n permutaciones de antemano es equivalente a multiplicar A por la izquieda por P. Es decir,

> PA es una matriz que puede ser reducida por renglones a una matriz triangular superior sin realizar permutaciones adicionales.

EJEMPLO 3 Una factorización $PA = LU$

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Para reducir A por renglones a la forma triangular superior, primero se intercambian los renglones 1 y 3 y después se continúa como sigue:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightleftarrows R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightleftarrows R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Al realizar esta reducción por renglones se hicieron dos permutaciones. Primero se intercambiaron los renglones 1 y 3 y después se intercambiaron los renglones 2 y 3:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$P = P_2 P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$PA=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&3\\2&-4&7\\1&-2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&5\\0&2&3\\2&-4&7\end{pmatrix}.$$

Esta matriz se puede reducir a una forma triangular superior sin permutaciones. Se tiene

$$\begin{pmatrix}1&-2&5\\0&2&3\\2&-4&7\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_1}\begin{pmatrix}1&-2&5\\0&2&3\\0&0&-3\end{pmatrix}=U$$

Así, como en el ejemplo 1,

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}PA=U$$

o

$$PA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&5\\0&2&3\\0&0&-3\end{pmatrix}=LU$$

◆

Al generalizar el resultado del ejemplo 3 se obtiene el siguiente teorema.

TEOREMA 3 Sea A una matriz invertible de $n\times n$. Entonces existe una matriz de permutación P tal que

$$PA=LU$$

donde L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U es triangular superior. Para cada P (puede haber más de una), las matrices L y U son únicas. ◆

Nota. Si se elige una P diferente, entonces se obtienen matrices L y U diferentes. Por ejemplo, en el ejemplo 3, sea

$$P^*=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$ (que corresponde a la permutación de los dos primeros renglones en el primer paso)

Se debe verificar que

$$P^*A = L_1U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Solución de un sistema usando la factorización $PA = LU$

Considere el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y suponga que $PA = LU$. Entonces

$$PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$
$$LU\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

y se puede resolver este sistema de la misma manera que en el ejemplo 2.

EJEMPLO 4 **Solución de un sistema usando la factorización $PA = LU$** Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 9 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Solución Se puede escribir este sistema como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Entonces, del ejemplo 3

$$LU\mathbf{x} = PA\mathbf{x} = P\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Se busca una $\mathbf{y}$ tal que $L\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$. Esto es,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Entonces $y_1 = -6$, $y_2 = 7$ y $2y_1 + y_3 = 9$, por lo que $y_3 = 21$ y

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Continuando, se busca una **x** tal que $U\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix}$; es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -6 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ -3x_3 &= 21 \end{aligned}$$

Por último,

$$x_3 = -7$$
$$2x_2 + 3(-7) = 7, \text{ de manera que } x_2 = 14$$
$$x_1 - 2(14) + 5(-7) = -6, \text{ por lo que } x_1 = 57$$

La solución es

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 57 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix}$$

✦

Una forma sencilla para encontrar la factorización *LU* de una matriz

Suponga que A es una matriz cuadrada que se puede reducir a una matriz triangular superior sin realizar permutaciones. Entonces existe un camino más sencillo para encontrar la factorización LU de A sin usar la reducción por renglones. Este método se ilustrará en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 **Un camino más sencillo para obtener la factorización *LU*** Encuentre la factorización LU de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Solución Este problema se resolvió en el ejemplo 1. Ahora se usará un método más sencillo. Si $A = LU$, se sabe que A se puede factorizar como:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & u & v & w \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} = LU$$

Observe que el primer renglón de U es el mismo que el primer renglón de A porque al reducir A a la forma triangular, no tiene que hacerse nada al primer renglón.

Se pueden obtener todos los coeficientes que faltan con sólo multiplicar las matrices. La componente 2,1 de A es 4. Así, el producto escalar del segundo renglón de L y la primera columna de U es igual a 4:

$$4 = 2a \text{ o } a = 2$$

Así,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \not{b}-\frac{3}{2} & \not{c}\frac{5}{8} & 1 & 0 \\ \not{d}-1 & \not{e}\frac{7}{4} & \not{f}\frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & \not{u}4 & \not{v}-8 & \not{w}-8 \\ 0 & 0 & \not{x}3 & \not{y}9 \\ 0 & 0 & 0 & \not{z}-49 \end{pmatrix}$$

Después se tiene:

componente 2,2: $10 = 6 + u \Rightarrow u = 4$

De aquí en adelante se pueden insertar los valores que se encuentran en L y U:

componente 2,3: $-4 = 4 + v \Rightarrow v = -8$

componente 2,4: $0 = 8 + w \Rightarrow w = -8$

componente 3,1: $-3 = 2b \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$

componente 3,2: $-2 = -\frac{9}{2} + 4c \Rightarrow c = \frac{5}{8}$

componente 3,3: $-5 = -3 - 5 + x \Rightarrow x = 3$

componente 3,4: $-2 = -6 - 5 + y \Rightarrow y = 9$

componente 4,1: $-2 = 2d \Rightarrow d = -1$

componente 4,2: $4 = -3 + 4e \Rightarrow e = \frac{7}{4}$

componente 4,3: $4 = -2 - 14 + 3f \Rightarrow f = \frac{20}{3}$

componente 4,4: $-7 = -4 - 14 + 60 + z \Rightarrow z = -49$

El resultado es la factorización que se obtuvo en el ejemplo 1 con un esfuerzo considerablemente menor. ✦

Observación. Es sencillo poner en práctica la técnica ilustrada en el ejemplo 5 en una computadora.

ADVERTENCIA

La técnica en el ejemplo 5 trabaja sólo si A se puede reducir a una matriz triangular sin realizar permutaciones. Si las permutaciones son necesarias, primero se debe multiplicar A por la izquierda por una matriz de permutación adecuada; después se puede aplicar este proceso para obtener la factorización $PA = LU$.

Factorización *LU* para matrices singulares

Si A es una matriz cuadrada singular (no invertible), entonces la forma escalonada por renglones de A tendrá al menos un renglón de ceros, al igual que la forma triangular de A. Es posible que todavía se pueda escribir $A = LU$ o $PA = LU$, pero en este caso U no será invertible y L y U pueden no ser únicas.

EJEMPLO 6 **Cuando A no es invertible, la factorización LU puede no ser única** Usando la técnica de los ejemplos 1 o 5, se obtiene la factorización

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = LU$$

Sin embargo, si se hace $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & x & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A = L_1U$ para cualquier número real x. Así, en este caso, A tiene una factorización LU pero no es única. Debe verificarse que A no es invertible.

Por otro lado,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L'U'$$

y esta factorización es única —aunque B no sea invertible. El lector debe verificar estos hechos.

Este ejemplo muestra que si una matriz cuadrada con una factorización LU no es invertible, entonces su factorización LU puede ser o no única. ◆

Factorización *LU* para matrices no cuadradas

En ocasiones es posible encontrar factorizaciones LU para matrices que no son cuadradas.

TEOREMA 4 **Factorización LU para matrices no cuadradas** Sea A una matriz de $m \times n$. Suponga que A se puede reducir a su forma escalonada por renglones sin realizar permutaciones. Entonces existen una matriz L triangular inferior de $m \times m$ con unos en la diagonal y una matriz U de $m \times n$ con $u_{ij} = 0$ si $i > j$ tales que $A = LU$. ◆

Nota. La condición $U_{ij} = 0$ si $i > j$ significa que U es triangular superior en el sentido de que todos los elementos abajo de la "diagonal" son 0. Por ejemplo, una matriz U de 3×5 que satisface esta condición tiene la forma

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ 0 & d_2 & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & d_3 & u_{34} & u_{35} \end{pmatrix} \tag{1}$$

mientras que una matriz U de 5×3 que satisface esta condición tiene la forma

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & d_2 & u_{23} \\ 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

La prueba de este teorema no se da aquí; en su lugar se ilustra con dos ejemplos.

EJEMPLO 7 **Factorización LU de una matriz de 4×3** Encuentre la factorización LU de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -12 \end{pmatrix}$$

Solución Procediendo como en el ejemplo 5 se establece

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & u & v \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = LU$$

Debe verificar que esto lleva de inmediato a

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & \frac{15}{2} & 1 & 0 \\ 4 & \frac{7}{2} & \frac{13}{19} & 1 \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -76 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◆

EJEMPLO 8 **Factorización LU de una matriz de 3×4** Encuentre la factorización LU de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución Se escribe

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & u & v & w \\ 0 & 0 & x & y \end{pmatrix}$$

Al despejar las variables como en el ejemplo 5 se obtiene

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$ ◆

Nota. Como en el caso de una matriz cuadrada singular, si una matriz no cuadrada tiene una factorización LU, puede ser o no única.

Una observación sobre las computadoras y la factorización *LU*

Los sistemas de software TI-85, MATLAB y otros, pueden llevar a cabo la factorización $PA = LU$ de una matriz cuadrada. Sin embargo, la matriz L que se obtiene a veces no es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal pero puede ser una permutación de tal matriz. De otra manera, el sistema puede dar una matriz triangular inferior L y una U con unos en la diagonal. La razón de esto es que estos sistemas usan una factorización LU para calcular las inversas y los determinantes y para resolver sistemas de ecuaciones. Ciertos reordenamientos o permutaciones minimizarán los errores de redondeo acumulados. Se profundiza sobre estos errores y procedimientos en los apéndices 3 y 4.

Mientras tanto, debe tenerse en cuenta que los resultados que se obtienen en la calculadora o computadora con frecuencia serán diferentes de los obtenidos a mano. En particular, si A se puede reducir a una matriz triangular sin permutaciones, entonces cuando $PA = LU$, $P = I$. No obstante, muchas veces se obtendrá una P diferente en la calculadora. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

igual que en los ejemplos 1 y 5, entonces MATLAB da la factorización $A = LU$, donde

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{9} & -\frac{40}{83} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{11}{18} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{83}{9} & \frac{41}{18} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{294}{83} \end{pmatrix}$$

Nota. Una permutación de renglones de L lleva a una matriz triangular inferior con unos en la diagonal.

294487

PROBLEMAS 1.11

Autoevaluación

Falso-verdadero

I. Para toda matriz cuadrada A existen matrices invertibles L y U tales que $A = LU$, donde L es triangular inferior con unos en la diagonal y U es triangular superior.

II. Para toda matriz invertible A, existen matrices L y U como en el problema I.

III. Para toda matriz invertible A existe una matriz de permutación P tal que $PA = LU$, donde L y U son como en el problema I.

IV. El producto de matrices de permutación es una matriz de permutación.

En los problemas 1 al 8 encuentre la matriz triangular inferior L con unos en la diagonal y una matriz triangular superior U tal que $A = LU$.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ 6 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

En los problemas 9 al 16 resuelva el sistema dado usando la factorización LU encontrada en los problemas 1 al 8. Esto es, resuelva $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

11. $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

14. $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ 6 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$

Respuestas a la autoevaluación

I. F **II.** F **III.** V **IV.** V

15. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -1 & 5 & 8\\ 2 & 3 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$; $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}3\\ -11\\ 4\\ -5\end{pmatrix}$

16. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 6\\ 4 & 7 & 2 & 1\\ -2 & 5 & -2 & 0\\ 0 & -4 & 5 & 2\end{pmatrix}$; $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 4\end{pmatrix}$

En los problemas 17 al 23, a) encuentre una matriz de permutación P y matrices triangulares inferior y superior L y U tales que $PA=LU$; b) utilice el resultado del inciso a) para resolver el sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

17. $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$; $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}3\\ -5\end{pmatrix}$

18. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$; $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$

19. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 7\\ 4 & 1 & 5\end{pmatrix}$; $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$

20. $A=\begin{pmatrix}0 & 5 & -1\\ 2 & 3 & 5\\ 4 & 6 & -7\end{pmatrix}$; $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}10\\ -3\\ 5\end{pmatrix}$

21. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 4 & -1 & 5\\ 2 & 0 & 3 & 1\\ 1 & -4 & 5 & 6\end{pmatrix}$; $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$

22. $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2 & 3\\ 5 & 0 & -6 & 4\\ 2 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$; $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 5\\ 7\end{pmatrix}$

23. $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 4 & -3 & 2\\ 1 & 2 & -3 & 2\\ -2 & -4 & 5 & -10\end{pmatrix}$; $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}6\\ 1\\ 0\\ 5\end{pmatrix}$

24. Suponga que L y M son triangulares inferiores con unos en la diagonal. Demuestre que LM es triangular inferior con unos en la diagonal. [*Sugerencia:* Si $B=LM$, demuestre que

$$b_{ii}=\sum_{k=1}^{n} l_{ik}m_{ki}=1 \quad \text{y} \quad b_{ij}=\sum_{k=1}^{n} l_{ik}m_{kj}=0 \qquad \text{si } j>i.]$$

25. Demuestre que el producto de dos matrices triangulares superiores es triangular superior.

26. Demuestre que $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -4 & -2\\ 4 & -8 & -4\end{pmatrix}$ tiene más de una factorización LU.

27. Haga lo mismo con la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -6 & 0 \\ 5 & -2 & -4 & 5 \\ 1 & -4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

En los problemas 28 al 32 encuentre una factorización LU para cada matriz singular:

28. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 13 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

En los problemas 33 al 38 encuentre una factorización LU para cada matriz no cuadrada.

33. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

38. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \\ -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

MANEJO DE CALCULADORA

TI-85

La factorización $PA = LU$ se puede obtener en la calculadora TI-85. Una vez introducida la matriz A, oprima las siguientes teclas:

[2nd] [MATRX] [F3] (MATH) [MORE] [F3] (LU) [ALPHA] [A] [,] [ALPHA] [L] [,] [ALPHA] [U] [,] [ALPHA] [P] [)] [ENTER]

Aparecerá la palabra "Done". Se puede obtener la matriz L oprimiendo [ALPHA] [L] [ENTER] y similarmente para U y P. Sin embargo, el resultado obtenido no será igual al obtenido a mano. Se obtiene U con unos en la diagonal.

En los problemas 39 al 44 encuentre la factorización $PA = LU$ en una calculadora.

39. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

40. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 9 \\ 4 & 12 & 16 & -8 \\ 13 & 2 & 5 & 3 \\ 16 & 5 & -8 & 4 \end{pmatrix}$

41. $A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 9 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 16 & -5 & 11 & 8 \end{pmatrix}$

42. $A = \begin{pmatrix} 23 & 10 & 4 & -8 & 26 \\ 14 & 5 & 9 & -18 & 13 \\ 71 & -46 & 59 & 65 & -22 \\ 35 & 47 & -81 & 23 & -50 \\ 14 & 29 & 31 & 26 & 92 \end{pmatrix}$

43. $A = \begin{pmatrix} 0.21 & 0.32 & -0.34 & 0.37 \\ 0.91 & 0.23 & 0.16 & -0.20 \\ 0.46 & 0.08 & 0.33 & -0.59 \\ 0.83 & 0.71 & -0.68 & 0.77 \end{pmatrix}$

44. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

MATLAB 1.11

1. Siguiendo los pasos descritos en el problema 3 de MATLAB 1.10, encuentre la descomposición LU para A; es decir, encuentre L y U y verifique que $LU = A$. Aquí U no es triangular superior sino que está en la forma escalonada reducida por renglones (excepto que los pivotes no necesariamente son iguales a 1):

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 & 6 \\ 10 & 1 & -8 & 9 \\ 4 & 7 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

2. El uso de la descomposición LU para resolver sistemas (con soluciones únicas) es más eficiente que los otros métodos presentados.

Información de MATLAB. El comando **x = A\b** resuelve el sistema $[A\ \ \mathbf{b}]$ encontrando la descomposición LU y después haciendo sustituciones hacia adelante y hacia atrás. El comando **flops** cuenta el número de operaciones con punto flotante (significativas) que se realizan. El comando **flops(0)** inicia la cuenta en 0.

a. Elija **A = rand(5)** y **b = rand(5,1)**. Introduzca

flops(0), rref([A b]), frref = flops
flops(0), x = A\b, flu = flops

b. Repita para otros tres pares A y **b** (utilice tamaños diferentes y mayores que 5).

c. Comente la comparación de las dos cuentas flop, **frref** y **flu**.

3. MATLAB puede encontrar una descomposición LU, pero puede no ser lo que usted espera. Casi siempre existe una matriz de permutación P implícita.

a. Sea **A = 2*rand(3) – 1**. Introduzca **[L,U,P] = lu(A)** y verifique que $LU = PA$. Repita para dos o más matrices cuadradas aleatorias de diferentes tamaños.

b. La razón por la que casi siempre existe una P es que para minimizar los errores de redondeo, se intercambian los renglones para que el elemento mayor (en valor absoluto) de una columna (entre los renglones que no se han usado) esté en la posición pivote.

Sea **A = round(10*(2*rand(4)–1))**. Para esta A, encuentre L, U y P usando el comando **lu**. Sea **C = P*A**.

i. Reduzca a la forma triangular usando operaciones con renglones de la forma $R_j \rightarrow R_j + c * R_p$. (Calcule sus multiplicadores usando la notación matricial y realizando las operaciones con renglones mediante la multiplicación por matrices elementales.) (Vea el problema 3 de MATLAB 1.10.)

ii. Demuestre que la reducción puede proceder y que en cada etapa el pivote es el elemento más grande (en valor absoluto) de los elementos de la columna que está abajo de la posición pivote. Verifique que el resultado final es la matriz U producida por el comando **lu**.

iii. Describa la relación entre los multiplicadores y sus posiciones (en la matriz elemental que realiza la operación con el renglón) y los elementos de L y sus posiciones en L.

4. Introduzca una matriz aleatoria A de 3×3. Encuentre L, U y P usando el comando **lu** como en el problema 3 de MATLAB en esta sección. Interprete la información almacenada en L como en el problema 3 de MATLAB 1.10 (o como se observó en el problema 3 de esta sección), realice las operaciones con renglones indicadas para PA y muestre que el resultado final es U. (Debe estar seguro de referirse a un elemento de L usando la notación matricial y no el número desplegado.)

1.12 TEORÍA DE GRÁFICAS: UNA APLICACIÓN DE MATRICES

En años recientes se ha dedicado mucha atención a un área relativamente nueva de la investigación matemática llamada **teoría de gráficas**. Las gráficas, que se definirán en breve, son útiles en el estudio de la manera como se interrelacionan las componentes de las redes que surgen en el comercio, las ciencias sociales, la medicina y muchas otras áreas. Por ejemplo, las gráficas son útiles en el estudio de las relaciones familiares en una tribu, la propagación de una enfermedad contagiosa o una red de vuelos comerciales que comunican a un número dado de ciudades importantes. La teoría de gráficas es un tema amplio. En esta sección se darán sólo algunas definiciones y se mostrará la cercanía de la relación entre la teoría de gráficas y la teoría de matrices.

Ahora se ilustrará cómo surge una gráfica en la práctica.

EJEMPLO 1 **Representación de un sistema de comunicación mediante una gráfica** Suponga que se está estudiando un sistema de comunicaciones unido por líneas telefónicas. En este sistema hay cinco estaciones. En la siguiente tabla se indican las líneas disponibles hacia y desde las estaciones:

Estación	1	2	3	4	5
1		✔			
2	✔				✔
3				✔	
4		✔	✔		
5	✔			✔	

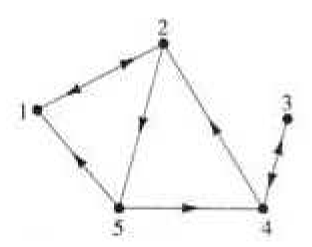


Figura 1.9 La gráfica muestra las líneas de una estación a otra

Por ejemplo, la marca en el cuadro 1,2 indica que hay una línea de la estación 1 a la estación 2. La información en la tabla se puede representar por una gráfica dirigida como la que se ilustra en la figura 1.9.

Gráfica dirigida
Vértices
Aristas

En general, una **gráfica dirigida** es una colección de n puntos llamados **vértices**, denotados por $V_1, V_2, \ldots, V_n$, junto con un número finito de **aristas** que unen distintos pares de vértices. Cualquier gráfica dirigida se puede representar por una matriz de $n \times n$ en donde el número en la posición ij es el número de aristas que unen el vértice i con el vértice j.

EJEMPLO 2 **Representación matricial de una gráfica dirigida** La representación matricial de la gráfica en la figura 1.9 es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

◆

EJEMPLO 3 **Representación matricial de dos gráficas dirigidas** Encuentre las representaciones matriciales de las gráficas dirigidas en la figura 1.10.

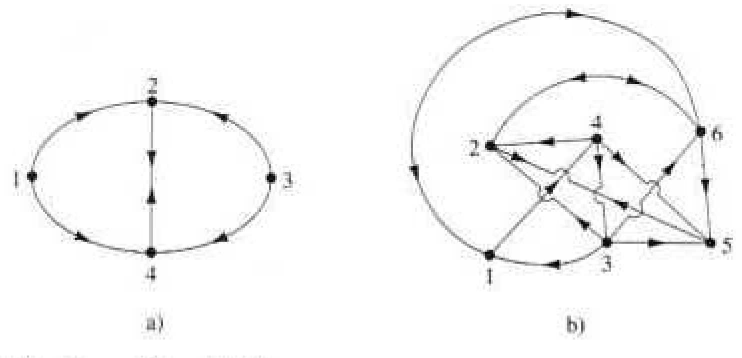


Figura 1.10 Dos gráficas dirigidas

Solución

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ✦

EJEMPLO 4 **Obtención de una gráfica a partir de su representación matricial** Bosqueje la gráfica representada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución Como A es una matriz de 5×5, la gráfica tiene cinco vértices. Vea la figura 1.11.

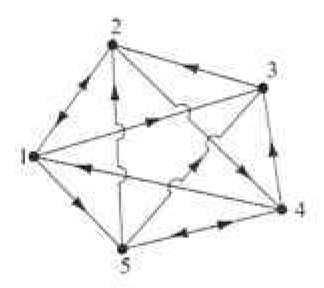


Figura 1.11 La gráfica dirigida representada por A ✦

Observación. En los ejemplos considerados se tienen gráficas dirigidas que satisfacen las siguientes dos condiciones:

i. Ningún vértice esta conectado consigo mismo.
ii. A lo más una arista lleva de un vértice a otro.

Matriz de incidencia

La matriz que representa una gráfica dirigida que satisface estas condiciones se llama **matriz de incidencia**. Sin embargo, en general es posible tener ya sea un 1 en la diagonal principal de una representación matricial (indicando una arista de un vértice hacia sí mismo) o un entero mayor que 1 en la matriz (indicando más de una trayectoria de un vértice a otro). Para evitar situaciones más complicadas (pero manejables), se ha supuesto, y se seguirá suponiendo, que i) y ii) se satisfacen.

EJEMPLO 5 **Una gráfica dirigida que describe el dominio de un grupo** Las gráficas dirigidas con frecuencia se usan en sociología para estudiar las interacciones grupales. En muchas situaciones de grupos, ciertos individuos dominan a otros. Este dominio puede ser físico, intelectual o emocional. Para ser más específicos, se supone que en una situación que incluye a seis personas, un sociólogo ha podido determinar quién domina a quién. (Esto pudo haberse hecho mediante pruebas psicológicas, mediante cuestionarios o simplemente por observación.) La gráfica dirigida en la figura 1.12 indica lo que encontró el sociólogo.

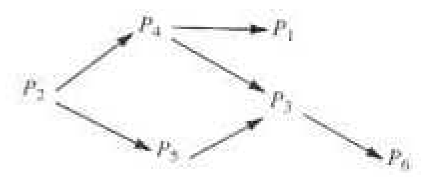


Figura 1.12 La gráfica muestra quién domina a quién en el grupo

La representación matricial de esta gráfica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ◆

No tendría mucho sentido introducir la representación matricial de una gráfica si todo lo que se pudiera hacer fuera escribirlas. Existen varios hechos no tan evidentes que se pueden preguntar sobre las gráficas. Para ilustrar lo anterior, considere la gráfica en la figura 1.13.

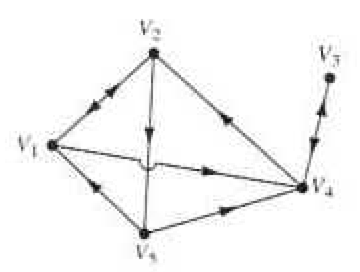


Figura 1.13 Existen trayectorias de V_1 a V_5 aun cuando no hay una arista de V_1 a V_5. Una de estas trayectorias es $V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_5$.

Se puede ver que aunque no hay una arista de V_1 a V_5, es posible mandar un mensaje entre estos dos vértices. De hecho, hay al menos dos maneras de hacerlo:

$$V_1 \to V_2 \to V_5 \tag{2}$$

y

$$V_1 \to V_4 \to V_2 \to V_5 \tag{3}$$

Trayectoria
Cadena

Una ruta de un vértice a otro se llama **trayectoria** o **cadena**. La trayectoria de V_1 a V_5 en (2) se llama **2-cadena** porque atraviesa por dos aristas. La trayectoria (3) se llama **3-cadena**. En general una trayectoria que atraviesa por n aristas (y por lo tanto pasa por $n + 1$ vértices) se llama ***n*-cadena**. Ahora, regresando a la gráfica, se ve que se puede ir de V_1 a V_5 a lo largo de la 5-cadena

$$V_1 \to V_4 \to V_3 \to V_4 \to V_2 \to V_5 \tag{4}$$

Sin embargo, sería algo tonto hacerlo ya que no se gana nada con una parte de la trayectoria. Una trayectoria en la que un vértice se encuentra más de una vez se llama **redundante**. La 5-cadena (4) es redundante porque el vértice 4 se encuentra dos veces.

Es de gran interés poder determinar la trayectoria más corta (si la hay) que une dos vértices en una gráfica dirigida. Existe un teorema que muestra cómo hacer esto, pero primero se hará una observación interesante. Como se ha visto, la representación matricial de la gráfica en la figura 1.9 está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se calcula

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe con más cuidado las componentes de A^2. Por ejemplo, el 1 en la posición 2,4 es el producto escalar del segundo renglón y la cuarta columna de A:

$$(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

El último 1 del segundo renglón representa la arista

$$V_2 \to V_5$$

El último 1 en la cuarta columna representa la arista

$$V_5 \rightarrow V_4$$

Al multiplicar, estos unos representan la 2-cadena

$$V_2 \rightarrow V_5 \rightarrow V_4$$

De igual manera, el 2 en la posición 5,2 de A^2 es el producto escalar del quinto renglón y la segunda columna de A:

$$(1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=2$$

Siguiendo el razonamiento anterior, se ve que esto indica el par de 2-cadenas:

$$V_5 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2$$

y

$$V_5 \rightarrow V_4 \rightarrow V_2$$

Si se generalizan estos hechos, se pueden probar los siguientes resultados:

TEOREMA 1 Si A es la matriz de incidencia de una gráfica dirigida, entonces la componente ij de A^2 da el número de 2-cadenas de un vértice i a un vértice j. ✦

Usando este teorema, se puede demostrar que el número de 3-cadenas que unen el vértice i con el vértice j es la componente ij de A^3. En el ejemplo 2

$$A^3=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\1&2&1&0&1\\1&0&0&1&1\\1&2&1&1&0\\2&0&0&1&2\end{pmatrix}$$

Por ejemplo, las dos 3-cadenas del vértice 4 al vértice 2 son

$$V_4 \rightarrow V_3 \rightarrow V_4 \rightarrow V_2$$

y

$$V_4 \rightarrow V_2 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2$$

Ambas cadenas son redundantes. Las dos 3-cadenas del vértice 5 al vértice 1 son

$$V_5 \rightarrow V_4 \rightarrow V_2 \rightarrow V_1$$

y

$$V_5 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_1$$

El siguiente teorema responde la pregunta que se hizo sobre encontrar la trayectoria más corta entre dos vértices.

TEOREMA 2 Sea A una matriz de incidencia de una gráfica dirigida. Sea $a_{ij}^{(n)}$ la componente ij de A^n.

i. Si $a_{ij}^{(n)} = k$, entonces existen exactamente k n-cadenas del vértice i al vértice j.

ii. Más aún, si $a_{ij}^{(m)} = 0$ para toda $m < n$ y $a_{ij}^{(n)} \neq 0$, entonces la cadena más corta del vértice i al vértice j es una n-cadena. ✦

EJEMPLO 6 **Cálculo de cadenas mediante las potencias de la matriz de incidencia** En el ejemplo 2 se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A^5 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $a_{13}^{(1)} = a_{13}^{(2)} = a_{13}^{(3)} = 0$ y $a_{13}^{(4)} = 1$, se ve que la ruta más corta del vértice 1 al vértice 3 es una 4-cadena que está dada por

$$V_1 \to V_2 \to V_5 \to V_4 \to V_3$$

Nota. También se tienen 5-cadenas (todas redundantes) que unen el vértice 2 consigo mismo. ✦

EJEMPLO 7 **Dominio indirecto en un grupo** En el ejemplo de sociología (ejemplo 5), una cadena (que no es una arista) representa control indirecto de una persona sobre otra. Esto es, si Pedro domina a Pablo, que domina a María, entonces se puede ver que Pedro ejerce algún control (aunque sea indirecto) sobre María. Para determinar quién tiene control directo o indirecto sobre quién sólo es necesario calcular las potencias de la matriz de incidencia A. Se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

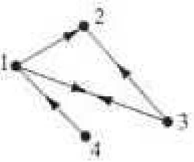
Como se podía ver en la gráfica de la página 159, estas matrices muestran que la persona P_2 tiene control directo o indirecto sobre todas las demás. Él o ella tiene control directo sobre P_4 y P_5, control de segundo orden sobre P_1 y P_3, y control de tercer orden sobre P_6.

Nota. En situaciones reales las cosas son mucho más complejas. Puede haber cientos de estaciones en una red de comunicaciones o cientos de individuos en un estudio sociológico dominante-pasivo. En estos casos, las matrices son esenciales para manejar la gran cantidad de datos que tienen que estudiarse. ◆

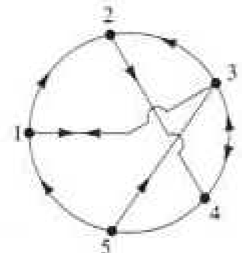
PROBLEMAS 1.12

En los problemas 1 al 4 encuentre la representación matricial de la gráfica dirigida dada.

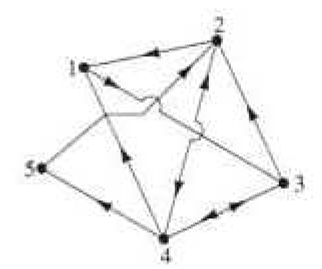
1.



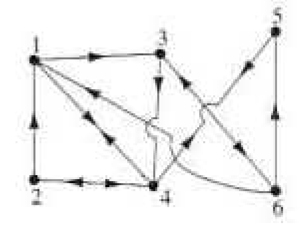
2.



3.



4.



En los problemas 5 al 7 dibuje las gráficas que representan las matrices dadas.

5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. Determine el número de 2-, 3- y 4-cadenas que unen los vértices en la gráfica del problema 2.
9. Haga lo mismo para la gráfica del problema 3.
10. Pruebe que la ruta más corta que une dos vértices en una gráfica dirigida no es redundante.
11. Si A es la matriz de incidencia de una gráfica dirigida, muestre que $A + A^2$ representa el número total de 1- y 2- cadenas entre los vértices.
12. Describa la dominancia directa e indirecta dada por la siguiente gráfica:

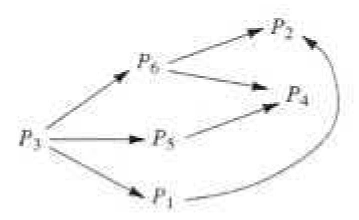


Figura 1.18

RESUMEN

- Un **vector renglón de n componentes** es un conjunto ordenado de n números llamados **escalares**, escritos como $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. (p. 45)
- Un **vector columna de n componentes** es un conjunto ordenado de n números escritos como (p. 46)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Un vector cuyas componentes son todas cero se llama **vector cero**. (p. 46)
- La **suma de vectores** y la **multiplicación por escalares** están definidas por (p. 51)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \alpha\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

- Una **matriz de $m \times n$** es un arreglo rectangular de mn números arreglados en m renglones y n columnas (pp. 9, 10, 48)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz A también se escribe como $A = (a_{ij})$.

- Una matriz cuyas componentes son todas cero se llama **matriz cero**. (p. 48)
- Si A y B son matrices de $m \times n$, entonces $A + B$ y αA (α un escalar) son matrices de $m \times n$ (pp. 51, 52)

La componente ij de $A + B$ es $a_{ij} + b_{ij}$.
La componente ij de αA es αa_{ij}.

- El **producto escalar** de dos vectores de n componentes es:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

(pp. 63, 64)

- ***Productos de matrices***
Sea A una matriz de $m \times n$ y sea B una matriz de $n \times p$. Entonces AB es una matriz de $m \times p$ y (p. 64)

$$\begin{aligned} \text{la componente } ij \text{ de } AB &= (\text{renglón } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B) \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \end{aligned}$$

- En general, los productos de matrices no son conmutativos; es decir, casi siempre ocurre que $AB \neq BA$. (p. 66)

- ***Ley asociativa de la multiplicación***
Si A es una matriz de $n \times m$, B es de $m \times p$ y C es de $p \times q$, entonces

$$A(BC) = (AB)C$$

y tanto $A(BC)$ como $(AB)C$ son matrices de $n \times q$. (p. 68)

- ***Leyes distributivas para la multiplicación de matrices***
Si todos los productos están definidos, entonces (p. 69)

$$A(B + C) = AB + AC \quad \text{y} \quad (A + B)C = AC + BC$$

- La **matriz de coeficientes** de un sistema lineal

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

es la matriz (pp. 10, 16)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- El sistema lineal anterior se puede escribir usando la **matriz aumentada** (pp. 10, 16)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

También se puede escribir como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde (p. 92)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Una matriz está en la **forma escalonada reducida por renglones** si se cumplen las cuatro condiciones dadas en la página 14. (p. 14)
- Una matriz está en la **forma escalonada por renglones** si se cumplen las primeras tres condiciones de la página 14. (p. 14)
- Un **pivote** es la primera componente diferente de cero en el renglón de una matriz. (p. 14)
- Las tres **operaciones elementales con renglones** son: (p. 10)
  Multiplicar el renglón i de una matriz por c: $R_i \to cR_i$, donde $c \neq 0$.
  Multiplicar el renglón i por c y sumarlo al renglón j: $R_j \to R_j + cR_i$.
  Permutar los renglones i y j: $R_i \rightleftarrows R_j$.
- El proceso de aplicar operaciones elementales con renglones a una matriz se llama **reducción por renglones.** (p. 10)
- La **eliminación de Gauss-Jordan** es el proceso de resolver un sistema de ecuaciones reduciendo por renglones la matriz aumentada a la forma escalonada reducida por renglones, usando el proceso descrito en la página 9. (pp. 9, 16)
- La **eliminación de Gauss** es el proceso de resolver un sistema de ecuaciones reduciendo por renglones la matriz aumentada a la forma escalonada por renglones y usando la **sustitución hacia atrás**. (p. 16)
- Un sistema lineal que tiene una o más soluciones se llama **consistente**. (p. 10)
- Un sistema lineal que no tiene solución se llama **inconsistente**. (pp. 3, 10)
- Un sistema lineal que tiene soluciones tiene ya sea una solución única o un número infinito de soluciones. (p. 15)
- Un sistema **homogéneo** de m ecuaciones con n incógnitas es una sistema lineal de la forma (p. 39)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\;\; \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

- Un sistema lineal homogéneo siempre tiene la **solución trivial** (o **solución cero**) (p. 40)

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

- Las soluciones para un sistema lineal homogéneo diferente de la trivial se llaman **soluciones no triviales.** (p. 40)
- El sistema lineal homogéneo anterior tiene un número infinito de soluciones si tiene más incógnitas que ecuaciones ($n > m$) (p. 41)
- La **matriz identidad** $n \times n$, I_n, es la matriz de $n \times n$ con unos en la **diagonal principal** y ceros en otra parte. I_n se denota usualmente por I. (p. 98)
- Si A es una matriz cuadrada, entonces $AI = IA = A$. (p. 99)
- La matriz A de $n \times n$ es **invertible** si existe una matriz A^{-1} de $n \times n$ tal que (p. 99)

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

En este caso la matriz A^{-1} se llama la **inversa** de A.
- Si A es invertible, su inversa es única (p. 100)
- Si A y B son matrices invertibles de $n \times n$, entonces AB es invertible y (p. 100)

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- Para determinar si una matriz A de $n \times n$ es invertible:
  - **i.** Se escribe la matriz aumentada $(A|I)$.
  - **ii.** Se reduce A por renglones a la forma escalonada reducida por renglones. (p. 103)
  - **iii.** **a.** Si la forma escalonada reducida por renglones de A es I, entonces A^{-1} será la matriz a la derecha de la raya vertical punteada
    - **b.** Si la forma escalonada reducida por renglones de A contiene un renglón de ceros, entonces A no es invertible.
- La matriz de 2×2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es invertible si y sólo si

$$\text{determinante de } A = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

En ese caso (p. 104)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

- Dos matrices A y B son **equivalentes por renglón** si A se puede transformar en B reduciendo por renglones. (p. 107)
- Sea A una matriz de $n \times n$. Si $AB = I$ o $BA = I$, entonces A es invertible y $B = A^{-1}$. (p. 112)
- Si $A = (a_{ij})$, entonces la **transpuesta de A**, denotada por A^t, está dada por $A^t = (a_{ji})$. Esto es, A^t se obtiene intercambiando los renglones y las columnas de A. (p. 122)
- ***Hechos sobre la transpuesta***

Si todas las sumas y productos están definidos y si A es invertible, entonces (p. 122)

$(A^t)^t = A \quad (AB)^t = B^tA^t \quad (A + B)^t = A^t + B^t \quad$ Si A es invertible, entonces $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- Una matriz cuadrada A es **simétrica** si $A^t = A$. (p. 123)
- Una **matriz elemental** es una matriz cuadrada que se obtiene realizando exactamente una operación con renglones sobre la matriz identidad. Los tres tipos de matrices elementales son: (p. 128)

cR_i	se multiplica el renglón i de I por c, $c \neq 0$
$R_j + cR_i$	se multiplica el renglón i de I por c y se suma al renglón j, $c \neq 0$
P_{ij}	se permutan los renglones i y j

- Una matriz cuadrada es invertible si y sólo si es el producto de matrices elementales. (p. 130)

- Cualquier matriz cuadrada se puede escribir como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior. (p. 133)

- ***Factorización LU***
  Suponga que la matriz invertible A se puede reducir por renglones a una matriz triangular superior sin realizar permutaciones. Entonces existen matrices únicas L y U tales que L es triangular inferior con unos en la diagonal, U es una matriz triangular superior invertible y $A = LU$. (p. 142)

- ***Matriz permutación***
  $E = P_{ij}$ es una **matriz permutación elemental**. Un producto de matrices permutación elementales se llama **matriz permutación**. (p. 144)

- ***Factorización PA = LU***
  Sea A cualquier matriz de $m \times n$. Entonces existe una matriz permutación P tal que $PA = LU$, donde L y U son como en la factorización LU. En general, P, A y U no son únicas. (p. 144)

- ***Teorema de resumen*** (pp. 132, 145)
  Sea A una matriz de $n \times n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  i. A es invertible.
  ii. La única solución al sistema homogéneo es $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).
  iii. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.
  iv. A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.
  v. A se puede escribir como un producto de matrices elementales.
  vi. det $A \neq 0$ (por ahora, det A está definido sólo si A es una matriz de 2×2).
  vii. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.
  viii. Existen una matriz permutación P, una matriz triangular inferior L con unos en la diagonal, y una matriz triangular superior invertible U, tales que $PA = LU$.

EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 al 14 encuentre las soluciones (si existen) a los sistemas dados

1. $\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= 9 \\ -2x_1 + 3x_2 &= 4 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 6 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 &= 9 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 6 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

9. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 7 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

En los ejercicios 15 al 22 realice los cálculos indicados.

15. $3\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

17. $5\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -6 & 1 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 23 al 26 determine si la matriz dada está en la forma escalonada por renglones (pero no en la forma escalonada reducida por renglones), en la forma escalonada reducida por renglones o en ninguna de las dos.

23. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 27 y 28 reduzca la matriz a la forma escalonada por renglones y a la forma escalonada reducida por renglones.

27. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 29 al 33 calcule la forma escalonada por renglones y la inversa (si existe) de la matriz dada.

29. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ **30.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ **31.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ **33.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 34 al 36 primero escriba el sistema en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, después calcule A^{-1} y, por último, use la multiplicación de matrices para obtener el vector solución.

34. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 7 \end{aligned}$ **35.** $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}- x_3} &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$ **36.** $\begin{aligned} 2x_1 \phantom{{}+ 3x_2} + 4x_3 &= 7 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= -4 \\ x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$

En los ejercicios 37 al 42 calcule la transpuesta de la matriz dada y determine si la matriz es simétrica o antisimétrica.†

37. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **38.** $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ **39.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & -5 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$

40. $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ -5 & 0 & 4 \\ -6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ **41.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & -8 \\ 6 & 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$ **42.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 43 al 47 encuentre una matriz elemental de 3×3 que llevaría a cabo las operaciones con renglones dadas.

43. $R_2 \to -2R_2$ **44.** $R_1 \to R_1 + 2R_2$ **45.** $R_3 \to R_3 - 5R_1$

46. $R_3 \rightleftarrows R_1$ **47.** $R_2 \to R_2 + \frac{1}{3}R_3$

En los ejercicios 48 al 50 encuentre la inversa de la matriz elemental.

48. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **49.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **50.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

En los ejercicios 51 y 52 escriba la matriz como el producto de matrices elementales.

51. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **52.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

† Del problema [illegible] antisimétrica si $A^t = -A$

En los ejercicios 53 y 54 escriba cada matriz como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior.

53. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

54. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 55 y 56 encuentre la factorización LU de A y utilícela para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

55. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

56. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 4 & 11 & 3 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

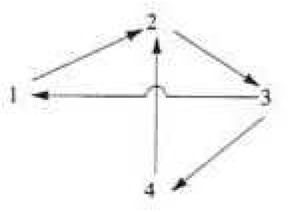
En los ejercicios 57 y 58 encuentre una matriz permutación P y las matrices L y U tales que $PA = LU$ y utilícelas para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

57. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

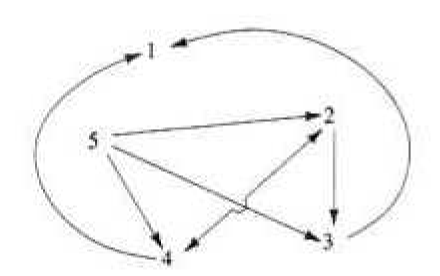
58. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 59 y 60 encuentre la matriz que representa cada gráfica.

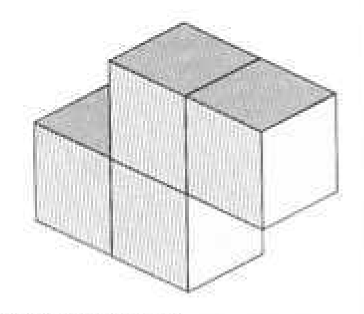
59.



60.



61. Dibuje la gráfica representada por la siguiente matriz. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



2

Determinantes

2.1 DEFINICIONES

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz de 2×2. En la sección 1.8 en la página 104 se definió el determinante de A por

$$\boxed{\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (1)$$

Con frecuencia se denotará det A por

$$|A| \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (2)$$

Observación. No debe confundirse esta notación con las barras de valor absoluto. $|A|$ denota det A si A es una matriz cuadrada. $|x|$ denota el valor absoluto de x si x es un número real o complejo.

Se demostró que A es invertible si y sólo si det $A \neq 0$. Como se verá, este importante teorema es válido para matrices de $n \times n$.

En este capítulo se desarrollarán algunas propiedades básicas de los determinantes y se verá cómo se pueden usar para calcular la inversa de una matriz y resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

El determinante de una matriz de $n \times n$ se definirá de manera *inductiva*. En otras palabras, se usarán lo que se sabe sobre un determinante de 2×2 para definir un determinante de 3×3, esto a su vez se usará para definir un determinante de 4×4, etcétera. Se comienza por definir un determinante de 3×3.†

DEFINICIÓN 1 **Determinante de 3 × 3** Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Entonces

$$\det A = |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Observe el signo menos antes del segundo término del lado derecho de (3).

EJEMPLO 1 **Cálculo de un determinante de 3 × 3** Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule $|A|$.

Solución

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 2 - 5 \cdot 19 + 2 \cdot 10 = -69$$

◆

EJEMPLO 2 **Cálculo de un determinante de 3 × 3** Calcule $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix}$

Solución

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 12 + 3(-3) + 5(-3) = 0$$

◆

† Existen varias maneras de definir un determinante y ésta es una de ellas. Es importante darse cuenta de que "det" es una función que asigna un número a una matriz cuadrada.

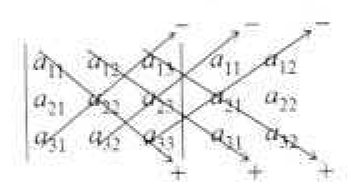
Existe otro método para calcular determinantes de 3×3. De la ecuación (3) se tiene

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

o sea

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \quad (4)$$

Se escribe A y se le adjuntan sus primeras dos columnas:



Después se calculan los seis productos, poniendo signo menos antes de los productos con flechas hacia arriba, y se suman todos. Esto da la suma de la ecuación (4).

EJEMPLO 3 **Cálculo de un determinante de 3×3 usando el nuevo método** Calcule $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ usando el nuevo método.

Solución Al escribir $\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right|$ y multiplicar como lo indican las flechas se obtiene

$$|A| = (3)(2)(4) + (5)(3)(-1) + (2)(4)(2) - (-1)(2)(2) - (2)(3)(3) - (4)(4)(5)$$
$$= 24 - 15 + 16 + 4 - 18 - 80 = -69$$

◆

ADVERTENCIA Este método *no* funciona para determinantes de $n \times n$ si $n > 3$. Si intenta algo similar para determinantes de 4×4 o de orden mayor, obtendrá una respuesta equivocada. ◇

Antes de definir los determinantes de $n \times n$, debe observarse que en la ecuación (3) $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es la matriz obtenida al eliminar el primer renglón y la primera columna de A; $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$ es la matriz obtenida al eliminar el primer renglón y la segunda columna de

A, y $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ es la matriz obtenida al eliminar el primer renglón y la tercera columna de A. Si estas matrices se denotan por M_{11}, M_{12} y M_{13}, respectivamente, y si $A_{11} = \det M_{11}$, $A_{12} = -\det M_{12}$ y $A_{13} = \det M_{13}$, entonces la ecuación (3) se puede escribir como

$$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{5}$$

DEFINICIÓN 2 **Menor** Sea A una matriz de $n \times n$ y sea M_{ij} la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ obtenida de A eliminando el renglón i y la columna j. M_{ij} se llama el **menor ij** de A.

EJEMPLO 4 **Cálculo de dos menores de una matriz de 3 × 3** Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Encuentre M_{13} y M_{32}.

Solución Eliminando el primer renglón y la tercera columna de A se obtiene $M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. De manera similar, si se elimina el tercer renglón y la segunda columna se obtiene $M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

◆

EJEMPLO 5 **Cálculo de dos menores de una matriz de 4 × 4** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Encuentre M_{32} y M_{24}.

Solución Quitando el tercer renglón y la segunda columna de A, se encuentra que $M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$; de igual manera, $M_{24} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

◆

DEFINICIÓN 3 **Cofactor** Sea A una matriz de $n \times n$. El **cofactor ij** de A, denotado por A_{ij}, está dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}| \tag{6}$$

Esto es, el cofactor ij de A se obtiene tomando el determinante del menor ij y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$. Observe que

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j \text{ es par} \\ -1 & \text{si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$$

Observación. La definición 3 tiene sentido porque se va a definir un determinante de $n \times n$ con la suposición de que ya se sabe lo que es un determinante de $(n-1) \times (n-1)$.

EJEMPLO 6 **Cálculo de dos cofactores de una matriz de 4 × 4** En el ejemplo 5 se tiene

$$A_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -192$$

◆

Ahora se considerará la matriz general de $n \times n$. Aquí

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

DEFINICIÓN 4 **Determinante $n \times n$** Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces el determinante de A, denotado por $\det A$ o $|A|$, está dado por

$$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} \tag{8}$$

La expresión en el lado derecho de (8) se llama **expansión por cofactores.**

Observación. En la ecuación (8) se define el determinante mediante la expansión por cofactores en el primer renglón de A. En la siguiente sección se verá (teorema 2.2.5) que se obtiene la misma respuesta si se expande por cofactores en cualquier renglón o columna.

EJEMPLO 7 **Cálculo del determinante de una matriz de 4 × 4** Calcule det A, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-92) - 3(-70) + 5(2) - 2(-16) = 160$$

◆

Es evidente que el cálculo del determinante de una matriz de $n \times n$ puede ser tedioso. Para calcular un determinante de 4×4 deben calcularse cuatro determinantes de 3×3. Para calcular un determinante de 5×5 deben calcularse cinco determinantes de 4×4, que es lo mismo que calcular veinte determinantes de 3×3. Por fortuna existen técnicas que simplifican estos cálculos. Algunos de estos métodos se presentan en la siguiente sección. Sin embargo, existen algunas matrices para las que es muy sencillo calcular los determinantes. Se comienza por repetir la definición dada en la página 132.

DEFINICIÓN 5 **Matriz triangular** Una matriz cuadrada se llama **triangular superior** si todas sus componentes abajo de la diagonal son cero. Es una matriz **triangular inferior** si todas sus componentes arriba de la diagonal son cero. Una matriz se llama **diagonal** si todos los elementos que no están sobre la diagonal son cero; es decir, $A = (a_{ij})$ es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$, triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$, y diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Observe que una matriz diagonal es tanto triangular superior como triangular inferior.

EJEMPLO 8 **Seis matrices triangulares** Las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ son triangulares superiores; $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son triangulares inferiores; I (la

matriz identidad) y $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ son diagonales. Observe que la matriz E es también triangular superior y triangular inferior. ◆

EJEMPLO 9 **El determinante de una matriz triangular inferior** La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

es triangular inferior. Calcule det A.

Solución

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}A_{11} + 0A_{12} + 0A_{13} + 0A_{14} = a_{11}A_{11} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \end{aligned}$$ ◆

El ejemplo 9 se puede generalizar para probar el siguiente teorema.

TEOREMA 1 Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$ triangular superior o inferior. Entonces

$$\boxed{\det A = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}} \quad (9)$$

Esto es: *el determinante de una matriz triangular es igual al producto de sus componentes en la diagonal.*

Demostración La parte triangular inferior del teorema se deduce del ejemplo 9. Se demostrará la parte triangular superior por inducción matemática comenzando con $n = 2$. Si A es una matriz triangular superior de 2×2, entonces $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ y $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12} \cdot 0 = a_{11}a_{22}$, de manera que el teorema se cumple para $n = 2$. Se supondrá que se cumple para $k = n - 1$ y se demostrará para $k = n$. El determinante de una matriz triangular superior de $n \times n$ es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Cada uno de estos determinantes es el determinante de una matriz triangular superior de $(n-1)\times(n-1)$ que, por la hipótesis de inducción, es igual al producto de las componentes en la diagonal. Todas las matrices excepto la primera tienen una columna de ceros, por lo que al menos una de sus componentes diagonales es cero. Así, todos los determinantes excepto el primero, son cero. Por último,

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33}\cdots a_{nn})$$

lo que prueba que el teorema se cumple para matrices de $n \times n$. ◆

EJEMPLO 10 **Determinantes de seis matrices triangulares** Los determinantes de las seis matrices triangulares en el ejemplo 8 son $|A| = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$; $|B| = (-2)(0)(1)(-2) = 0$; $|C| = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$; $|D| = 0$; $|I| = 1$; $|E| = (2)(-7)(-4) = 56$. ◆

El siguiente teorema será muy útil.

TEOREMA 2 Sea T una matriz triangular superior. Entonces T es invertible si y sólo si $\det T \neq 0$.

Demostración Sea

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Del teorema 1,

$$\det T = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Así det $T \neq 0$ si y sólo si todos sus elementos en la diagonal son diferentes de cero.

Si det $T \neq 0$, entonces T se puede reducir por renglones a I de la siguiente manera. Para $i = 1, 2, \ldots, n$, se divide el renglón i de T por $a_{ii} \neq 0$ para obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Esta es la forma escalonada por renglones de T, que tiene n pivotes, y por el teorema de resumen en la página 132, T es invertible.

Suponga que det $T = 0$. Entonces al menos uno de las componentes de la diagonal es cero. Sea a_{ii} la primera de estas componentes. Entonces T se puede escribir como

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i} & a_{i-1,i+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{i,i+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Cuando T se reduce a su forma escalonada por renglones, no se tiene pivote en la columna i (explique por qué). Entonces la forma escalonada por renglones de T tiene menos de n pivotes, y por el teorema de resumen, se puede concluir que T no es invertible. ◆

Interpretación geométrica del determinante de 2 × 2

Sea $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. En la figura 2.1 se graficaron los puntos (a, c) y (b, d) en el plano xy y

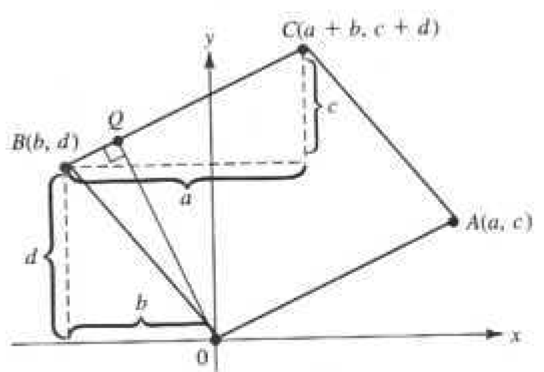


Figura 2.1 Q está en el segmento de línea BC y también en la recta perpendicular a BC que pasa por el origen. El área del paralelogramo es $\overline{0Q} \times \overline{0A}$

se dibujaron los segmentos de recta de (0, 0) a cada uno de estos puntos. Se supone que estas dos rectas no son colineales. Esto es lo mismo que suponer que (b, d) no es un múltiplo de (a, c).

El **área generada por A** se define como el área del paralelogramo con tres vértices en (0, 0), (a, c) y (b, d).

TEOREMA 3 El área generada por $A = |\det A|$.†

Demostración Se supone que a y c son diferentes de cero. La prueba para $a = 0$ o $c = 0$ se deja como ejercicio (vea el problema 15).

El área del paralelogramo = base × altura. La base del paralelogramo en la figura 2.1 tiene longitud $\overline{0A} = \sqrt{a^2 + c^2}$. La altura del paralelogramo es $\overline{0Q}$, de donde $0Q$ es el segmento perpendicular a BC. De la figura se ve que las coordenadas de C, el cuarto vértice del paralelogramo, son $x = a + b$ y $y = c + d$. Así

$$\text{Pendiente de } BC = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(c+d) - d}{(a+b) - b} = \frac{c}{a}$$

Entonces la ecuación de la recta que pasa por B y C es

$$\frac{y - d}{x - b} = \frac{c}{a} \quad \text{o} \quad y = \frac{c}{a}x + d - \frac{bc}{a}$$

Hecho iv), página 2

$$\text{Pendiente de } 0Q \overset{\downarrow}{=} -\frac{1}{\text{pendiente de } BC} = -\frac{a}{c}$$

La ecuación de la recta que pasa por (0, 0) y Q es

$$\frac{(y - 0)}{(x - 0)} = -\frac{a}{c} \quad \text{o} \quad y = -\frac{a}{c}x$$

Q es la intersección de BC y $0Q$, por lo que satisface ambas ecuaciones. En el punto de intersección se tiene

$$\frac{c}{a}x + d - \frac{bc}{a} = -\frac{a}{c}x$$

$$\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)x = \frac{bc}{a} - d$$

$$\frac{a^2 + c^2}{ac}x = \frac{bc - ad}{a}$$

$$x = \frac{ac(bc - ad)}{a(a^2 + c^2)} = \frac{c(bc - ad)}{a^2 + c^2} = -\frac{c(ad - bc)}{a^2 + c^2} = -\frac{c \det A}{a^2 + c^2}$$

† Aquí $|\det A|$ denota el valor absoluto del determinante de A.

y

$$y = -\frac{a}{c}x = -\frac{a}{c}\cdot -\frac{c\det A}{a^2+c^2} = \frac{a\det A}{a^2+c^2}$$

Entonces Q tiene coordenadas $\left(\frac{-c\det A}{a^2+c^2}, \frac{a\det A}{a^2+c^2}\right)$

y

$$\overline{0Q} = \text{distancia de } (0, 0) \text{ a } Q = \sqrt{\frac{c^2(\det A)^2}{(a^2+c^2)^2} + \frac{a^2(\det A)^2}{(a^2+c^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(c^2+a^2)(\det A)^2}{(c^2+a^2)^2}} = \sqrt{\frac{(\det A)^2}{a^2+c^2}} = \frac{|\det A|}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

Finalmente,

$$\text{Área del paralelogramo} = \overline{0A} \times \overline{0Q} = \sqrt{a^2+c^2} \times \frac{|\det A|}{\sqrt{a^2+c^2}} = |\det A|$$ ◆

Se podrá dar una demostración mucho más sencilla de este teorema cuando se estudie el producto cruz de dos vectores en la sección 3.4.

PROBLEMAS 2.1

Autoevaluación

I. ¿Cuál de los siguientes es el cofactor de 3 en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

a. 8 **b.** −8
c. 3 **d.** 6
e. −10 **f.** 0

II. ¿Cuál de las siguientes es 0 para toda a y b?

a. $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} a & -b \\ -a & b \end{vmatrix}$ **c.** $\begin{vmatrix} a & a \\ b & -b \end{vmatrix}$

d. Los determinantes no se pueden establecer porque no se conocen los valores de a y b.

III. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces det A = _____.

a. 0 **b.** 12 **c.** −12 **d.** 6 **e.** −6

IV. ¿Cuáles de las siguientes matrices no son invertibles?

a. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

En los problemas 1 al 10 calcule el determinante.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ **9.** $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

11. Demuestre que si A y B son matrices diagonales de $n \times n$, entonces det AB = det A det B.

***12.** Demuestre que si A y B son matrices triangulares inferiores, entonces AB = det A det B.

13. Demuestre que, en general, no se cumple que det $(A + B)$ = det A + det B.

14. Muestre que si A es triangular, entonces det $A \neq 0$ si y sólo si todos los elementos en la diagonal de A son diferentes de cero.

15. Pruebe el teorema 3 cuando A tiene coordenadas $(0, c)$ o $(a, 0)$.

****16. Más sobre la interpretación geométrica del determinante:** Sean $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ dos 2-vectores y sean $\mathbf{v}_1 = A\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{v}_2 = A\mathbf{u}_2$. Demuestre que (área generada por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$) = (área generada por $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$) |det A|

Respuestas a la autoevaluación

I. a **II.** b **III.** c **IV.** b, c

MANEJO DE CALCULADORA

Tanto la TI-85 como la CASIO fx-7700 GB calculan determinantes de manera sencilla.

TI-85

Primero, introduzca la matriz y se le da un nombre, digamos A. Después oprima

[2nd] [MATRX] [F3] ⟨MATH⟩ [F1] ⟨det⟩ [ALPHA] [A] [ENTER]

CASIO fx-7700 GB

Una vez introducida y desplegada A, oprima la tecla [F3] y aparecerá $|A|$ = det A.

En los problemas 17 al 20 use una calculadora para encontrar el determinante de cada matriz.

17. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 10 & -6 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 2 & -12 & 6 \\ 9 & 4 & 13 & 8 & 15 \\ 8 & 11 & -9 & -8 & 6 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & 9 & 16 & 4 \\ 37 & -6 & 0 & 23 \\ 14 & 4 & 6 & -11 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} -238 & -159 & 146 & 382 & -189 \\ -319 & 248 & -556 & 700 & 682 \\ 462 & 96 & -331 & 516 & -322 \\ 511 & 856 & 619 & 384 & 906 \\ 603 & -431 & -236 & 692 & -857 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 0.62 & 0.37 & 0.42 & 0.56 & 0.33 \\ 0.29 & 0.46 & 0.33 & 0.48 & 0.97 \\ 0.81 & 0.37 & 0.91 & 0.33 & 0.77 \\ 0.35 & 0.62 & 0.73 & 0.98 & 0.18 \\ 0.29 & 0.08 & 0.46 & 0.71 & 0.29 \end{pmatrix}$

MATLAB 2.1

Información de MATLAB El comando **det(A)** encuentra el determinante de A. Como antes, se puede usar MATLAB para generar matrices aleatorias de $n \times n$. Por ejemplo,

A = 2*rand(n) –1 (con elementos entre –1 y 1)

A = 2*rand(n)–1 + i*(2*rand(n)–1) (con elementos reales e imaginarios entre –1 y 1)

A = round(10*(2*rand(n)–1)) (con elementos enteros entre –10 y 10)

1. En este problema deberá investigar la relación entre det(A) y la invertibilidad de A.

a. Para cada matriz, determine si A es o no invertible (usando **rref**) y encontrando det(A). ¿De qué manera puede usar **det(A)** para determinar si A es o no invertible?

i. $\begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 \\ -9 & 9 & 7 \\ 4 & -2 & -9 \end{pmatrix}$ **ii.** $\begin{pmatrix} -9 & -2 & 2 & -8 \\ 1 & -9 & 9 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -2 \\ -10 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **iii.** $\begin{pmatrix} 23 & 19 & 11 \\ 5 & 1 & 5 \\ 9 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

iv. $\begin{pmatrix} 8 & -3 & 5 & -9 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 3 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 8 & -5 \\ -9 & 10 & 1 & -5 & -5 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ v. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & 8 & -8 & -9 \\ 1 & 2 & -2 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$

b. Los incisos i) y ii) que siguen prueban su conclusión del inciso a) con varias matrices aleatorias. (Elija por lo menos cuatro matrices en i) de distintos tamaños y al menos cuatro matrices en ii). Incluya al menos una matriz con elementos complejos para cada inciso.)

i. Sea A una matriz aleatoria de $n \times n$. Encuentre det (A). Use los conocimientos anteriores para determinar si A es o no invertible. ¿De qué manera apoya su conclusión esta evidencia?

ii. Sea B una matriz aleatoria de $n \times n$, pero para alguna j arbitraria, sea **B(:, j)** igual a una combinación lineal de algunas columnas de B (de su elección). Por ejemplo, **B(:,3) = B(:,1) + 2*B(:,2)**. Determine si B es o no invertible y encuentre det (B). ¿De qué manera apoya su conclusión esta evidencia?

2. Para seis matrices aleatorias A con elementos reales (para valores diferentes de n), compare **det(A)** con **det(A')** donde A' denota (en MATLAB) la transpuesta de A. Incluya por lo menos dos matrices no invertibles (vea la descripción en el problema 1 b) ii) de MATLAB en esta sección). ¿Qué le dice su comparación? Repita para matrices con elementos complejos.

3. Genere seis pares de matrices aleatorias, A y B, de $n \times n$ (use diferentes valores de n). Para cada par, sea $C = A + B$. Compare det(C) y det(A) + det(B). Obtenga una conclusión sobre la afirmación

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$$

4. a. Usando los pares de matrices (A y B) dados, formule una conclusión respecto a **det(A*B)** en términos de los determinantes de A y B.

i. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

ii. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}$

iii. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

iv. $A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -5 & 9 \\ 3 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 & 5 \\ 9 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

b. Pruebe también su conclusión generando matrices aleatorias de $n \times n$. (Genere al menos seis pares con diferentes valores de n. Incluya un par en el que una de las matrices sea no invertible. Incluya matrices con elementos complejos.)

5. **a.** Para las siguientes matrices, formule una conclusión respecto a **det(A)** y **det(inv(A))**.

i. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **ii.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **iii.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **iv.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

b. Pruebe su conclusión con varias (al menos seis) matrices aleatorias invertibles de $n \times n$ para diferentes valores de n. Incluya matrices con elementos complejos.

c. (*Lápiz y papel*) Pruebe su conclusión usando la definición de la inversa (es decir, considere AA^{-1}) y la propiedad descubierta en el problema 4 de MATLAB de esta sección.

6. Sea **A = 2*rand(6)–1**.

a. Elija i, j y c y sea B la matriz obtenida al realizar la operación con renglones $R_j \to cR_i + R_j$ sobre A. Compare det(A) y det(B). Repita para al menos otros cuatro valores de i, j y c. ¿Qué puede concluir sobre la relación entre el determinante de A y el determinante de la matriz obtenida a partir de A realizando el tipo de operación con renglones dada?

b. Siga las instrucciones del inciso a) pero para la operación con renglones $R_i \to cR_i$.

c. Siga las instrucciones del inciso a) para la operación con renglones que intercambia R_i y R_j.

d. Para cada operación con renglones realizada en a), b) y c) encuentre la matriz elemental F tal que FA es la matriz obtenida al realizar la operación sobre los renglones de A. Encuentre det(F). Explique los resultados obtenidos en los incisos a), b) y c) usando su observación sobre det(F) y su conclusión del problema 4 de MATLAB en esta sección.

7. Se sabe que si A es una matriz triangular superior, entonces det(A) es el producto de los elementos en la diagonal. Considere la siguiente matriz M, donde A, B y D son matrices aleatorias de $n \times n$ y 0 representa a la matriz que consiste sólo de ceros:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

¿Puede obtener una relación entre det(M) y los determinantes de A, B y D?

a. Introduzca matrices aleatorias de $n \times n$, A, B y D. Sea **C = zeros(n)**. A partir de la matriz bloque **M = [A B;C D]**. Pruebe su conclusión. (Si todavía no ha formulado una conclusión, encuentre los determinantes de M, A, B y D y busque patrones.) Repita para otros n, A, B y D.

b. Repita el proceso anterior para

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & D & E \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$$

donde A, B, C, D, E y F son matrices aleatorias de $n \times n$ y 0 representa a la matriz de $n \times n$ cuyos elementos son todos cero (es decir **zeros(n)**).

M 8. (*Este problema usa el archivo con extensión m, ornt.m*) Una aplicación geométrica de los determinantes de 2 × 2 se refiere a la orientación. si se viaja por las aristas de un paralelogramo, se va en el sentido (orientación) de las manecillas del reloj o en sentido contrario. La multiplicación por una matriz de 2 × 2 puede afectar la orientación.

Dados dos vectores **u** y **v**, suponga que se traza el paralelogramo formado al comenzar en (0, 0), recorrer hasta el final de **u**, después hasta el final de **u** + **v**, luego hasta el final de **v** y después de regreso a (0, 0); se hace esto mismo para el paralelogramo formado por A**u** y A**v**, donde A es una matriz de 2 × 2 (el cual se recorre primero a lo largo de A**u**).

¿Cuándo se invertirá la orientación (en el sentido de las manecillas o en sentido contrario) del paralelogramo formado por $A\mathbf{u}$ y $A\mathbf{v}$ respecto a la orientación del paralelogramo formado por **u** y **v**?

MATLAB contiene un archivo llamado *ornt.m* que se puede usar para investigar esta pregunta. Dé **help ornt** para obtener una descripción de lo que hace este archivo.

En cada uno de los siguientes problemas, introduzca **u**, **v** y A. (Aquí **u** y **v** son vectores de 2×1 y A es una matriz de 2×2.) Encuentre **det A**. Dé **ornt(u, v, A)**. Aparecerán, en una pantalla de gráficas, los paralelogramos formados por **u** y **v** y por $A\mathbf{u}$ y $A\mathbf{v}$ con la orientación descrita en la pantalla. ¿Cambió o no la orientación? [Oprima cualquier tecla para regresar a la pantalla de comandos después de ver la gráfica. Si desea regresar a la pantalla de gráficas dé el comando **shg** que es "show graph" (muestra gráfica) abreviado.] Después de resolver el siguiente problema formule una conclusión respecto a cómo se puede usar **det(A)** para determinar si cambiará o no la orientación. Pruebe su conclusión con más ejemplos (cambie A y/o **u** y **v**).

Para cada A utilice **u = [1;0]** y **v = [0;1]** y después **u = [−2;1]** y **v = [1;3]**.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

e. Pruebe su conclusión para otras A. Intente también con **u** y **v** diferentes.

Nota importante. Cuando termine con este problema, asegúrese de dar el comando **clg** para eliminar la pantalla de gráficas antes de comenzar otro problema. Si está usando MATLAB 4.0, dé **clf**.

2.2 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Existen algunos problemas en matemáticas que, en teoría, son sencillos pero en la práctica son imposibles. Piense por ejemplo en el determinante de una matriz de 50×50. Se puede calcular expandiendo por **cofactores**. Esto implica 50 determinantes de 49×49 que implican $50 \cdot 49$ determinantes de 48×48 que implican . . . que implican $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot 3$ determinantes de 2×2. Ahora bien, $50 \cdot 49 \cdot \ldots \cdot 3 = 50!/2 \approx 1.5 \times 10^{64}$ determinantes de 2×2. Suponga que se cuenta con una computadora que puede calcular 1 millón $= 10^6$ determinantes de 2×2 por segundo. Entonces tomaría alrededor de 1.5×10^{58} segundos $\approx 4.8 \times 10^{50}$ *años* terminar el cálculo. (El universo tiene alrededor de 15 mil millones de años $= 1.5 \times 10^{10}$ años según la versión teórica más reciente). Es obvio que, si bien el cálculo de un determinante de 50×50 siguiendo la definición es teóricamente directo, en la práctica es imposible.

Por otro lado, una matriz de 50×50 no es tan rara. Piense en 50 tiendas en las que se ofrecen 50 productos diferentes. De hecho, las matrices de $n \times n$ con $n > 100$ surgen con frecuencia en la práctica. Por fortuna, existen al menos dos maneras de reducir significativamente la cantidad de trabajo necesaria para calcular un determinante.

El primer resultado que se necesita es quizá el teorema más importante sobre determinantes. Este teorema establece que el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes.

TEOREMA 1 Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Entonces

$$\boxed{\det AB = \det A \det B} \qquad \textbf{(8)}$$

Es decir: *el determinante del producto es el producto de los determinantes.*

Observación. Note que el producto de la izquierda es un producto de matrices mientras que el de la derecha es de escalares.

Demostración La prueba, usando matrices elementales, está dada en la sección 2.3. En el problema 38 se pide que verifique este resultado para el caso de 2×2. ◆

EJEMPLO 1 **Ilustración del hecho de que det AB = det A det B** Verifique el teorema 1 para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución $\det A = 16$ y $\det B = -8$. Se puede calcular

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -5 \\ 11 & -7 & 5 \\ 10 & 2 & -18 \end{pmatrix}$$

y $\det AB = -128 = (16)(-8) = \det A \det B$. ◆

ADVERTENCIA El determinante de la suma *no* siempre es igual a la suma de los determinantes. Esto es, para la mayoría de los pares de matrices, A y B,

$$\det (A + B) \neq \det A + \det B$$

Por ejemplo, Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\det A = -2, \quad \det B = 6, \quad \text{y}$$
$$\det (A+B) = 22 \neq \det A + \det B = -2 + 6 = 4$$ ◇

Ahora sea $A = LU$ una factorización LU de una matriz de $n \times n$ (vea la página 142). Entonces, por el teorema 1,

$$\det A = \det LU = \det L \det U$$

Pero L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal, así

$$\det L = \text{producto de los elementos en la diagonal} = 1$$

De manera similar, como U es triangular superior,

$$\det U = \text{producto de los elementos en la diagonal}$$

Entonces se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA 2 Si una matriz cuadrada A tiene la factorización LU, $A = LU$ donde L tiene unos en la diagonal, entonces

$$\det A = \det U = \text{producto de los elementos de la diagonal de } U$$ ✦

EJEMPLO 2 **Uso de la factorización LU para calcular el determinante de una matriz de 4×4**

Calcule $\det A$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

Solución Del ejemplo 1.11.1 en la página 140, $A = LU$, donde

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix}$$

Por lo que $\det A = \det U = (2)(4)(3)(-49) = -1176$. ✦

Si A no se puede reducir a la forma triangular sin hacer permutaciones, por el teorema 1.11.3 en la página 145, existe una matriz permutación P tal que

$$PA = LU$$

Es sencillo probar que si P es una matriz permutación, entonces $\det P = \pm 1$ (vea el problema 42). Entonces

$$\begin{aligned} \det PA &= \det LU \\ \det P \det A = \det L \det U &= \det U \qquad \boxed{\det L = 1} \\ \pm \det A &= \det U \\ \det A &= \pm \det U \end{aligned}$$

TEOREMA 3 Si $PA = LU$, donde P es una matriz permutación y L y U son como antes, entonces

$$\det A = \frac{\det U}{\det P} = \pm \det U$$ ✦

EJEMPLO 3 **Uso de la factorización $PA = LU$ para calcular el determinante de una matriz de 3×3** Encuentre $\det A$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Solución En el ejemplo 1.11.3 en la página 141 se encontró que $PA = LU$, donde

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, $\det P = 1$ y $\det U = (1)(2)(-3)$, de manera que $\det A = \frac{-6}{1} = -6$. ◆

Se establecerá un importante teorema sobre determinantes.

TEOREMA 4 $\det A' = \det A$

Demostración Suponga que $A = LU$. Entonces $A' = (LU)' = U'L'$ por el teorema 1.9.1 *ii*) en la página 122. Se calcula

$$\det A = \det L \det U = \det U$$
$$\det A' = \det U' \det L' = \det U' = \det U = \det A \qquad \boxed{\det L = 1}$$

El último paso se basa en que la transpuesta de una matriz triangular superior es triangular inferior y viceversa, y en que obtener la transpuesta no cambia las componentes de la diagonal de una matriz.

Si A no se puede escribir como LU, entonces existe una matriz permutación P tal que $PA = LU$. Por lo que se acaba de probar,

$$\det PA = \det (PA)' = \det (A'P')$$

y por el teorema 1,

$$\det P \det A = \det PA = \det (A'P') = \det A' \det P'$$

No es difícil probar (vea el problema 43) que si P es una matriz permutación, entonces $\det P = \det P'$. Como $\det P = \det P' = \pm 1$, se concluye que $\det A = \det A'$. ◆

EJEMPLO 4 **Una matriz y su transpuesta tienen el mismo determinante**

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y es fácil verificar que $|A| = |A'| = 16$. ◆

Observación. Como los renglones de una matriz son las columnas de su transpuesta, se deduce que todo lo que se pueda decir sobre los renglones de los determinantes es cierto también para sus columnas. Las siguientes propiedades sobre determinantes comprenden una segunda manera de simplificar los cálculos de los determinantes. Los resultados se prueban para los renglones. Por lo que se acaba de decir, los teoremas se cumplen también para las columnas.

Primero se describen estas propiedades estableciendo un teorema del que se deducen muchos resultados importantes. La demostración de este teorema es difícil y se pospone a la siguiente sección.

TEOREMA 5 **Teorema básico** Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\boxed{\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}} \quad (1)$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Es decir, **se puede calcular det A expandiendo por cofactores en cualquier renglón de A**. Más aún,

$$\boxed{\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}} \quad (2)$$

Como la columna j de A es $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, la ecuación (2) indica que **se puede calcular det A expandiendo por cofactores en cualquier columna de A**. ✦

EJEMPLO 5 **Obtención del determinante expandiendo en el segundo renglón o la tercera columna** En el ejemplo 2.1.1 en la página 173 se vio que para $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\det A = -69$. Expandiendo en el segundo renglón, se obtiene

$$\begin{aligned} \det A &= 4A_{21} + 2A_{22} + 3A_{23} \\ &= 4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -4(16) + 2(14) - 3(11) = -69 \end{aligned}$$

De igual manera, si se expande en la tercera columna, se obtiene

$$\det A = 2A_{13} + 3A_{23} + 4A_{33}$$
$$= 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2(10) - 3(11) + 4(-14) = -69$$

El lector debe verificar que se obtiene el mismo resultado con la expansión por cofactores en el tercer renglón o la primera o segunda columna. ✦

Ahora se dan y se demuestran algunas propiedades adicionales de los determinantes. En cada caso se supone que A es una matriz de $n \times n$. Se verá que estas propiedades se pueden usar para reducir mucho el trabajo necesario para evaluar un determinante.

Propiedad 1 Si cualquier renglón o columna de A es un vector cero, entonces $\det A = 0$.

Demostración Suponga que el renglón i de A contiene sólo ceros. Esto es, $a_{ij} = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Entonces, $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$. La misma prueba funciona si la columna j es el vector cero. ✦

EJEMPLO 6 **Si A tiene un renglón o una columna de ceros, entonces $\det A = 0$** es fácil verificar que

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

✦

Propiedad 2 Si el renglón i o la columna j de A se multiplica por un escalar c, entonces $\det A$ se multiplica por c. Es decir, si se denota por B esta nueva matriz, entonces

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c\,|A| \qquad (3)$$

Demostración Para probar (3) se expande en el renglón i de A para obtener

$$\det B = ca_{i1}A_{i1} + ca_{i2}A_{i2} + \cdots + ca_{in}A_{in}$$
$$= c(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) = c\det A$$

En el caso de las columnas se puede hacer una prueba similar. ✦

EJEMPLO 7 **Ilustración de la propiedad 2** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces det A = 16. Si se multiplica el segundo renglón por 4, se tiene $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 12 & 4 & 16 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ y det $B = 64 = 4$ det A.

Si se multiplica la tercera columna por -3, se obtiene $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & -12 \\ 0 & -2 & -15 \end{pmatrix}$ y det $C = -48$ $= -3$ det A. ✦

Observación. Usando la propiedad 2 se puede probar (vea el problema 28) el interesante hecho de que para cualquier escalar α y cualquier matriz A de $n \times n$, det $\alpha A = \alpha^n$ det A.

Propiedad 3 Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\text{y } C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j}+\alpha_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j}+\alpha_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj}+\alpha_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\boxed{\det C = \det A + \det B} \qquad (4)$$

En otras palabras, suponga que A, B y C son idénticas excepto por la columna j y que la columna j de C es la suma de las j-ésimas columnas de A y B. Entonces, det C = det A + det B. La misma afirmación es cierta para renglones.

Demostración Se expande det C respecto a la columna j para obtener

$$\begin{aligned} \det C &= (a_{1j}+\alpha_{1j})A_{1j} + (a_{2j}+\alpha_{2j})A_{2j} + \cdots + (a_{nj}+\alpha_{nj})A_{nj} \\ &= (a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}) \\ &\quad + (\alpha_{1j}A_{1j} + \alpha_{2j}A_{2j} + \cdots + \alpha_{nj}A_{nj}) = \det A + \det B \end{aligned}$$ ✦

EJEMPLO 8 **Ilustración de la propiedad 3** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1-6 & 2 \\ 3 & 1+2 & 4 \\ 0 & -2+4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces $\det A = 16$, $\det B = 108$ y $\det C = 124 = \det A + \det B$. ◆

Propiedad 4 El intercambio de cualesquiera dos renglones (o columnas) distintos de A tiene el efecto de multiplicar $\det A$ por -1.

Demostración Se prueba la afirmación para los renglones y se supone primero que se intercambian dos renglones adyacentes. Esto es, se supone que se intercambian los renglones i y el $(i+1)$. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Después, expandiendo $\det A$ respecto al renglón i y B respecto al renglón $(i+1)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \det A &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ \det B &= a_{i1}B_{i+1,1} + a_{i2}B_{i+1,2} + \cdots + a_{in}B_{i+1,n} \end{aligned} \tag{5}$$

Aquí $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$, donde M_{ij} se obtiene eliminando el renglón i y la columna A. Observe ahora que si se elimina el renglón $(i+1)$ y la columna j de B se obtiene el mismo M_{ij}. Entonces

$$B_{i+1,j} = (-1)^{i+1+j}|M_{ij}| = -(-1)^{i+j}|M_{ij}| = -A_{ij}$$

de manera que, de la ecuación (5), $\det B = -\det A$.

Ahora suponga que $i < j$ y que deben intercambiarse los renglones i y j. Esto se puede hacer intercambiando renglones varias veces. Se harán $j - i$ intercambios para mover el renglón j al renglón i. Entonces el renglón i estará en el renglón $(i + 1)$ pasará por otros $j - i - 1$ intercambios para mover el renglón i al renglón j. Para ilustrar esto, se intercambian los renglones 2 y 6:†

† Observe que to[illegible]

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 \\
3 & & 3 & & 3 & & 6 & & 2 & & 3 & & 3 & & 3 \\
4 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 6 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 4 \\
5 & & 6 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 2 & & 5 \\
6 & & 5 & & 5 & & 5 & & 5 & & 5 & & 5 & & 2 \\
7 & & 7 & & 7 & & 7 & & 7 & & 7 & & 7 & & 7
\end{array}
$$

$6 - 2 = 4$ intercambia para mover el 6 a la posición 2

$6 - 2 = 4$ intercambia para poner el 2 a la posición 6

Por último, el número total de intercambios de renglones adyacentes es $(j - i) + (j - i - 1) = 2j - 2i - 1$, que es impar. Entonces, det A se multiplica por -1 un número impar de veces, que es lo que se quería demostrar. ◆

EJEMPLO 9 **Ilustración de la propiedad 4** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Al intercambiar los renglones 1 y 3 se obtiene $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Al intercambiar las columnas 1 y 2 de A se obtiene $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces, haciendo los cálculos directos, se encuentra que det $A = 16$ y det $B =$ det $C = -16$. ◆

Propiedad 5 Si A tiene dos renglones o columnas iguales, entonces det $A = 0$.

Demostración Suponga que los renglones i y j de A son iguales. Al intercambiar estos renglones se obtiene una matriz B que tiene la propiedad de que det $B = -$det A (de la propiedad 4). Pero como renglón i = renglón j, al intercambiarlos se obtiene la misma matriz. Así, $A = B$ y det A = det $B = -$det A. Por lo tanto, 2 det $A = 0$, lo que puede ocurrir sólo si det $A = 0$. ◆

EJEMPLO 10 **Ilustración de la propiedad 5** Mediante el cálculo directo, se puede verificar que para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ [dos renglones iguales] y $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ [dos columnas iguales], det A = det $B = 0$. ◆

Propiedad 6 Si un renglón (columna) de A es un múltiplo escalar de otro renglón (columna), entonces $\det A = 0$.

Demostración Sea $(a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}) = c(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$. Entonces por la propiedad 2,

$$\det A = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(de la propiedad 5)}$$

(renglón j ⟶ indica el renglón $a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{in}$ inferior)

✦

EJEMPLO 11 **Ilustración de la propiedad 6** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ -4 & 6 & -10 \end{vmatrix} = 0$ ya que el tercer renglón es igual a -2 veces el primero. ✦

EJEMPLO 12 **Otra ilustración de la propiedad 6** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 12 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 9 & -3 \\ 7 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$ porque la cuarta columna es igual a tres veces la segunda. ✦

Propiedad 7 Si se suma un múltiplo escalar de un renglón (columna) de A a otro renglón (columna) de A, entonces el determinante no cambia.

Demostración Sea B la matriz obtenida sumando c veces el renglón i de A al renglón j de A. Entonces

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + ca_{i1} & a_{j2} + ca_{i2} & \cdots & a_{jn} + ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\text{(por la propiedad 3)}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$= \det A + 0 = \det A$ (el cero viene de la propiedad 6) ◆

EJEMPLO 13 **Ilustración de la propiedad 7** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces det $A = 16$. Si se multiplica el tercer renglón por 4 y se suma al segundo renglón, se obtiene una nueva matriz B dada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3+4(0) & 1+4(-2) & 4+5(4) \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 24 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

y det $B = 16 =$ det A. ◆

Las propiedades que se acaban de presentar hacen mucho más sencilla la evaluación de determinantes de alto orden. Simplemente se "reduce por renglones" el determinante, usando la propiedad 7, hasta que tenga una forma en la que se pueda evaluar fácilmente. La meta más común será usar la propiedad 7 de manera repetida hasta que 1) el nuevo determinante tenga un renglón (columna) de ceros o un renglón (columna) que sea múltiplo de otro —en cuyo caso el determinante es cero— o 2) la nueva matriz sea triangular, con lo que su determinante es el producto de sus elementos en la diagonal.

EJEMPLO 14 **Utilice las propiedades de los determinantes para calcular un determinante de 4 × 4** Calcule

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

Solución (Vea el ejemplo 2.1.7, página 177.)

Hay ya un cero en la primera columna, por lo que lo más sencillo es reducir otros elementos de la primera columna a cero. Se puede continuar la reducción buscando una matriz triangular.

Se multiplica el primer renglón por −2 y se suma al tercer renglón; se multiplica el primer renglón por −3 y se suma al cuarto.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{vmatrix}$$

Se multiplica el segundo renglón por −5 y −7 y se suma al tercer y cuarto renglones, respectivamente.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix}$$

Se factoriza −16 del tercer renglón (usando la propiedad 2).

$$= -16\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix}$$

Se multiplica el tercer renglón por 32 y se suma al cuarto.

$$= -16\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

Ahora se tiene una matriz triangular superior y $|A| = -16(1)(-1)(1)(10) = (-16)(-10) = 160$. ◆

EJEMPLO 15 **Uso de las propiedades para calcular un determinante de 4 × 4** Calcule

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Solución Existen varias maneras de proceder en este caso y no es evidente cuál será la más rápida para llegar a la respuesta. Sin embargo, como ya hay un cero en el primer renglón, se comienza la reducción en ese renglón.

Se multiplica la segunda columna por 2 y por −4 y se suma a la primera y cuarta columnas, respectivamente.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \\ 12 & 7 & 3 & -27 \\ -11 & -7 & 2 & 33 \end{vmatrix}$$

Se intercambian las primeras dos columnas.

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \\ 7 & 12 & 3 & -27 \\ -7 & -11 & 2 & 33 \end{vmatrix}$$

Se multiplica la segunda columna por −5 y por −6 y se suma a la tercera y cuarta columnas, respectivamente.

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & -57 & -99 \\ -7 & -11 & 57 & 99 \end{vmatrix}$$

Como la cuarta columna es ahora un múltiplo de la tercera (columna 4 = $\frac{99}{57}$ × columna 3), se ve que $|A| = 0$.

✦

EJEMPLO 16 **Uso de las propiedades para calcular un determinante de 5 × 5** Calcule

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -5 & -1 & 3 & 7 & -9 \end{vmatrix}$$

Solución Sumando primero el renglón 2 y después el renglón 4 al renglón 5, se obtiene

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(de la propiedad 1)}$$

Este ejemplo ilustra el hecho de que un poco de observación antes de comenzar los cálculos puede simplificar las cosas considerablemente.

✦

Existe un hecho adicional sobre determinantes que resultará muy útil.

TEOREMA 6 Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} \qquad \text{si } i \neq j \tag{6}$$

Nota. Del teorema 5 la suma en la ecuación (6) es igual a det A si $i = j$.

Demostración Sea

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{renglón } j$$

Entonces, como dos renglones de B son iguales, det $B = 0$. Pero $B = A$ excepto por el renglón j. Así si se calcula det B expandiendo en el renglón j de B, se obtiene la suma en (6) y el teorema queda demostrado. Observe que al hacer la expansión respecto al renglón j, este renglón se elimina al calcular los cofactores de B. Así, $B_{jk} = A_{jk}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. ✦

PROBLEMAS 2.2

Autoevaluación

I. ¿Cuáles de los siguientes determinantes son 0?

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ **d.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

II. ¿Cuáles de los siguientes determinantes son 0?

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ **d.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

III. El determinante de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ es ______.

a. 4 **b.** 10 **c.** −10 **d.** 8 **e.** 6

Respuestas a la autoevaluación

I. b **II.** c **III.** a

En los problemas 1 al 20 evalúe el determinante usando los métodos de esta sección.

1. $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 8 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 8 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -6 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

En los problemas 21 al 27 calcule el determinante suponiendo que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 8$$

21. $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} -3a_{11} & -3a_{12} & -3a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & 2a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & 2a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}-a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 2a_{11}-3a_{21} & 2a_{12}-3a_{22} & 2a_{13}-3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

28. Usando la propiedada 2, demuestre que si α es un escalar y A es una matriz de $n \times n$, entonces $\det \alpha A = \alpha^n \det A$.

***29.** Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

***30.** Una matriz es **antisimétrica** si $A^t = -A$. Si A es una matriz antisimétrica de $n \times n$, demuestre que $\det A^t = (-1)^n \det A$.

31. Usando el resultado del problema 30, demuestre que si A es una matriz antisimétrica de $n \times n$ y n es impar, entonces $\det A = 0$.

32. Una matriz A se llama **ortogonal** si A es invertible y $A^{-1} = A^t$. Demuestre que si A es ortogonal, entonces $\det A = \pm 1$.

****33.** Sea Δ el triángulo en el plano con vértices en (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3). Demuestre que el área del triángulo está dada por

$$\text{Área de } \Delta = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

¿Bajo qué circunstancias será igual a cero este determinante?

****34.** Tres rectas, que no son parelelas por pares, determinan un triángulo en el plano. Suponga que las rectas están dadas por

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Demuestre que el área determinada por las rectas es

$$\frac{\pm 1}{2A_{13}A_{23}A_{33}}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

35. El **determinante de Vandermonde**† de 3 × 3 está dado por

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

Demuestre que $D_3 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$.

36. $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$ es el determinante de Vandermonde de 4 × 4.

Demuestre que $D_4 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)$.

****37. a.** Defina el determinante de Vandermonde de $n \times n$, D_n.

b. Demuestre que $D_n = \prod_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{n-1} (a_j - a_i)$, donde $\prod$ representa la palabra "producto". Observe que el producto en el problema 36 se puede escribir $\prod_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{3} (a_j - a_i)$.

38. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

a. Escriba el producto AB.
b. Calcule det A, det B y det AB.
c. Demuestre que det AB = (det A)(det B).

39. La matriz A de $n \times n$ se llama **nilpotente** si $A^k = 0$, la matriz cero, para algún entero $k \geq 1$. Demuestre que las siguientes matrices son nilpotentes y encuentre la k más pequeña tal que

a. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

40. Demuestre que si A es nilpotente, entonces det $A = 0$.

41. La matriz A se llama **idempotente** si $A^2 = A$. ¿Cuáles son los valores posibles para det A si A es idempotente?

42. Sea P una matriz permutación. Demuestre que det $P = \pm 1$. [*Sugerencia:* Por la definición en la página 144, $P = P_n P_{n-1} \cdots P_2 P_1$, donde cada P_i es una matriz permutación elemental. Utilice la propiedad 4 para demostrar que det $P_i = -1$ y después calcule det P usando el teorema 1.]

43. Sea P una matriz permutación. Demuestre que P^t también es una matriz permutación y que det P = det P^t. [*Sugerencia:* si P_i es una matriz permutación elemental, demuestre que $P_i^t = P_i$.]

† A. T. Vandermonde (1735-1796) fue un matemático francés.

MATLAB 2.2

1. a. Sea **A = round(10*(2*rand(n)−1))** para $n = 2$. Encuentre **det(A)**. Ahora encuentre **det(2*A)**. Repita para $n = 3$ y $n = 4$.
   b. (*Papel y lápiz*) Concluya una fórmula para det($2A$) en términos de n y det(A). Concluya una fórmula para det(kA) para k general.
   c. Use MATLAB para probar su fórmula para det ($3A$).
   d. (*Papel y lápiz*) Pruebe la fórmula usando las propiedades aprendidas en esta sección.
2. Para las siguientes matrices, primero encuentre det (A). Después reduzca A a la forma triangular superior, U, usando operaciones con renglones de la forma $R_j \to R_j + cR_i$ o intercambiando R_i y R_j. Encuentre det (U) y verifique que det (A) = $(-1)^k$ det (U), donde k es el número de intercambios de renglones realizado en el proceso de reducción.

   a. $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$　　b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   c. Para esta matriz, antes de cada operación con renglones, intercambie los renglones de manera que el elemento en la posición pivote sea el de mayor valor absoluto de los elementos posibles a usar como ese pivote:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   d. Elija una matriz aleatoria A de $n \times n$ y redúzcala a la forma triangular superior encontrando la descomposición LU de A mediante el comando **[L,U,P] = lu(A)**. Use P para determinar el número de intercambios de renglones realizados y verifique que det (A) = $(-1)^k$ det (U), donde k es el número de intercambios de renglones. Describa el papel de det (P). Repita para otras dos matrices A.

2.3 DEMOSTRACIÓN DE TRES TEOREMAS IMPORTANTES Y ALGO DE HISTORIA

Antes se citaron tres teoremas que son fundamentales en la teoría de matrices y determinantes. Las demostraciones de estos teoremas son más complicadas que las demostraciones que ya se vieron. Trabaje despacio en estas demostraciones; la recompensa será un mejor entendimiento de algunas ideas importantes del álgebra lineal.

TEOREMA 1 **Teorema básico** Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (1) \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (2) \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

Nota. La primera igualdad es la definición 2.1.4 del determinante mediante la expansión por cofactores del primer renglón; la segunda igualdad dice que la expansión por cofactores de cualquier otro renglón lleva al determinante; la tercera igualdad dice que la expansión por cofactores de cualquier columna da el determinante. Por la observación en la página 190, sólo se necesita probar el teorema para los renglones [ecuación (1)].

Demostración Se probará la igualdad (1) por inducción matemática. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, de 2×2, primero se expande por cofactores el primer renglón: $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(a_{22}) + a_{12}(-a_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Así, expandiendo en el segundo renglón se obtiene $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} = a_{21}(-a_{12}) + a_{22}(a_{11}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Entonces se obtiene el mismo resultado expandiendo en cualquier reglón de una matriz de 2×2, y esto prueba la igualdad (1) en el caso 2×2.

Ahora se supone que la igualdad (1) se cumple para todas las matrices de $(n-1) \times (n-1)$. Debe demostrarse que se cumple para las matrices de $n \times n$. El procedimiento será expandir por cofactores de los renglones 1 e i, y demostrar que las expansiones son idénticas. La expansión en el primer renglón da el siguiente término general

$$a_{1k}A_{1k} = (-1)^{1+k}a_{1k}|M_{1k}| \tag{3}$$

Observe que este es el único lugar en la expansión de $|A|$ en que aparece el término a_{ik} ya que otro término general sería $a_{1m}A_{1m} = (-1)^{1+m}a_{1m}|M_{1m}|$, con $k \neq m$ y M_{1m} se obtiene eliminando el primer renglón y la m-ésima columna de A (y a_{1k} está en el primer renglón de A). Como M_{1k} es una matriz de $(n-1) \times (n-1)$, por la hipótesis de inducción se puede calcular $|M_{1k}|$ expandiendo en el renglón i de A (que es el renglón $(i-1)$ de M_{1k}). Un término general de esta expansión es

$$a_{il} \text{ (cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k}) \quad (k \neq l) \tag{4}$$

Por las razones descritas, éste es el único término en la expansión de $|M_{1k}|$ en el i-ésimo renglón de A que contiene el término a_{il}. Sustituyendo (4) en la ecuación (3), se encuentra que

$$(-1)^{1+k}a_{1k}a_{il} \text{ (cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k}) \quad (k \neq l) \tag{5}$$

es la única ocurrencia del término $a_{1k}a_{il}$ en la expansión por cofactores de $\det A$ en el primer renglón.

Ahora, si se expande por cofactores en el renglón i de A (donde $i \neq 1$), el término general es

$$(-1)^{i+l}a_{il}|M_{il}| \tag{6}$$

y el término general en la expansión de $|M_{il}|$ en el primer renglón de M_{il} es

$$a_{1k} \text{ (cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il}) \quad (k \neq l) \tag{7}$$

Si se inserta (7) en el término (6) se encuentra que la única ocurrencia del término $a_{il}a_{1k}$ en la expansión del renglón i de $\det A$ es

$$(-1)^{i+l}a_{1k}a_{il} \text{(cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il}) \quad (k \neq l) \tag{8}$$

Si se puede demostrar que las expansiones (5) y (8) son la misma, entonces (1) quedará demostrada, ya que el término en (5) es la única ocurrencia de $a_{1k}a_{il}$ en la expansión del primer renglón, el término en (8) es la única ocurrencia de $a_{1k}a_{il}$ en la expansión del i-ésimo renglón, y k, i y l son arbitrarios. Esto demostrará que las sumas de términos en las expansiones en los renglones 1 e i son iguales.

Ahora sea $M_{1i,kl}$ la matriz de $(n-2)\times(n-2)$ obtenida al eliminar los renglones 1 e i y las columnas k y l de A. (Esto se llama **menor de segundo orden** de A.) Primero se supone que $k<l$. Después

$$M_{1k}=\begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2l} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,k-1} & a_{i,k+1} & \cdots & a_{il} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$M_{il}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k} & \cdots & a_{i-1,l-1} & a_{i-1,l+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k} & \cdots & a_{i+1,l-1} & a_{i+1,l+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{n,l-1} & a_{n,l+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

De (9) y (10) se ve que

$$\text{Cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k} = (-1)^{(i-1)+(l-1)}|M_{1i,kl}| \tag{11}$$

$$\text{Cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il} = (-1)^{1+k}|M_{1i,kl}| \tag{12}$$

Entonces (5) se convierte en

$$(-1)^{1+k}a_{1k}a_{il}(-1)^{(i-1)+(l-1)}|M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l-1}a_{1k}a_{il}|M_{1i,kl}| \tag{13}$$

y (8) se convierte en

$$(-1)^{i+l}a_{1k}a_{il}(-1)^{1+k}|M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l+1}a_{1k}a_{il}|M_{1i,kl}| \tag{14}$$

Pero $(-1)^{i+k+l-1}=(-1)^{i+k+l+1}$, de manera que los lados derechos de las ecuaciones (13) y (14) son iguales. Así, las expresiones (5) y (8) son iguales y (1) queda demostrado en el caso $k<l$; después por un razonamiento similar se encuentra que si $k>l$,

$$\text{Cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k} = (-1)^{(i-1)+l}|M_{1i,kl}|$$

$$\text{Cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il} = (-1)^{1+(k-1)}|M_{1i,kl}|$$

de manera que (5) se convierte en

$$(-1)^{1+k}a_{1k}a_{il}(-1)^{(i-1)+l}|M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l}a_{1k}a_{il}|M_{1i,kl}|$$

y (8) se convierte en

$$(-1)^{i+l}a_{1k}a_{il}(-1)^{1+k-1}|M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l}a_{1k}a_{il}|M_{1i,kl}|$$

y esto completa la prueba de la ecuación (1). ✦

Ahora se quiere probar que para cualesquiera dos matrices de $n \times n$, A y B, det AB = det A det B. La prueba es difícil e incluye varios pasos. Se usarán varios hechos sobre las matrices elementales probados en la sección 1.10.

Primero se calculan los determinantes de las matrices elementales.

LEMA 1 Sea E una matriz elemental:

i. Si E es la matriz que representa la operación elemental $R_i \rightleftarrows R_j$, entonces det E = −1. **(15)**

ii. Si E es la matriz que representa la operación elemental $R_j \to R_j + cR_i$, entonces det E = 1. **(16)**

iii. Si E es la matriz que representa la operación elemental $R_i \to cR_i$, entonces det $E = c$. **(17)**

Demostración **i.** det I = 1. E se obtiene de I intercambiando los renglones i y j de I. Por la propiedad 4 en la página 194, det E = (−1) det I = −1.

ii. E se obtiene de I multiplicando el renglón i de I por c y sumándolo al renglón j. Entonces por la propiedad 7 en la página 196, det E = det I = 1.

iii. E se obtiene de I multiplicando el renglón i de I por c. Así, por la propiedad 2 en la página 192, det $E = c$ det $I = c$. ◆

LEMA 2 Sea B una matriz de $n \times n$ y sea E una matriz elemental. Entonces

$$\det EB = \det E \det B \tag{18}$$

◆

La prueba de este lema se deduce del lema 1 y los resultados presentados en la sección 2.2, que relacionan las operaciones elementales con renglones con los determinantes. Los pasos de la prueba se indican en los problemas 1 a 3.

El siguiente teorema es un resultado fundamental en la teoría de matrices.

TEOREMA 2 Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si det $A \neq 0$.

Demostración Del teorema 1.10.5 en la página 133, se sabe que existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_m$ y una matriz triangular superior T tal que

$$A = E_1E_2 \cdots E_mT \tag{19}$$

Usando el lema 2 m veces, se ve que

$$\begin{aligned} \det A &= \det E_1 \det (E_2E_3 \cdots E_mT) \\ &= \det E_1 \det E_2 \det (E_3 \cdots E_mT) \\ &\vdots \\ &= \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_{m-1} \det (E_mT) \end{aligned}$$

o sea

$$\det A = \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_{m-1} \det E_m \det T \tag{20}$$

Por el lema 1, $\det E_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, m$. Se concluye que $\det A \neq 0$ si y sólo si $\det T \neq 0$.

Ahora suponga que A es invertible. Entonces, al usar (19) y el hecho de que toda matriz elemental es invertible, $E_m^{-1} \cdots E_1^{-1}A$ es el producto de matrices invertibles. Así, T es invertible y por el teorema 2.1.2 en la página 179, $\det T \neq 0$. Por lo tanto, $\det A \neq 0$

Si $\det A \neq 0$, entonces por (20), $\det T \neq 0$, por lo que T es invertible (por el teorema 2.1.2). Entonces el lado derecho de (20) es el producto de matrices invertibles, y A es invertible. Esto completa la demostración. ◆

Por fin, ahora se puede demostrar el resultado principal. Usando estos resultados establecidos, la prueba es directa.

TEOREMA 3 Sean A y B matrices de $n \times n$. Entonces

$$\det AB = \det A \det B \tag{21}$$

Demostración *Caso 1*: $\det A = \det B = 0$. Entonces por el teorema 2, B no es invertible, así por el teorema 1.8.6, existe un n-vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Entonces $(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, de nuevo por el teorema 1.8.6, AB no es invertible. Por el teorema 2,

$$0 = \det AB = 0 \cdot 0 = \det A \det B$$

Caso 2: $\det A = 0$ y $\det B \neq 0$. A es no invertible, por lo que existe un n-vector $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Como $\det B \neq 0$, B es invertible y existe un vector único $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Entonces $AB\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) = A\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Así, AB es no invertible, esto es

$$\det AB = 0 = 0 \det B = \det A \det B$$

Caso 3: $\det A \neq 0$. A es invertible y se puede escribir como un producto de matrices elementales:

$$A = E_1E_2 \cdots E_m$$

Entonces

$$AB = E_1E_2 \cdots E_mB$$

Usando el resultado del lema 2 repetidas veces, se ve que

$$\begin{aligned}\det AB &= \det (E_1E_2 \cdots E_mB)\\ &= \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_m \det B\\ &= \det (E_1E_2 \cdots E_m) \det B\\ &= \det A \det B\end{aligned}$$ ◆

Semblanza de . . .

Breve historia de los determinantes

Gottfried Wilhelm Leibniz
(Colección de David Eugene Smith, Rare Book and Manuscript Library, Columbia University)

Augustin-Louis Cauchy
(Colección de David Eugene Smith, Rare Book and Manuscript Library, Columbia University)

Los determinantes aparecieron en la literatura matemática más de un siglo antes de las matrices. Como se señaló en la nota de la página 48, el término *matriz* fue usado primero por James Joseph Sylvester y su intención era que su significado fuera "madre de los determinantes".

Algunos grandes matemáticos de los siglos XVIII y XIX ayudaron a desarrollar las propiedades de los determinantes. La mayoría de los historiadores creen que la teoría de determinantes tuvo su origen con el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), quien junto con Newton, fue el coinventor del cálculo. Leibniz usó los determinantes en 1693 en referencia a los sistemas de ecuaciones lineales simultáneas. Sin embargo, algunos piensan que un matemático japonés, Seki Kōwa, hizo lo mismo casi 10 años antes.

El contribuyente más prolífico a la teoría de determinantes fue el matemático francés Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Cauchy escribió una memoria de 84 páginas, en 1812, que contenía la primera prueba del teorema $\det AB = \det A \det B$. En 1840 definió la ecuación característica de la matriz A como la ecuación polinomial $\det(A - \lambda I) = 0$. Esta ecuación se estudiará con detalle en el capítulo 6.

Cauchy hizo muchas otras contribuciones a las matemáticas. En su libro de texto escrito en 1829, *Leçons sur le calcul différential*, dio la primera definición razonablemente clara de un límite.

Cauchy escribió extensamente tanto sobre matemáticas puras como sobre matemáticas aplicadas. Sólo Euler escribió más. Cauchy contribuyó en muchas áreas que incluyen teoría de funciones reales y complejas, teoría de probabilidad, geometría, teoría de propagación de ondas y series infinitas.

Se da a Cauchy el crédito por establecer un nuevo estándar de rigor en las publicaciones matemáticas. Después de Cauchy, resultó más difícil publicar un artículo basado en la intuición; se pedía adhesión estricta a las demostraciones formales.

El basto volumen de las publicaciones de Cauchy era una inspiración. Cuando la Academia Francesa de las Ciencias inició sus publicaciones periódicas *Comptes Rendu* en 1835, Cauchy les envió su trabajo para que lo publicaran. Pronto la cuenta de impresión de sólo el trabajo de Cauchy creció tanto que la Academia puso un límite de cuatro páginas por artículo publicado. Esta regla todavía existe.

Vale la pena mencionar aquí algunos matemáticos. La expansión de un determinante por cofactores fue usada por primera vez por un matemático francés, Pierre-Simon Laplace (1749-1827). Laplace es más conocido por la transformada de Laplace que se estudia en cursos de matemáticas aplicadas.

Un contrbuyente importante a la teoría de determinantes (segundo después de Cauchy) fue el matemático alemán Carl Gustav Jacobi (1804-1851). Fue con él que la palabra "determinante" ganó su aceptación final. Jacobi usó primero un determinante aplicado a las funciones para establecer la teoría de funciones de varias variables. Más tarde, Sylvester llamó a este determinante el *jacobiano*. Los estudiantes actuales estudian los jacobianos en los cursos de cálculo de varias variables.

Por último, ninguna historia de determinantes estaría completa sin citar el libro *An Elementary Theory of determinants*, escrito en 1867 por Charles Dodgson (1832-1898). En este libro Dodgson da las condiciones bajo las que los sistemas de ecuaciones tienen soluciones no triviales. Estas condiciones están escritas en términos de los determinantes de los menores de las matrices de coeficientes. Charles Dodgson es más conocido por su pseudónimo de escritor Lewis Carroll. Con ese nombre publicó su famoso libro *Alicia en el país de las maravillas*.

PROBLEMAS 2.3

1. Sea E la representacion de $R_i \leftrightarrows R_j$ y sea B una matriz de $n \times n$. Demuestre que det EB = det E det B. [*Sugerencia:* describa la matriz EB y después utilice la ecuación (15) y la propiedad 4.]
2. Sea E la representación de $R_j \to R_j + cR_i$ y sea B una matriz de $n \times n$. Demuestre que det EB = det E det B. [*Sugerencia:* describa la matriz EB y después use la ecuación (16) y la propiedad 7.]
3. Sea E la representación de $R_i \to cR_i$ y sea B una matriz de $n \times n$. Demuestre que det EB = det E det B. [*Sugerencia:* describa la matriz EB y después use la ecuación (7) y la propiedad 2.]

2.4 DETERMINANTES E INVERSAS

En esta sección se ve la manera en que se pueden calcular las inversas de las matrices usando determinantes. Más áun, se completa la tarea, iniciada en el capítulo 1, de probar el importante teorema de resumen (vea los teoremas 1.8.6 en la página 111 y 1.10.4 en la página 132), que muestra la equivalencia de varias propiedades de las matrices. Se comienza c[illegible]

TEOREMA 1 Si A es invertible, entonces $\det A \neq 0$ y

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tag{1}$$

Demostración Suponga que A es invertible. Según el teorema 2.3.2 en la página 207, $\det A \neq 0$. Del teorema 2.2.1, página 188

$$1 = \det I = \det AA^{-1} = \det A \det A^{-1} \tag{2}$$

lo que implica que

$$\det A^{-1} = 1/\det A$$ ◆

Antes de usar determinantes para calcular las inversas es necesario definir la *adjunta* de una matriz $A = (a_{ij})$. Sea $B = (A_{ij})$ la matriz de cofactores de A. (Recuerde que un cofactor, definido en la página 175, es un número.) Entonces

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

DEFINICIÓN 1 **La adjunta** Sea A una matriz de $n \times n$ y sea B, dada por (3), la matriz de sus cofactores. Entonces la **adjunta** de A, escrito adj A, es la transpuesta de la matriz B de $n \times n$; es decir,

$$\text{adj } A = B^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Observación. En algunos libros se usa el término **adjugada** de A en lugar de **adjunta** ya que adjunta tiene un segundo significado en matemáticas. En este libro se usará la palabra adjunta.

EJEMPLO 1 **Cálculo de la adjunta de una matriz de 3 × 3** Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Calcule adj A.

Solución Se tiene $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 12$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -3$, $A_{13} = -3$, $A_{21} = -13$, $A_{22} = 5$, $A_{23} = 2$, $A_{31} = -7$, $A_{32} = 2$ y $A_{33} = 2$. Así, $B = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y adj $A = B^t = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. ✦

EJEMPLO 2 **Cálculo de la adjunta de una matriz de 4 × 4** Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcule adj A.

Solución Esto es más tedioso ya que se tienen que calcular dieciséis determinantes de 3 × 3. Por ejemplo, se tiene $A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -2 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$, $A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 10 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -2$ y $A_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & -12 & -6 \\ -2 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 3$. Al completar estos cálculos se encuentra que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$\text{adj } A = B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

✦

EJEMPLO 3 **La adjunta de una matiz de 2 × 2** Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Entonces

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

◆

ADVERTENCIA Al calcular la adjunta de una matriz, no olvide transponer la matriz de cofactores.

◇

TEOREMA 2 Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

$$(A)(\text{adj } A) = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = (\det A)I \qquad (5)$$

Demostración Sea $C = (c_{ij}) = (A)(\text{adj } A)$. Entonces

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Se tiene

$$c_{ij} = (\text{renglón } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de adj } A)$$

$$= (a_{i1} \ \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{pmatrix}$$

Así

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} \qquad (7)$$

Ahora si $i = j$, la suma en (7) es igual a $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$ que es la expansión de $\det A$ sobre el renglón i de A. Por otro lado, si $i \neq j$, entonces del teorema 2.2.6 en la página 199, la suma en (7) es igual a cero. Por lo tanto,

$$c_{ij} = \begin{cases} \det A & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Esto prueba el teorema. ◆

Ahora se puede establecer el resultado principal.

TEOREMA 3 Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$. Si $\det A \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \tag{8}$$

Observe que el teorema 1.8.4, en la página 104, para matrices de 2×2 es un caso especial de este teorema.

Demostración La primera parte del teorema es el teorema 2.3.2. Si $\det A \neq 0$, entonces se demuestra que $(1/\det A)(\operatorname{adj} A)$ es la inversa de A multiplicándola por A y obteniendo la matriz identidad:

$$(A)\left(\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A\right) = \frac{1}{\det A}[A(\operatorname{adj} A)] \overset{\text{teorema 2}}{=} \frac{1}{\det A}(\det A)I = I$$

Pero por el teorema 1.8.7, en la página 112, si $AB = I$, entonces $B = A^{-1}$. Así,

$$(1/\det A) \operatorname{adj} A = A^{-1}$$ ◆

EJEMPLO 4 **Uso del determinante y la adjunta para calcular la inversa** Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Determine si A es invertible y si lo es calcule A^{-1}.

Solución Como $\det A = 3 \neq 0$, se ve que A es invertible. Del ejemplo 1

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Así

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Verificación.

$$A^{-1}A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I$$ ◆

EJEMPLO 5 **Cálculo de la inversa de una matriz de 4 × 4 usando el determinante y la adjunta**

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Determine si A es invertible y, si lo es, calcule A^{-1}.

Solución Usando las propiedades de los determinantes, se calcula det $A = -1 \neq 0$ y por lo tanto A^{-1} existe. Por el ejemplo 2 se tiene

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Así

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$ ✦

Nota 1. Como ya se habrá notado, si $n > 3$, por lo general es más fácil calcular A^{-1} con la reducción por renglones que usando adj A, aun para el caso de 4 × 4 es necesario calcular 17 determinantes (16 para la adjunta de A más det A). Sin embargo, el teorema 3 es muy importante ya que, antes de hacer la reducción por renglones, el cálculo de det A (si es puede hacer fácilmente) dice si A^{-1} existe o no.

Nota 2. En muchas aplicaciones de la teoría de matrices, las matrices están dadas en forma simbólica (es decir, en términos de variables) en lugar de numérica. Por ejemplo, se puede tener $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ en lugar de $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. En este caso, muchas veces el cálculo de los determinantes será la manera más eficiente de proceder. Esto es particularmente cierto en ciertas aplicaciones de ingeniería —como la teoría de control.

En la sección 1.10 fue la última vez que se vio el teorema de resumen (teoremas 1.2.1, 1.8.6 y 1.10.4). Éste es el teorema que une muchos conceptos desarrollados en los primeros capítulos de este libro.

EJEMPLO 5 **Cálculo de la inversa de una matriz de 4 × 4 usando el determinante y la adjunta**

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Determine si A es invertible y, si lo es, calcule A^{-1}.

Solución Usando las propiedades de los determinantes, se calcula det $A = -1 \neq 0$ y por lo tanto A^{-1} existe. Por el ejemplo 2 se tiene

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Así

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$ ◆

Nota 1. Como ya se habrá notado, si $n > 3$, por lo general es más fácil calcular A^{-1} con la reducción por renglones que usando adj A, aun para el caso de 4 × 4 es necesario calcular 17 determinantes (16 para la adjunta de A más det A). Sin embargo, el teorema 3 es muy importante ya que, antes de hacer la reducción por renglones, el cálculo de det A (si es puede hacer fácilmente) dice si A^{-1} existe o no.

Nota 2. En muchas aplicaciones de la teoría de matrices, las matrices están dadas en forma simbólica (es decir, en términos de variables) en lugar de numérica. Por ejemplo, se puede tener $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ en lugar de $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. En este caso, muchas veces el cálculo de los determinantes será la manera más eficiente de proceder. Esto es particularmente cierto en ciertas aplicaciones de ingeniería —como la teoría de control.

En la sección 1.10 fue la última vez que se vio el teorema de resumen (teoremas 1.2.1, 1.8.6 y 1.10.4). Éste es el teorema que une muchos conceptos desarrollados en los primeros capítulos de este libro.

TEOREMA 4 **Teorema de resumen (punto de vista 4)** Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes siete afirmaciones son equivalentes. Es decir, cada una implica a las otras seis (de manera que si una es cierta, todas son ciertas):

i. A es invertible.

ii. La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

iv. A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.

v. A es el producto de matrices elementales.

vi. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii. $\det A \neq 0$.

Demostración En el teorema 1.8.6 se demostró la equivalencia de las partes *i*), *ii*), *iii*), *iv*) y *vi*). En el teorema 1.10.3 se demostró la equivalencia de las partes *i*) y *v*). El teorema 1 (o teorema 2.3.2) demuestra la equivalencia de *i*) y *vii*). ✦

PROBLEMAS 2.4

Autoevaluación

I. El determinante de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ es -149. La componente 2,3 de A^{-1} está dada por

a. $-\frac{1}{149}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

b. $\frac{1}{149}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

c. $-\frac{1}{149}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

d. $\frac{1}{149}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

II. El determinante de $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ -1 & 5 & 8 \\ 6 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ es 468. La componente 3,1 de A^{-1} es

a. $-\frac{26}{468}$ **b.** $\frac{26}{468}$ **c.** $\frac{46}{468}$ **d.** $-\frac{46}{468}$

Respuestas a la autoevaluación

I. d **II.** a

En los problemas 1 al 12 utilice los métodos de esta sección para determinar si la matriz dada es invertible. Si lo es, calcule la inversa.

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 19 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & -4 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

13. Use determinantes para demostrar que una matriz A de $n \times n$ es invertible si y sólo si A^t es invertible.

14. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, verifique que det A^{-1} = 1/det A.

15. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, verifique que det A^{-1} = 1/det A.

16. ¿Para qué valores de α la matriz $\begin{pmatrix} \alpha & -3 \\ 4 & 1-\alpha \end{pmatrix}$ es no invertible?

17. ¿Para qué valores de α la matriz $\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{pmatrix}$ no tiene inversa?

18. Suponga que la matriz A de $n \times n$ es no invertible. Demuestre que (A)(adj A) es la matriz cero.

19. Sea θ un número real. Demuestre que $\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.

MATLAB 2.4

1. Genere una matriz aleatoria de $n \times m$ con **A = 2*rand(n,m)–1** para algunos valores de n y m tales que $m > n$. Encuentre el determinante de A^tA. ¿Qué puede concluir sobre A^tA? Pruebe su conclusión para otras tres matrices A. ¿Es válida su conclusión si $m < n$?

2. Sea **A = round(10*(2*rand(4)–1))**.
   a. Dé el comando **flops(0)**. Calcule adj (A) usando MATLAB. (Para comenzar haga **C = zeros(4); C(1,1) = det(A([2 3 4],[2 3 4])); C(1,2) = –det(A([2 3 4],[1 3 4]));** etcétera. No olvide transponer.) Dé el comando **s = flops**.

b. Dé el comando **flops(0)**. Calcule **D = det(A)*inv(A)**. Dé el comando **ss = flops**.

c. Compare adj(A), calculada en el inciso a), con D, calculada en el inciso b)? ¿Por qué esperaría eso?

d. Compare los conteos de flops. ¿Qué descubrió al comparar los conteos de flops? (Recuerde que **flops** cuenta el número de operaciones de punto flotante realizadas.)

3. Se ha demostrado que A es no invertible si det $(A) = 0$. Una suposición natural es que si A es cercana a ser no invertible, entonces det(A) estará cerca de 0.

Considere la siguiente matriz C. Verifique que C es no invertible. Dé **A = C; A(3,3) = C(3,3) + 1.e−10**. Verifique que A es invertible y observe que A es cercana a la matriz no invertible C. Encuentre **det(A)**. ¿Qué puede concluir sobre la "suposición natural" que se mencionó?

$$C = 20 * \begin{pmatrix} 7 & 7 & -7 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & -10 & 4 & 8 & 6 \\ 9 & 7 & -5 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & -9 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 9 & 10 & 8 \\ 1 & 9 & -17 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

4. a. Introduzca una matriz A triangular superior de 5×5 con elementos enteros de manera que el determinante de A es 1. Elija valores de c (entero), i y j y relice varias operaciones con renglones de la forma $R_j \rightarrow R_j + cR_i$ de manera que la matriz esté completa, es decir, que tenga el menor número de ceros posible. Llame A a la nueva matriz.

b. Verifique que det(A) es todavía igual a 1. ¿Por qué es esto de esperarse? Encuentre inv(A) y verifique que tiene elementos enteros. ¿Por qué es esto de esperarse?

PROBLEMA PROYECTO

c. Consulte el problema 9 de MATLAB 1.8 sobre encriptar y decodificar los mensajes. Este problema le pide que encripte un mensaje para su profesor usando la matriz A creada antes.

i. Cree un mensaje para su profesor. Usando números en lugar de letras, como se describió en el problema 9 de MATLAB 1.8, escriba el mensaje en forma matricial para que pueda multiplicarlo por la derecha por A para codificar el mensaje. (Puede ser que necesite colocar espacios adicionales al final del mensaje.)

ii. Utilice A para encriptar el mensaje.

iii. Entregue el mensaje encriptado a su profesor (como una cadena de números) y la matriz A.

2.5 REGLA DE CRAMER (OPCIONAL)

En esta sección se examina un viejo método para resolver sistemas con el mismo número de incógnitas y ecuaciones. Considere el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{1}$$

que puede escribirse en la forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2}$$

Si det $A \neq 0$, entonces el sistema (2) tiene una solución única dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Se puede desarrollar un método para encontrar esa solución sin reducción por renglones y sin calcular A^{-1}.

Sea $D = \det A$. Se definen n nuevas matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Es decir, A_i es la matriz obtenida remplazando la columna i de A por $\mathbf{b}$. Por último, sea $D_1 = \det A_1$, $D_2 = \det A_2, \ldots, D_n = \det A_n$.

TEOREMA 1 **Regla de Cramer** Sea A una matriz de $n \times n$ y suponga que det $A \neq 0$. Entonces la solución única al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por

$$\boxed{x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_i = \frac{D_i}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}} \tag{3}$$

Demostración La solución a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Pero

$$A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{D}(\text{adj } A)\mathbf{b} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

Ahora bien, (adj A)$\mathbf{b}$ es un n-vector cuya componente j es

$$(A_{1j}\ A_{2j} \ldots A_{nj}) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj} \tag{5}$$

Considere la matriz A_j:

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6}$$

↑ columna j

Si se expande el determinante de A_j respecto a su columna j, se obtiene

$$D_j = b_1 \text{ (cofactor de } b_1) + b_2 \text{ (cofactor de } b_2) + \cdots + b_n \text{ (cofactor de } b_n) \tag{7}$$

Pero para encontrar el cofactor de b_i, por ejemplo, se elimina el renglón i y la columna j de A_j (ya que b_i está en la columna j de A_j). Pero la columna j de A_j es **b**, y si se elimina se tendrá simplemente el menor ij, M_{ij}, de A. Entonces

$$\text{Cofactor de } b_i \text{ en } A_j = A_{ij}$$

De manera que (7) se convierte en

$$D_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj} \tag{8}$$

Pero esto es lo mismo que el lado derecho de (5). Por lo tanto, la componente i de (adj A)**b** es D_i, y se tiene

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{D}(\text{adj } A)\mathbf{b} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1/D \\ D_2/D \\ \vdots \\ D_n/D \end{pmatrix}$$

y la prueba queda completa. ◆

Nota histórica. La regla de Cramer recibe su nombre en honor del matemático suizo Gabriel Cramer (1704-1752). Cramer publicó la regla en 1750 en su libro *Introduction to the Analysis of Lines of Algebraic Curves*. De hecho, existe evidencia que sugiere que Colin Maclaurin (1698-1746) conocía la regla desde 1729; Maclaurin fue quizá el matemático británico más sobresaliente en los años que siguieron a la muerte de Newton. La regla de Cramer es uno de los resultados más conocidos en la historia de las matemáticas. Durante casi 200 años fue fundamental en la enseñanza del álgebra y de la teoría de ecuaciones. Debido al gran número de cálculos requeridos, se usa muy poco en la actualidad. Sin embargo, el resultado fue muy importante en su tiempo.

EJEMPLO 1 **Solución de un sistema de 3 × 3 usando la regla de Cramer** Resuelva el sistema usando la regla de Cramer:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad (9)$$

Solución Esto ya se resolvió en el ejemplo 1.3.1 en la página 7 —usando reducción por renglones. También se pudo resolver calculando A^{-1} (ejemplo 1.8.6, página 106) y después encontrando $A^{-1}\mathbf{b}$. Ahora se resolverá usando la regla de Cramer. Primero, se tiene

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

de manera que el sistema (9) tiene una solución única. Después $D_1 = \begin{vmatrix} 18 & 4 & 6 \\ 24 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 24$,

$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 6 \\ 4 & 24 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -12$ y $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 4 & 5 & 24 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 18$. Por lo tanto, $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{24}{6} = 4$,

$x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{12}{6} = -2$ y $x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{18}{6} = 3$. ◆

EJEMPLO 2 **Solución de un sistema de 4 × 4 usando la regla de Cramer** Demuestre que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 + 6x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= -1 \end{aligned} \qquad (10)$$

tiene una solución única y encuéntrela usando la regla de Cramer.

Solución En el ejemplo 2.2.14 en la página 197 se vio que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 160 \neq 0$$

Entonces, el sistema tiene una solución única. Para encontrarla se calcula $D_1 = -464$; $D_2 = 280$; $D_3 = -56$; $D_4 = 112$. Así $x_1 = D_1/D = -464/160$, $x_2 = D_2/D = 280/160$, $x_3 = D_3/D = -56/160$ y $x_4 = D_4/D = 112/160$. Estas soluciones se pueden verificar por sustitución directa en el sistema (10). ◆

PROBLEMAS 2.5

Autoevaluación

I. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 7 \\ 3x + 8y - z &= 2 \\ -5x - 12y + 6z &= 11 \end{aligned}$$

Si $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 8 & -1 \\ -5 & -12 & 6 \end{vmatrix}$, entonces $y =$ ______.

a. $\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 2 & 8 & -1 \\ 11 & -12 & 6 \end{vmatrix}$

b. $\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 8 & 2 \\ -5 & -12 & 11 \end{vmatrix}$

c. $\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -5 & 11 & 6 \end{vmatrix}$

d. $\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ -5 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

En los problemas 1 al 9 resuelva el sistema dado usando la regla de Cramer.

1. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= -1 \\ -7x_1 + 4x_2 &= 47 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 11 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ 4x_2 - x_3 &= -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - x_3 &= -1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + x_3 &= 2 \\ -x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 - x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_3 + 6x_4 &= 3 \\ x_1 - x_4 &= 5 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} x_1 - x_4 &= 7 \\ 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 - x_2 &= -3 \\ 3x_3 - 5x_4 &= 2 \end{aligned}$

Respuestas a la autoevaluación

I. c

***10.** Considere el triángulo en la figura 2.2

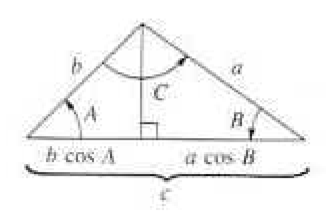


Figura 2.2

a. Demuestre, usando trigonometría elemental, que

$$\begin{array}{rcrcrcl} c\cos A & & & + & a\cos C & = & b \\ b\cos A & + & a\cos B & & & = & c \\ & & c\cos B & + & b\cos C & = & a \end{array}$$

b. Si se piensa que el sistema del inciso *a*) es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, cos *A*, cos *B* y cos *C*, demuestre que el determinante del sistema es diferente de cero.

c. Utilice la regla de Cramer para despejar cos *C*.

d. Utilice el inciso *c*) para probar la **ley de los cosenos:** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

MATLAB 2.5

1. Genere una matriz aleatoria *A* de 5 × 5 y una matriz aleatoria **b** de 5 × 1.

a. Dé el comando **flops(0)**. Resuelva el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ usando la regla de Cramer. Primero encuentre **d = det(A)**. En el resto de los cálculos, use *d*; es decir, no vuelva a calcular det(*A*). (Para usar la regla de Cramer será necesario que forme la matriz obtenida de *A* cambiando la columna *i* de *A* por **b: C = A; C(:,i) = b**. Utilice de manera eficiente las flechas para el cursor para repetir las instrucciones después de alguna modificación.) Después de encontrar cada componente de la solución, forme un vector columna con ella y llámelo **x**. Dé el comando **s = flops**.

b. Dé el comando **flops(0)**. Resuelva el sistema usando **z = A\b**. Dé el comando **ss = flops**.

c. Compare **x** y **z** calculando **x − z** y despliegue el resultado usando **format short e**. Compare los conteos de flops, **s** y **ss**. ¿Qué descubrió con estas comparaciones?

d. Repita para una matriz aleatoria de 7 × 7. ¿Qué otras afirmaciones puede hacer sobre el conteo de flops?

RESUMEN

- El **determinante** de una matriz de 2 × 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ está dado por (p. 172)

$$\text{Determinante de } A = \det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- **Determinante de 3 × 3**

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$ (p. 173)

- El **menor *ij*** de la matriz A de $n \times n$, denotado por M_{ij}, es la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ obtenida al eliminar el renglón i y la columna j de A. (p. 175)
- El **cofactor *ij*** de A, denotado por A_{ij}, está dado por

$$A_{ij} = (-i)^{i+j} \det M_{ij}$$ (p. 175)

- ***Determinante de n × n***

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces (p. 176)

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$$

La suma anterior se llama la **expansión de det A por cofactores en el primer renglón.**

- Si A es una matriz de $n \times n$, triangular superior, triangular inferior o diagonal, cuyas componentes en la diagonal son $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ entonces (p. 178)

$$\det A = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$$

- Si $A = LU$ es una factorización LU de A, entonces $\det A = \det U$ (p. 189)
- Si $PA = LU$ es una factorización LU de PA, entonces $\det A = \det U/\det P = \pm\det U$ (p. 189)

- ***Teorema básico***

Si A es una matriz de $n \times n$, entonces

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

y (p. 191, 204)

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.
Es decir, el determinante de A se puede obtener expandiendo en cualquier renglón o columna de A.

- Si cualquier renglón o columna de A es el vector cero, entonces $\det A = 0$. (p. 192)
- Si cualquier renglón (columna) de A se multiplica por un escalar, entonces det A se multiplica por c. (p. 192)
- Si A y B son dos matrices de $n \times n$ que son iguales excepto por la columna j (renglón i) y C es la matriz que es idéntica a A y B excepto que la columna j (renglón i) de C es la suma del la columna j de A y la columna j de B (renglón i de A y renglón i de B), entonces $\det C = \det A + \det B$. (p. 193)
- El intercambio de cualesquiera dos columnas o renglones distintos de A tiene el efecto de multiplicar det A por -1. (p. 194)
- Si cualquier renglón (columna) de A se multiplica por un escalar y se suma a cualquier otro renglón (columna) de A, entonces det A no cambia. (p. 196)
- Si un renglón (columna) de A es un múltiplo de otro renglón (columna) de A, entonces $\det A = 0$. (p. 196)
- $\det A = \det A^t$ (p. 190)

- La matriz A de $n \times n$ es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$. (p. 207)
- $\det AB = \det A \det B$ (p. 188, 208)
- Si A es invertible, entonces $\det A \neq 0$ y (p. 211)

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

- Sea A una matriz de $n \times n$. La **adjunta** o **adjugada** de A, denotada por adj A, es la matriz de $n \times n$ cuya componente ij es A_{ji}, el cofactor ji de A. (p. 211)
- Si $\det A \neq 0$, entonces A es invertible y (p. 214)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

- ***Teorema de resumen***
Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes siete afirmaciones son equivalentes: (p. 216)
  i. A es invertible.
  ii. La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).
  iii. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.
  iv. A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.
  v. A es el producto de matrices elementales.
  vi. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.
  vii. $\det A \neq 0$.

- ***Regla de Cramer***
Sea A una matriz de $n \times n$ con $\det A \neq 0$. Entonces la solución única al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por (p. 219)

$$x_1 = \frac{D_1}{\det A}, x_2 = \frac{D_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{\det A}$$

donde D_j es el determinante de la matriz obtenida al remplazar la columna j de A por el vector columna $\mathbf{b}$.

EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 al 8 calcule el determianante.

1. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 10 & 100 & 6 \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \\ -6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 3 & 15 & 17 & 19 \\ 0 & 2 & 21 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

En los ejercicios 9 al 14 utilice determinantes para calcular la inversa (si existe).

9. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

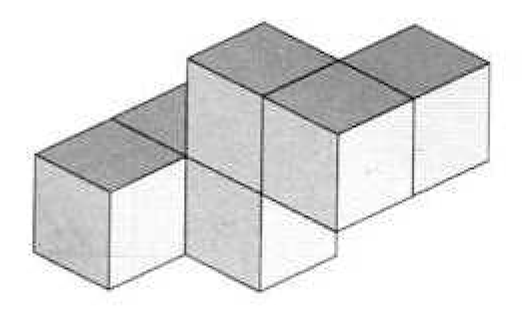
En los ejercicios 15 al 18 resuelva el sistema usando la regla de Cramer.

15. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 \qquad - 5x_3 &= 4 \\ 3x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 \qquad &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 \qquad &= 2 \end{aligned}$



3

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

En la sección 1.5 se definieron los vectores columna y vectores renglón como conjuntos ordenados de n números reales o escalares. En el siguiente capítulo se definirán otros tipos de conjuntos de vectores, llamados *espacios vectoriales*.

El estudio de espacios vectoriales arbitrarios es, en principio, un tema abstracto. Por esto es útil poder contar con un grupo de vectores que se pueden visualizar fácilmente para usarlos como ejemplos.

En este capítulo se discutirán las propiedades básicas de los vectores en el plano xy y en el espacio real de tres dimensiones. Los estudiantes que conocen el cálculo de varias variables ya habrán visto este material. En ese caso, se podrá cubrir rápidamente, como un repaso. Para los que no, el estudio de este capítulo proporcionará ejemplos que harán mucho más comprensible el material de los capítulos 4 y 5.

3.1 VECTORES EN EL PLANO

Como se definió en la sección 1.5, $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de vectores (x_1, x_2) con x_1 y x_2 números reales. Como cualquier punto en el plano se puede escribir en la forma (x, y) es evidente que se puede pensar que cualquier punto en el plano es un vector en $\mathbb{R}^2$, y viceversa. Así, los términos "el plano" y "$\mathbb{R}^2$" con frecuencia son intercambiables. Sin embargo, para muchas aplicaciones físicas (incluyendo las nociones de fuerza, velocidad, aceleración y momento) es importante pensar en un vector no como un punto sino como una entidad que tiene "longitud" y "dirección". Ahora se verá cómo se hace esto.

Segmento de recta dirigido

Sean P y Q dos puntos en el plano. Entonces el **segmento de recta dirigido** de P a Q, denotado por $\overrightarrow{PQ}$, es el segmento de recta que va de P a Q (vea la figura 3.1*a*). Observe que los segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ son diferentes puesto que tienen direcciones opuestas (figura 3.1*b*).

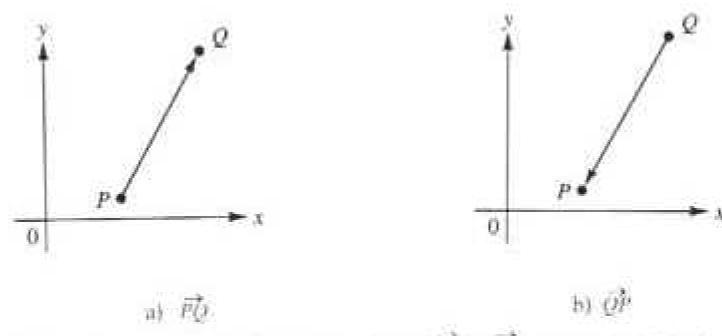


Figura 3.1 Los segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ apuntan en direcciones opuestas

Punto inicial
Punto terminal
Segmentos de recta dirigidos equivalentes

El punto P en el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ se llama **punto inicial** del segmento y el punto Q se llama **punto terminal**. Las dos propiedades más importantes de un segmento de recta dirigido son su magnitud (longitud) y su dirección. Si dos segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma magnitud y dirección, se dice que son **equivalentes** sin importar en dónde se localizan respecto al origen. Los segmentos de recta dirigidos en la figura 3.2 son todos equivalentes.

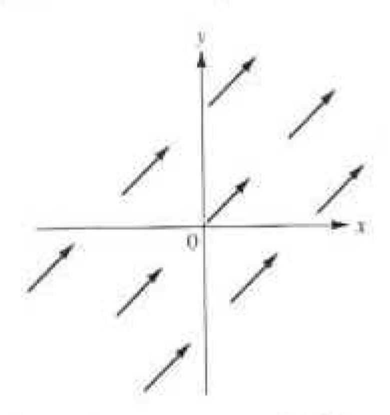


Figura 3.2 Un conjunto de segmentos de recta dirigidos equivalentes

DEFINICIÓN 1 **Definición geométrica de un vector** El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama **vector**. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se llama una **representación** del vector.

Observación. Los segmentos de recta dirigidos en la figura 3.2 son todos representaciones del mismo vector.

De la definición 1 se ve que un vector dado **v** se puede representar de muchas maneras diferentes. Sea $\overrightarrow{PQ}$ una representación de **v**. Entonces, sin cambiar magnitud ni dirección, se puede mover $\overrightarrow{PQ}$ en forma paralela de manera que su punto inicial se

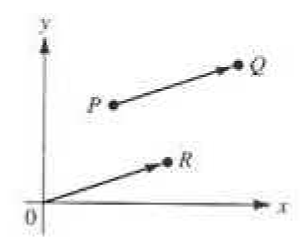


Figura 3.3 Se puede mover $\overrightarrow{PQ}$ para obtener un segmento de recta dirigido equivalente con su punto inicial en el origen. Observe que $\overrightarrow{0R}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son paralelos y tienen la misma longitud

traslada al origen. Después se obtiene el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{0R}$, que es otra representación del vector **v** (vea la figura 3.3). Ahora suponga que la R tiene las coordenadas cartesianas (a, b). Entonces se puede describir el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{0R}$ por las coordenadas (a, b). Esto es, $\overrightarrow{0R}$ es el segmento de recta dirigido con punto inicial $(0, 0)$ y punto terminal (a, b). Como una representación de un vector es tan buena como cualquier otra, se puede escribir el vector **v** como (a, b).

DEFINICIÓN 2 **Definición algebraica de un vector** Un **vector v** en el plano xy es un par ordenado de números reales (a, b). Los números a y b se llaman **elementos** o **componentes** del vector **v**. El **vector cero** es el vector $(0, 0)$.

Observación 1. Con esta definición, es puede pensar en un punto en el plano xy con coordenadas (a, b) como un vector que comienza del origen y termina en (a, b).

Observación 2. El vector cero tiene magnitud cero. Por lo tanto, como los puntos inicial y terminal coinciden, se dice que el vector cero *no tiene dirección*.

Observación 3. Se hace hincapié en que las definiciones 1 y 2 describen precisamente los mismos objetos. Cada punto de vista (geométrico o algebraico) tiene sus ventajas. La definición 2 es la definición de un 2-vector que se ha venido usando.

Magnitud o longitud de un vector

Como en realidad un vector es un conjunto de segmentos de recta equivalentes, se define la **magnitud** o **longitud** de un vector como la longitud de cualquiera de sus representaciones y su **dirección** como la dirección de cualquiera de sus representaciones. Usando la representación $\overrightarrow{0R}$ y escribiendo el vector $\mathbf{v} = (a, b)$, se encuentra que

$$|\mathbf{v}| = \text{magnitud de } \mathbf{v} = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (1)$$

Esto se deduce del teorema de Pitágoras (vea la figura 3.4). Se ha usado la notación $|\mathbf{v}|$ para denotar a la magnitud de **v**. Observe que $|\mathbf{v}|$ es un *escalar*.

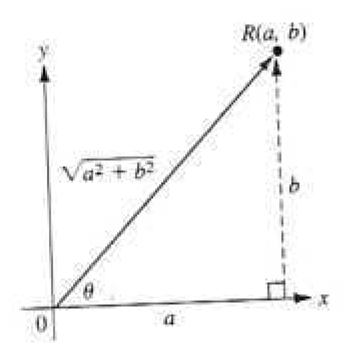


Figura 3.4 La magnitud de un vector con coordenada x igual a a y coordenada y igual a b es $\sqrt{a^2 + b^2}$

EJEMPLO 1 **Cálculo de la magnitud de seis vectores** Calcule las magnitudes de los vectores **i)** $\mathbf{v} = (2, 2)$; **ii)** $\mathbf{v} = (2, 2\sqrt{3})$; **iii)** $\mathbf{v} = (-2\sqrt{3}, 2)$; **iv)** $\mathbf{v} = (-3, -3)$; **v)** $\mathbf{v} = (6, -6)$; **vi)** $\mathbf{v} = (0, 3)$.

Solución

i. $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ii. $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

iii. $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$

iv. $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

v. $|\mathbf{v}| = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

vi. $|\mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$ ◆

Dirección de un vector Se define la **dirección** del vector $\mathbf{v} = (a, b)$ como el ángulo θ, medido en radianes, que forma el vector con el lado positivo del eje x. Por convención, se escoge θ tal que $0 \leq \theta < 2\pi$. De la figura 3.4 se deduce que si $a \neq 0$, entonces

$$\boxed{\tan\theta = \frac{b}{a}} \qquad (2)$$

Nota. $\tan\theta$ es periódica con periodo π, entonces si $a \neq 0$ siempre existen *dos* números en $[0, 2\pi)$ tales que $\tan\theta = b/a$. Por ejemplo, $\tan \pi/4 = \tan 5\pi/4 = 1$. Para determinar θ de manera única es necesario determinar el cuadrante de $\mathbf{v}$, como se verá en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 **Cálculo de las direcciones de seis vectores** Calcule las direcciones de los vectores en el ejemplo 1.

Solución Estos seis vectores están dibujados en la figura 3.5.

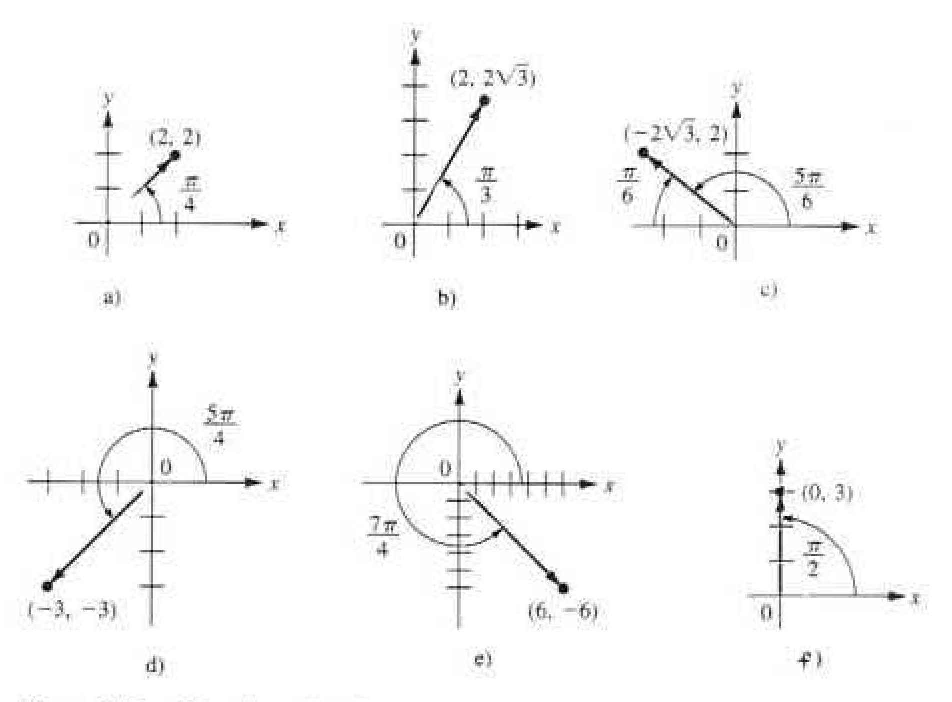


Figura 3.5 Direcciones de seis vectores

i. **v** se encuentra en el primer cuadrante y como $\tan\theta = 2/2 = 1$, $\theta = \pi/4$.

ii. $\theta = \tan^{-1} 2\sqrt{3}/2 = \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi/3$ (ya que **v** está en el primer cuadrante).

iii. **v** está en el segundo cuadrante y como $\tan^{-1} 2/2\sqrt{3} = \tan^{-1} 1/\sqrt{3} = \pi/6$, y de la figura 3.5*c* que $\theta = \pi - (\pi/6) = 5\pi/6$.

iv. **v** está en el tercer cuadrante, y como $\tan^{-1} 1 = \pi/4$, se encuentra que $\theta = \pi + (\pi/4) = 5\pi/4$.

v. Como **v** está en el cuarto cuadrante y $\tan^{-1}(-1) = -\pi/4$, se obtiene $\theta = 2\pi - (\pi/4) = 7\pi/4$.

vi. No se puede usar la ecuación (2) porque b/a no está definido. No obstante, en la figura 3.5*f* se ve que $\theta = \pi/2$. ◆

En general, si $b > 0$

$$\text{Dirección de } (0, b) = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \text{dirección de } (0, -b) = \frac{3\pi}{2} \qquad b > 0$$

En la sección 1.5 se definió la suma de vectores y la multiplicación por un escalar. ¿Qué significan geométricamente estos conceptos? Se comienza con la multiplicación

por un escalar. Si $\mathbf{v} = (a, b)$, entonces $\alpha\mathbf{v} = (\alpha a, \alpha b)$. Se encuentra que

$$|\alpha\mathbf{v}| = \sqrt{\alpha^2 a^2 + \alpha^2 b^2} = |\alpha|\sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha|\,|\mathbf{v}| \tag{3}$$

Es decir,

Magnitud de $\alpha\mathbf{v}$

Multiplicar un vector por un escalar diferente de cero tiene el efecto de multiplicar la longitud del vector por el valor absoluto de ese escalar.

Más aún, si $\alpha > 0$, entonces $\alpha\mathbf{v}$ está en el mismo cuadrante que $\mathbf{v}$, y por lo tanto la dirección de $\alpha\mathbf{v}$ es la *misma* que la dirección de $\mathbf{v}$ ya que $\tan^{-1}(\alpha b/\alpha a) = \tan^{-1}(b/a)$. Si $\alpha < 0$, entonces $\alpha\mathbf{v}$ tiene dirección opuesta a la de $\mathbf{v}$. En otras palabras,

Dirección de $\alpha\mathbf{v}$

Dirección de $\alpha\mathbf{v}$ = dirección de $\mathbf{v}$, si $\alpha > 0$
Dirección de $\alpha\mathbf{v}$ = (dirección de $\mathbf{v}$) + π si $\alpha < 0$ **(4)**

EJEMPLO 3 **Multiplicación de un vector por un escalar** Sea $\mathbf{v} = (1, 1)$. Entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ y $|2\mathbf{v}| = |(2, 2)| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2|\mathbf{v}|$. Todavía más, $|-2\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} = 2|\mathbf{v}|$. Así, la dirección de $2\mathbf{v}$ es $\pi/4$, mientras que la dirección de $-2\mathbf{v}$ es $5\pi/4$ (vea la figura 3.6).

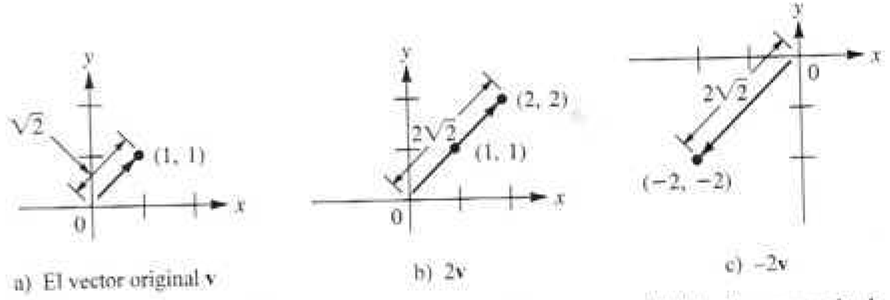


Figura 3.6 El vector $2\mathbf{v}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$ y el doble de su magnitud. El vector $-2\mathbf{v}$ tiene dirección opuesta a $\mathbf{v}$ y el doble de su magnitud ◆

Ahora suponga que se suman dos vectores $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$ como en la figura 3.7. De la figura se ve que el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ se puede obtener trasladando la representación del vector $\mathbf{v}$ de manera que su punto inicial coincida con el punto terminal (a_1, b_1) del vector $\mathbf{u}$. Por lo tanto, se puede obtener el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

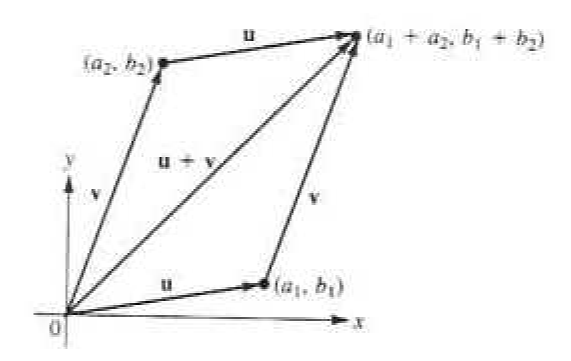


Figura 3.7 La regla del paralelogramo para sumar vectores

dibujando un paralelogramo con un vértice en el origen y lados **u** y **v**. Entonces **u** + **v** es el vector que va del origen a lo largo de la diagonal del paralelogramo.

Nota. Como un segmento de recta es la distancia más corta entre dos puntos, se deduce de inmediato, de la figura 3.7, que

Desigualdad del triángulo

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}|+|\mathbf{v}| \tag{5}$$

Por razones que son obvias en la figura 3.7, la desigualdad (5) se llama **desigualdad del triángulo**.

También se puede usar la figura 3.7 para obtener una representación geométrica del vector **u** − **v**. Como **u** = **u** − **v** + **v**, el vector **u** − **v** es el vector que se debe sumar a **v** para obtener **u**. Este hecho se ilustra en la figura 3.8*a*. Un hecho similar se ilustra en la figura 3.8*b*.

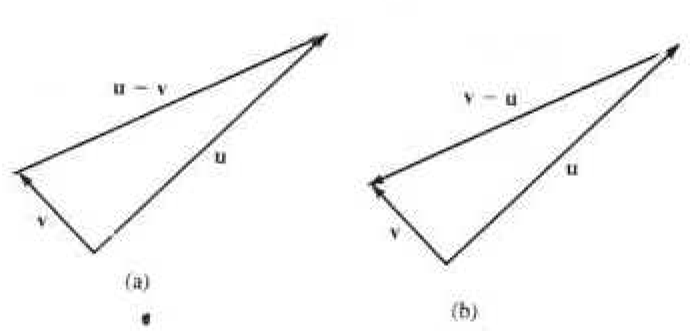


Figura 3.8 Los vectores **u** − **v** y **v** − **u** tienen la misma magnitud pero direcciones opuestas

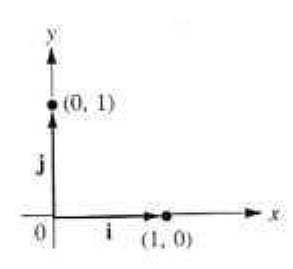


Figura 3.9 Los vectores **i** y **j**

Existen dos vectores especiales en $\mathbb{R}^2$ que nos permiten representar otros vectores en el plano de manera conveniente. Se denota el vector (1, 0) por el símbolo **i** y el vector (0, 1) por el símbolo **j**. (Vea la figura 3.9.) Si $\mathbf{v} = (a, b)$ es cualquier vector en el plano, entonces como $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$, se puede escribir

$$\boxed{\mathbf{v} = (a, b) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}} \tag{6}$$

Con esta representación se dice que **v** está *resuelto en sus componentes horizontal y vertical*. Los vectores **i** y **j** tienen dos propiedades:

i. Ninguno de ellos es múltiplo del otro. (En la terminología del capítulo 4, son *linealmente independientes*.)

ii. Cualquier vector **v** se puede escribir en términos de **i** y **j** como en la ecuación (6).†

Nota histórica. Hamilton usó por primera vez los símbolos **i** y **j**. Definió su cuaternión como una cantidad de la forma $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, donde a es la "parte escalar" y $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ es la "parte vectorial". En la sección 3.3 se escribirán los vectores en el espacio en la forma $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$.

Bajo estas dos condiciones se dice que **i** y **j** forman una **base** en $\mathbb{R}^2$. En el capítulo 4 se estudiarán las bases en espacios vectoriales arbitrarios.

Ahora se definirá un tipo de vector que es muy útil en ciertas aplicaciones.

DEFINICIÓN 3 Vector unitario Un **vector unitario** es un vector con longitud 1.

EJEMPLO 4 Un vector unitario El vector $\mathbf{u} = (1/2)\mathbf{i} + (\sqrt{3}/2)\mathbf{j}$ es un vector unitario ya que

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$ ◆

† En la ecuación (6) se dice que **v** se puede escribir como una *combinación lineal* de **i** y **j**. Se estudiará el concepto de combinación lineal en la sección 4.5.

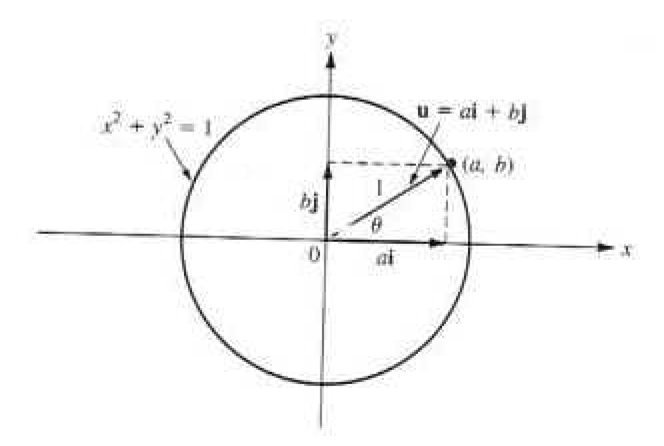


Figura 3.10 El punto terminal de un vector unitario que tiene su punto inicial en el origen está sobre el círculo unitario

Sea $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ un vector unitario. Entonces $|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, de manera que $a^2 + b^2 = 1$ y **u** se puede representar por un punto en el círculo unitario (vea la figura 3.10). Si θ es la dirección de **u**, entonces es claro que $a = \cos\theta$ y $b = \text{sen}\,\theta$. Así, cualquier vector unitario **u** se puede escribir en la forma

Representación de un vector unitario

$$\mathbf{u} = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} \tag{7}$$

donde θ es la dirección de **u**.

EJEMPLO 5 **Cómo escribir un vector unitario como (cos θ)i + (sen θ)j** El vector unitario $\mathbf{u} = (1/2)\mathbf{i} + (\sqrt{3}/2)\mathbf{j}$ del ejemplo 4 se puede escribir en la forma de (7) con $\theta = \cos^{-1}(1/2) = \pi/3$.

◆

También se tiene (vea el problema 17)

> Sea **v** un vector diferente de cero. Entonces $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es un vector unitario que tiene la misa dirección que **v**.

EJEMPLO 6 **Cómo encontrar un vector unitario con la misma dirección que un vector dado diferente de cero** Encuentre un vector unitario que tiene la misma dirección que $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

Solución Aquí $|\mathbf{v}| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$, por lo que $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}| = (2/\sqrt{13})\mathbf{i} - (3/\sqrt{13}\,\mathbf{j})$ es el vector que se busca.

◆

Se concluye esta sección con un resumen de las propiedades de los vectores.

Tabla 3.1

Objeto	Definición intuitiva	Expresión en términos de componentes si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$, y $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$
Vector $\mathbf{v}$	Un objeto que tiene magnitud y dirección	$v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ o (v_1, v_2)
$\|\mathbf{v}\|$	Magnitud (o longitud) de $\mathbf{v}$	$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$
$\alpha\mathbf{v}$	$\mathbf{v}$ $\alpha\mathbf{v}$ (en este dibujo $\alpha = 2$)	$\alpha v_1\mathbf{i} + \alpha v_2\mathbf{j}$ o $(\alpha v_1, \alpha v_2)$
$-\mathbf{v}$	$\mathbf{v}$ $-\mathbf{v}$	$-v_1\mathbf{i} - v_2\mathbf{j}$ o $(-v_1, -v_2)$ o $-(v_1, v_2)$
$\mathbf{u} + \mathbf{v}$	$\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$	$(u_1 + v_1)\mathbf{i} + (u_2 + v_2)\mathbf{j}$ o $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
$\mathbf{u} - \mathbf{v}$	$\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$	$(u_1 - v_1)\mathbf{i} + (u_2 - v_2)\mathbf{j}$ o $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

PROBLEMAS 3.1

Autoevaluación

I. Un *vector* es _____.

a. dos puntos en el plano xy
b. un segmento de recta entre dos puntos
c. un segmento de recta dirigido de un punto a otro
d. una colección de segmentos de recta dirigidos equivalentes

II. Si $P = (3, -4)$ y $Q = (8, 6)$, el vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene longitud _____.

a. $|3| + |-4|$ **b.** $(3)^2 + (-4)^2$
c. $(3-8)^2 + (-4-6)^2$ **d.** $\sqrt{(8-3)^2 + (6-(-4))^2}$

III. La dirección del vector (4, 8) es _____.

a. π **b.** $\tan^{-1}(8-4)$ **c.** $(\frac{8}{4})\pi$ **d.** $\tan^{-1}(\frac{8}{4})$

IV. Si $\mathbf{u} = (3, 4)$ y $\mathbf{v} = (5, 8)$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} =$ _____.

a. (7, 13) **b.** (8, 12) **c.** (2, 4) **d.** (15, 32)

V. Si $\mathbf{u} = (4, 3)$, entonces el vector unitario con la misma dirección es que $\mathbf{u}$ es _____.

a. (0.4, 0.3) **b.** (0.8, 0.6) **c.** $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ **d.** $(\frac{4}{3}, \frac{3}{4})$

Respuestas a la autoevaluación

I. d **II.** d **III.** d **IV.** b **V.** b = c

En los problemas 1 al 12 encuentre la magnitud y dirección del vector dado.

1. $\mathbf{v} = (4, 4)$ **2.** $\mathbf{v} = (-4, 4)$ **3.** $\mathbf{v} = (4, -4)$

4. $\mathbf{v} = (-4, -4)$ **5.** $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, 1)$ **6.** $\mathbf{v} = (1, \sqrt{3})$

7. $\mathbf{v} = (-1, \sqrt{3})$ **8.** $\mathbf{v} = (1, -\sqrt{3})$ **9.** $\mathbf{v} = (-1, -\sqrt{3})$

10. $\mathbf{v} = (1, 2)$ **11.** $\mathbf{v} = (-5, 8)$ **12.** $\mathbf{v} = (11, -14)$

13. Sea $\mathbf{u} = (2, 3)$ y $\mathbf{v} = (-5, 4)$. Encuentre: **a)** $3\mathbf{u}$; **b)** $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; **c)** $\mathbf{v} - \mathbf{u}$; **d)** $2\mathbf{u} - 7\mathbf{v}$. Bosqueje estos vectores.

14. Sea $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$. Encuentre: **a)** $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; **b)** $\mathbf{u} - \mathbf{v}$; **c)** $3\mathbf{u}$; **d)** $-7\mathbf{v}$; **e)** $8\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$; **f)** $4\mathbf{v} - 6\mathbf{u}$. Bosqueje estos vectores.

15. Muestre que los vectores **i** y **j** son vectores unitarios.

16. Demuestre que el vector $(1/\sqrt{2})\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$ es un vector unitario.

17. Demuestre que si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{u} = (a/\sqrt{a^2 + b^2})\mathbf{i} + (b/\sqrt{a^2 + b^2})\mathbf{j}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección que **v**.

En los problemas 18 al 21 encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.

18. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ **19.** $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

20. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ **21.** $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$; $a \neq 0$.

22. Si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, demuestre que $a/\sqrt{a^2 + b^2} = \cos\theta$ y $b/\sqrt{a^2 + b^2} = \operatorname{sen}\theta$, donde θ es la dirección de **v**.

23. Si $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, encuentre sen θ y cos θ.

24. Si $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$, encuentre sen θ y cos θ.

Un vector **v** tiene dirección opuesta a la del vector **u** si dirección de **v** = dirección de **u** + π. En los problemas 25 al 28 encuentre un vector unitario **v** que tenga dirección opuesta a la dirección del vector dado **u**.

25. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ **26.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

27. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ **28.** $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

29. Sea $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que: **a)** $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; **b)** $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$; **c)** $3\mathbf{u} + 8\mathbf{v}$.

30. Sea $P = (c, d)$ y $Q = (c + a, d + b)$. Muestre que la magnitud de $\overrightarrow{PQ}$ es $\sqrt{a^2 + b^2}$.

31. Demuestre que la dirección de $\overrightarrow{PQ}$ en el problema 30 es la misma que la dirección del vector (a, b). [*Sugerencia:* si $R = (a, b)$, demuestre que la recta que pasa por los puntos P y Q es paralela a la recta que pasa por los puntos 0 y R.]

En los problemas 32 al 35 encuentre un vector **v** que tenga la magnitud y dirección dadas.

32. $|\mathbf{v}| = 3$; $\theta = \pi/6$ **33.** $|\mathbf{v}| = 8$; $\theta = \pi/3$

34. $|\mathbf{v}| = 1$; $\theta = \pi/4$ **35.** $|\mathbf{v}| = 6$; $\theta = 2\pi/3$.

***36.** Demuestre de manera algebraica (es decir, estrictamente de las definiciones de suma y magnitud de vectores) que para cualesquiera dos vectores **u** y **v**, $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

37. Demuestre que si **u** y **v** son diferentes del vector cero, entonces $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ si y sólo si **u** es un múltiplo escalar positivo de **v**.

MANEJO DE CALCULADORA

Muchas operaciones con vectores se pueden realizar en la TI-85.

TI-85

Se introducen los vectores usando paréntesis cuadrados. Así, [1, 2] es el vector (1, 2). Se oprime 2nd VECTR que ponen la calculadora en el modo de vectores. Una vez que se introduce un vector se puede guadar en memoria de la misma forma que se guarda una matriz. Para calcular la magnitud de un vector, primero se cambia la calculadora a modo de vectores, después se oprime F3 para entrar al modo de (MATH). Luego F3 (norm) ALPHA A dará la magnitud de A. También se puede encontrar la magnitud y la dirección de un vector al mismo tiempo. Oprima 2nd VECTR F4 (etiquetado (OPS)). Después dé el vector en $\mathbb{R}^2$ seguido de F3 ENTER . La tecla F3 etiquetada ahora (►Pol), donde "Pol" denota la forma polar. Por ejemplo, [1, 1] F3 ENTER da como resultado [1.41421356237 ∠ .785398163397] si la calculadora está en modo de radianes, y [1.41421356237 ∠ 45] si la calculadora está en modo de grados.

Nota 1. Cuando se usa la función "Pol", la dirección está dada como un número en el intervalo $[-\pi, \pi]$ ([−180, 180]).

Nota 2. Por supuesto, cualquier calculadora que pueda calcular cuadrados, raíz cuadrada y la inversa de la tangente puede calcular la magnitud y dirección de un vector. El procedimiento dado aquí sólo simplifica estos cálculos.

Es fácil realizar la suma y multiplicación de vectores. Suponga que se introducen dos vectores **A** y **B**. Después, por ejemplo, 2 ALPHA A − 3 ALPHA B ENTER desplegará el vector 2**A** − 3**B**.

En los problemas 38 al 49 utilice la calculadora para encontrar la magnitud y dirección (en radianes y grados) de cada vector en $\mathbb{R}^2$.

38. (1.735, 2.437)
39. (1.735, −2.437)
40. (−1.735, 2.437)
41. (−1.735, −2.437)
42. (−58, 99)
43. (−58, −99)
44. (58, 99)
45. (58, −99)
46. (0.01468, −0.08517)
47. (0.01468, 0.08517)
48. (−0.01468, −0.08517)
49. (−0.01468, 0.08517)

MATLAB 3.1

Información de MATLAB. Introduzca un vector como una matriz de 2 × 1 o de 3 × 1. La suma y multiplicación por un escalar es la misma que para las matrices.

Producto escalar de **u** y **v**: **u'*v**
Magnitud (longitud) de **v**: **sqrt(v'*v)** o **norm(v)**
Dirección de *v*: vea el ejemplo 2 y use el hecho de que $\tan^{-1}(c)$ se encuentra con **atan(*c*)**.
Gráficas: varios problemas usan gráficas. Se proporcionan instrucciones específicas en cada problema. Información general útil para sistemas DOS: para regresar a la pantalla de comandos después de ver una gráfica se oprime cualquier tecla. Para ver la pantalla de gráficas si está en la de comandos se da el comando **shg**.

1. a. Utilice MATLAB para verificar los resultados obtenidos con lápiz y papel para la magnitud y dirección de los vectores de los problemas impares 1 al 12 de esta sección.

Nota. $\sqrt{3}$ se encuentra con **sqrt(3)**.

b. Utilice MATLAB para encontrar la magnitud y dirección de los vectores en los problemas pares 38 al 49 en esta sección.

2. Las combinaciones lineales de vectores serán importantes en el trabajo futuro. Este problema describe una manera de visualizar las combinaciones lineales de vectores en el plano. (Vea también el problema 3 siguiente.)

a. Se quieren graficar varias combinaciones lineales de dos vectores dados en el mismo conjunto de ejes. Cada vector será representado por un recta de (0, 0) al punto terminal del vector. Sean **u** y **v** dos matrices (vectores) de 2 × 1 dadas. Se quieren graficar varios vectores **z**, donde $\mathbf{z} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ para $-1 \leq a,b \leq 1$ para ayudar a la comprensión de la geometría de una combinación lineal. Lea la nota sobre *gráficas* dada antes de estos problemas de MATLAB.

Introduzca **u** y **v** elegidos por usted tales que no sean paralelos. Dé lo siguiente:

```
w = u + v; ww = u – v; aa = [u' v' w' ww']; M = max(abs(aa));
axis('square'); axis([–M M –M M])
plot([0 v(1)],[0 v(2)],[0 u(1)],[0 u(2)])
hold on
grid
```

Con esto verá **u** y **v** graficados.

```
a = 1; b = 1;
z = a*u + b*v;
plot([0 z(1)],[0 z(2)],'c5')
```

Si está usando MATLAB 4.0, dé la instrucción de **axis** *después* de cada instrucción de graficado.

Repita cinco veces los tres renglones de comandos anteriores, pero modifique la elección de a y b con $0 \leq a,b \leq 1$. (Recuerde que puede usar las flechas hacia arriba.) Observe la geometría de cada combinación lineal conforme obtenga cada gráfica.

¿Cómo se verá la pantalla de gráficas si se grafican muchos otros casos de a y b?

Repita seis veces los últimos tres renglones de comandos con los siguientes cambios: cambie '**c5**' a '**c6**' y elija al menos otras seis a y b para $0 \leq a \leq 1$ y $-1 \leq b \leq 0$. Sea $a = 1$ y $b = -1$ la primera elección. Observe la geometría y conteste la pregunta anterior.

Repita los últimos tres renglones de comandos seis veces con los siguientes cambios: cambie '**c5**' a '**c7**' y elija por lo menos otras seis a y b para $-1 \leq a \leq 0$ y $0 \leq b \leq 1$. Sean $a = -1$ y $b = 1$ los primeros valores. Observe la geometría y conteste la pregunta anterior.

Repita seis veces más los últimos tres renglones de comandos con los siguientes cambios: cambie '**c5**' a '**c8**' y elija por lo menos otros seis valores de a y b para $-1 \leq a,b \leq 1$. Sean $a = -1$ y $b = -1$ los primeros valores. Observe la geometría y responda a la pregunta, igual que antes.

¿Cómo se vería la pantalla de gráficas si se graficaran cada vez más combinaciones lineales?

Al terminar este problema dé el comando **hold off**.

b. Siguiendo las instrucciones anteriores, explore lo que ocurre si comienza con **u** y **v** paralelas.

Al terminar este problema, dé el comando **hold off**.

[M] **3.** (*Este problema usa el archivo lincomb.m*) Dados dos vectores no paralelos en el plano, se puede escribir otro vector en el plano como una combinación lineal de estos dos vectores. El archivo *lincomb.m* contenido en el disco disponible es una ayuda para la visualización. Dé el comando **help lincomb** para tener una descripción de este archivo con extensión *m*.

Sean **u** y **v** dos vectores de 2×1 que no son paralelos. Sea **w = 5*(2*rand(2,1)–1)**. Dé **lincomb(u,v,w)**. Primero verá graficados **u**, **v** y **w**. Oprima cualquier tecla y aparecerá la geometría de **w** escrita como una combinación lineal de **u** y **v**. Repita para diferentes vectores **w**, **u** y **v**.

3.2. EL PRODUCTO ESCALAR Y LAS PROYECCIONES EN $\mathbb{R}^2$

En la sección 1.6 se definió el producto escalar de dos vectores. Si $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$, entonces

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1a_2 + b_1b_2} \qquad (1)$$

Ahora se [illegible] del producto escalar.

DEFINICIÓN 1 **Ángulo entre vectores** Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero. Entonces el **ángulo** φ **entre u y v** está definido como el ángulo no negativo más pequeño† entre las representaciones de **u** y **v** que tienen el origen como punto inicial. Si $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ para algún escalar α, entonces $\varphi = 0$ si $\alpha > 0$ y $\varphi = \pi$ si $\alpha < 0$.

Esta definición se ilustra en la figura 3.11. Observe que φ siempre se puede elegir para que sea un ángulo no negativo en el intervalo $[0, \pi]$.

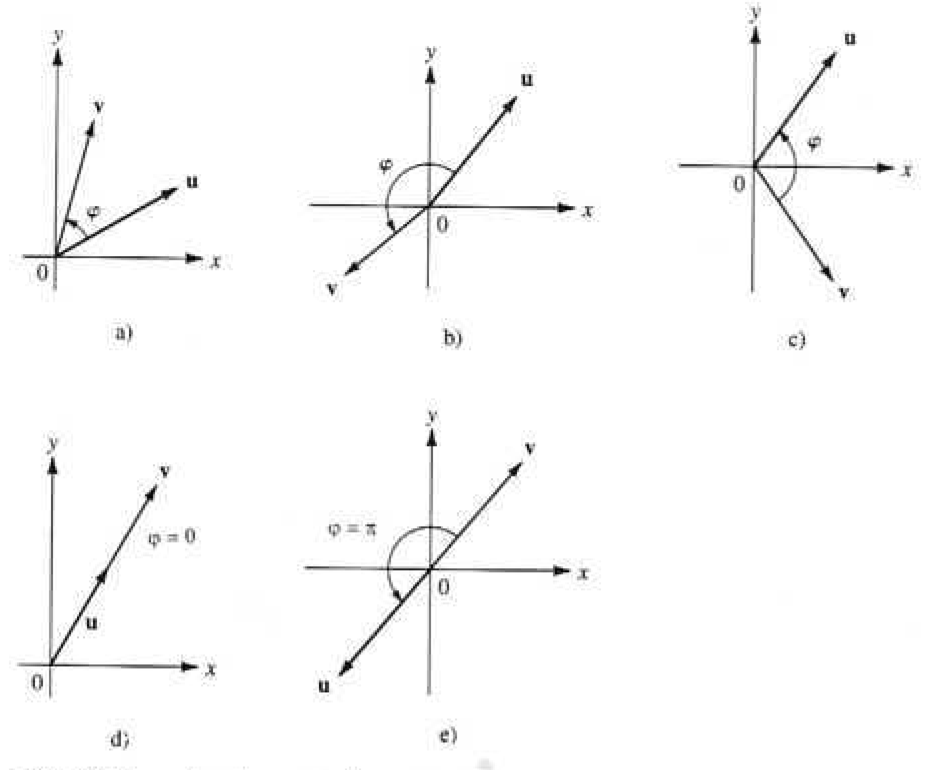


Figura 3.11 Ángulo φ entre dos vectores

TEOREMA 1 Sea **v** un vector. Entonces

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \qquad (2)$$

† Este ángulo estará en el intervalo $[0, \pi]$.

Demostración Sea $\mathbf{v} = (a, b)$. Entonces

$$|\mathbf{v}|^2 = a^2 + b^2$$

y

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (a, b) \cdot (a, b) = a \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2 = |\mathbf{v}|^2$$ ◆

TEOREMA 2 Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero. Si φ es el ángulo entre ellos, entonces

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}} \quad (3)$$

Demostración La ley de los cosenos (vea el problema 2.5.10, página 223) establece que en el triángulo de la figura 3.12

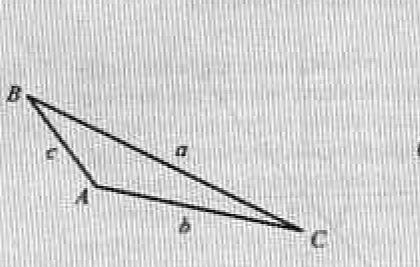


Figura 3.12 Triángulo con lados a, b y c

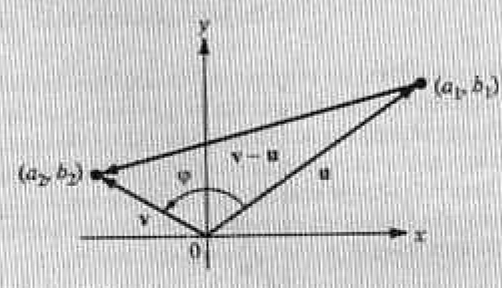


Figura 3.13 Triángulo con lados $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ y $|\mathbf{v} - \mathbf{u}|$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Ahora se colocan las representaciones de **u** y **v** con los puntos iniciales en el origen de manera que $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$ (vea la figura 3.13). Entonces de la ley de los cosenos, $|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2 - 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos \varphi$. Pero

$$|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 \overset{\text{de (2)}}{=} (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \overset{\text{teorema 1 iii), pág. 63}}{=} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$$
$$= |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + |\mathbf{u}|^2$$

Así, después de restar $|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2$ en ambos lados de la igualdad, se obtiene $-2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos \varphi$, y el teorema queda demostrado. ◆

Observación. Usando el teorema 1 se puede definir el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ como

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos \varphi}$$

EJEMPLO 1 **Cálculo del ángulo entre dos vectores** Encuentre el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Solución $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -14 + 3 = -11$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50}$. Así

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = \frac{-11}{\sqrt{13}\,\sqrt{50}} = \frac{-11}{\sqrt{650}} \approx -0.431455497\,\dagger$$

de manera que

$$\varphi = \cos^{-1}(-0.431455497) \approx 2.0169\ddagger \quad (\approx 115.6°)$$ ◆

Nota. Como $0 \le \varphi \le \pi$, $\cos^{-1}(\cos \varphi) = \varphi$

DEFINICIÓN 2 **Vectores paralelos** Dos vectores diferentes de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son **paralelos** si el ángulo entre ellos es cero o π. Observe que los vectores paralelos tienen la misma dirección o direcciones opuestas.

EJEMPLO 2 **Dos vectores paralelos** Demuestre que los vectores $\mathbf{u} = (2, -3)$ y $\mathbf{v} = (-4, 6)$ son paralelos.

Solución

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = \frac{-8 - 18}{\sqrt{13}\,\sqrt{52}} = \frac{-26}{\sqrt{13}\,(2\sqrt{13})} = \frac{-26}{2(13)} = -1$$

Por lo tanto, $\varphi = \pi$ (de manera que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen direcciones opuestas). ◆

TEOREMA 3 Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para alguna constante α si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos.

Demostración La prueba se deja como ejercicio (vea el problema 35). ◆

DEFINICIÓN 3 **Vectores ortogonales** Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ diferentes de cero son **ortogonales** (o **perpendiculares**) si el ángulo entre ellos es $\pi/2$.

---

† Estos números, al igual que otros en el libro, se obtuvieron con una calculadora.

‡ Al hacer este cálculo, asegúrese de que su calculadora esté en modo de radianes.

EJEMPLO 3 **Dos vectores ortogonales** Demuestre que los vectores $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ son ortogonales.

Solución $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 0$. Esto implica que $\cos \varphi = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})/(|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|) = 0$ y como φ está en el intervalo $[0, \pi]$, $\varphi = \pi/2$. ◆

TEOREMA 4 Los vectores **u** y **v** diferentes de cero son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Demostración Esta prueba también se deja como ejercicio (vea el problema 36). ◆

Muchos problemas interesantes se refieren a la noción de la proyección de un vector sobre otro. Antes de definir esto, se demuestra el siguiente teorema.

TEOREMA 5 Sea **v** un vector diferente de cero. Entonces para cualquier otro vector **u**, el vector

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$$

es ortogonal a **v**.

Demostración

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \left[\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right] \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2}$$

$$= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$ ◆

Los vectores **u**, **v** y **w** se ilustran en la figura 3.14.

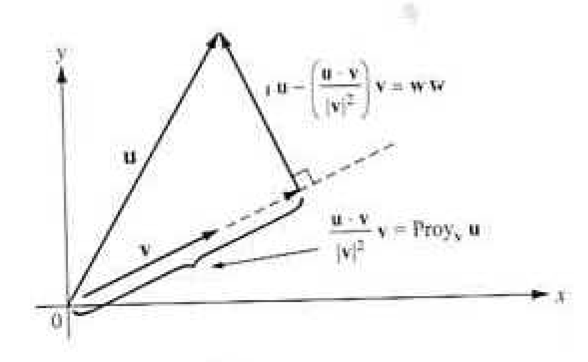


Figura 3.14 El vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$ es ortogonal a **v**

DEFINICIÓN 4 **Proyección** Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero. Entonces la **proyección** de **u** sobre **v** es un vector denotado por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$, que se define por

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \tag{4}$$

La **componente** de **u** en la dirección de **v** es $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, y es un escalar. **(5)**

Observe que $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es un vector unitario en la dirección de **v**.

Observación 1. De las figuras 3.14 y 3.15 y del hecho de que $\cos\varphi = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})/(|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|)$, se encuentra que

> **v** y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tienen *i*) la misma dirección si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$ y *ii*) direcciones opuestas si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$.

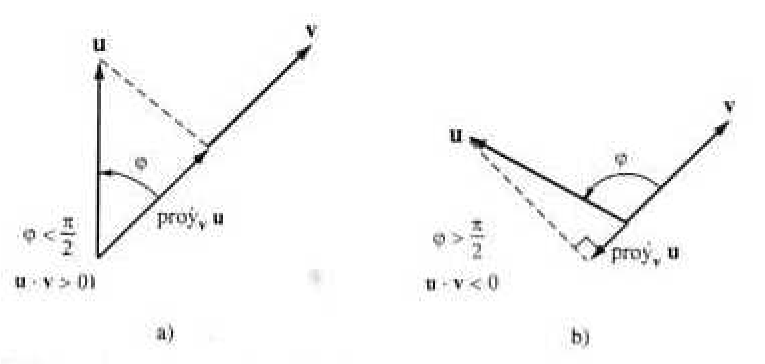


Figura 3.15 *a*) **v** y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tienen la misma dirección si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$. *b*) **v** y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tienen direcciones opuestas si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$.

Observación 2. Se puede pensar en la $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ como la "**v**-componente" del vector **u**.

Observación 3. Si **u** y **v** son ortogonales, entonces $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ de manera que $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = 0$.

Observación 4. Una definición alternativa de la proyección es: si **u** y **v** son vectores diferentes de cero, entonces $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es el único vector con las siguientes propiedades:

> **i.** $\text{Proy}_\mathbf{v}\,\mathbf{u}$ es paralelo a $\mathbf{v}$.
> **ii.** $\mathbf{u} - \text{proy}_\mathbf{v}\,\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$.

EJEMPLO 4 **Cálculo de una proyección** Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Calcule $\text{proy}_\mathbf{v}\,\mathbf{u}$.

Solución $\text{Proy}_\mathbf{v}\,\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}/|\mathbf{v}|^2 = [5/(\sqrt{2})^2]\mathbf{v} = (5/2)\mathbf{i} + (5/2)\mathbf{j}$ (vea la figura 3.16).

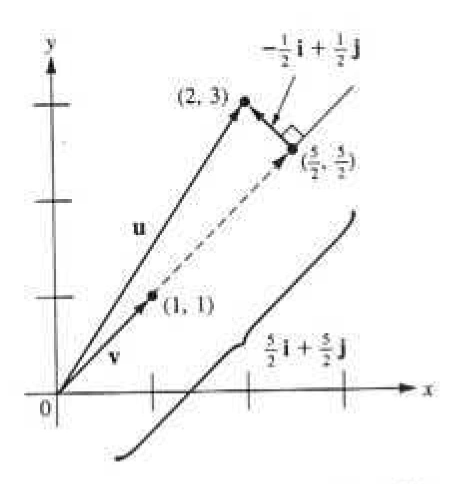


Figura 3.16 La proyección de (2, 3) sobre (1, 1) es $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

EJEMPLO 5 **Cálculo de una proyección** Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Encuentre $\text{proy}_\mathbf{v}\,\mathbf{u}$.

Solución En este caso $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})/|\mathbf{v}|^2 = -\frac{1}{2}$; así, $\text{proy}_\mathbf{v}\,\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$ (vea la figura 3.17).

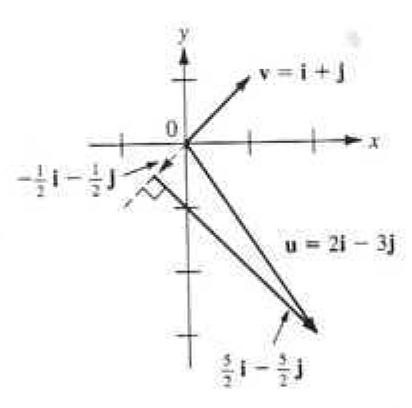


Figura 3.17 La proyección de $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ sobre $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ es $-\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$

PROBLEMAS 3.2

Autoevaluación

I. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} =$ _____.

a. 1 **b.** $\sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2}$

c. 0 **d.** $\mathbf{i} + \mathbf{j}$

II. $(3, 4) \cdot (3, 2) =$ _____.

a. $(3+3)(4+2) = 36$

b. $(3)(3) + (4)(2) = 17$

c. $(3-3)(2-4) = 0$

d. $(3)(3) - (4)(2) = 1$

III. El coseno del ángulo entre $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ es _____.

a. $0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$ **b.** 0

c. $\sqrt{2}$ **d.** $1/\sqrt{2+0}$

IV. Los vectores $2\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ y $3\mathbf{i} + (\frac{1}{2})\mathbf{j}$ son _____.

a. ni paralelos ni ortogonales

b. paralelos

c. ortogonales

d. idénticos

V. $\text{Proy}_{\mathbf{w}}\, \mathbf{u} =$ _____.

a. $\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ **b.** $\dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$

c. $\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} \dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ **d.** $\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{u}|} \dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$

En los problemas 1 al 8 calcule el producto escalar de los dos vectores y el coseno del ángulo entre ellos.

1. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ **2.** $\mathbf{u} = 3\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = -7\mathbf{j}$

3. $\mathbf{u} = -5\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = 18\mathbf{j}$ **4.** $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = \beta\mathbf{j}$; α, β reales

5. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **6.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

7. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ **8.** $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

9. Demuestre que para cualesquiera números reales α y β, los vectores $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \beta\mathbf{i} - \alpha\mathbf{j}$ son ortogonales.

10. Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tres vectores arbitrarios. Explique por qué el producto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ *no está definido*.

En los problemas 11 al 16 determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Después bosqueje cada par.

11. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -6\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$ **12.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

13. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ **14.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

Respuestas a la autoevaluación

I. c **II.** b **III.** b **IV.** c **V.** c

15. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = -23\mathbf{j}$

16. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

17. Sean $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}$. Determine α tal que:

a. $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

b. $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos.

c. El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\pi/4$.

d. El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\pi/3$.

18. Sean $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$. Determine α tal que:

a. $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales

b. $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos

c. El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $2\pi/3$.

d. El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\pi/3$.

19. En el problema 17 demuestre que no existe un valor de α para el que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen direcciones opuestas.

20. En el problema 18 demuestre que no existe valor de α para el que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen la misma dirección.

En los problemas 21 al 30 calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

21. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

22. $\mathbf{u} = -5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

23. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

24. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$

25. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

26. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

27. $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; α y β reales positivos

28. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$; α y β reales positivos

29. $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} - \beta\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; α y β reales positivos con $\alpha > \beta$

30. $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} - \beta\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; α y β reales positivos con $\alpha < \beta$.

*31.** Sean $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. Establezca una condición sobre a_1, b_1, a_2 y b_2 que asegure que $\mathbf{v}$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tengan la misma dirección.

*32.** En el problema 31 establezca una condición que asegure que $\mathbf{v}$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tengan direcciones opuestas.

33. Sean $P = (2, 3)$, $Q = (5, 7)$, $R = (2, -3)$ y $S = (1, 2)$. Calcule $\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\,\overrightarrow{RS}$ y $\text{proy}_{\overrightarrow{RS}}\,\overrightarrow{PQ}$.

34. Sean $P = (-1, 3)$, $Q = (2, 4)$, $R = (-6, -2)$ y $S = (3, 0)$. Calcule $\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\,\overrightarrow{RS}$ y $\text{proy}_{\overrightarrow{RS}}\,\overrightarrow{PQ}$.

35. Pruebe que los vectores diferentes de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para alguna constante α. [*Sugerencia:* Demuestre que $\cos\varphi = \pm 1$ si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$.]

36. Pruebe que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

37. Demuestre que el vector $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es ortogonal a la recta $ax + by + c = 0$.

38. Demuestre que el vector $\mathbf{u} = b\mathbf{i} - a\mathbf{j}$ es paralelo a la recta $ax + by + c = 0$.

39. Un triángulo tiene vértices $(1, 3)$, $(4, -2)$ y $(-3, 6)$. Encuentre el coseno de cada ángulo.

40. Un triángulo tiene vértices (a_1, b_1), (a_2, b_2) y (a_3, b_3). Encuentre la fórmula para el coseno de cada ángulo.

*41.** La **desigualdad de Cauchy-Schwarz** establece que para cualesquiera números reales a_1, a_2, b_1 y b_2,

$$\left|\sum_{i=1}^{2} a_i b_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{2} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{2} b_i^2\right)^{1/2}$$

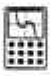
Utilice el producto escalar para probar esta fórmula. ¿Bajo qué circunstancias se puede sustituir la desigualdad por una igualdad?

*42. Pruebe que la distancia más corta entre un punto y una recta se mide por una línea que pasa por el punto y es perpendicular a la recta.

43. Encuentre la distancia entre $P = (2, 3)$ y la recta que pasa por los puntos $Q = (-1, 7)$ y $R = (3, 5)$.

44. Encuentre la distancia entre (3, 7) y la recta que va a lo largo del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ que pasa por el origen.

45. Sea A una matriz de 2×2 tal que cada columna es un vector unitario y que las dos columnas son ortogonales. Demuestre que A es invertible y que $A^{-1} = A^t$. (A se conoce como matriz **ortogonal**.)



MANEJO DE CALCULADORA

Es sencillo encontrar el producto punto en ambas calculadoras TI-85 y CASIO fx-7700 GB.

TI-85

Presione [2nd] [VECTR] [F3] (MATH) [F4] (dot). Aparecerá "dot(". Por ejemplo, dot (seguido de [3, −1], [4, 5]) [ENTER] da como resultado un 7. De igual manera, al oprimir [2nd] [VECTR] [F3] (MATH) [F2] (unit V) se obtiene V unitario. Si después se introduce un vector y se oprime ENTER, aparecerá un vector unitario con la misma dirección que el vector que se dio.

También es fácil calcular una proyección. Si se introducen U y V, entonces (dot (U, V)/dot (V, V) * V dará proy_V U.

CASIO fx-7700 GB

El producto punto se puede calcular mediante la multiplicación de matrices. Por ejemplo, si U es una matriz de 1×2 (vector renglón) y V es una matriz de 2×1 (vector columna), entonces UV es igual a U · V. La Casio no maneja el producto punto directamente.

En los problemas 46 al 50 utilice una calculadora para encontrar un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.

46. (0.231, 0.816)
47. (−91, 48)
48. (1295, −7238)
49. (−5.2361, −18.6163)
50. (−20192, 58116)

En los problemas 51 al 54 utilice una calculadora para encontrar la proyección de **u** sobre **v** y bosqueje **u**, **v** y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

51. $\mathbf{u} = (3.28, -5.19, \mathbf{v} = (-6.17, -11.526)$
52. $\mathbf{u} = (0.01629, -0.03556), \mathbf{v} = (0.08171, 0.00119)$
53. $\mathbf{u} = (-5723, 4296), \mathbf{v} = 17171, -9816)$
54. $\mathbf{u} = (37155, 42136), \mathbf{v} = (25516, 72385)$

MATLAB 3.2

1. Para los pares de vectores en los problemas 21al 26, verifique los vectores proyección calculados con lápiz y papel usando MATLAB. (Consulte la información de manejo de MATLAB anterior a los problemas de MATLAB 3.1.)

M 2. (*Este problema usa el archivo prjtn.m*) El problema se refiere a la visualización de las proyecciones. Utiliza el archivo *prjtn.m* que se encuentra en el disco disponible. Para obtener información sobre este archivo con extensión *m* dé el comando **help prjtn**.

Para los pares de vectores **u** y **v** dados enseguida:

a. Introduzca **u** y **v** como matrices de 2 × 1 y calcule **p** = proyección de **u** sobre **v**.

b. Dé el comando **prjtn(u,v)**. (Este archivo despliega **u** y **v** en la pantalla de gráficas. Oprima cualquier tecla y bajará una perpendicular del punto terminal de **u** hasta la recta determinada por **v**. Oprima cualquier tecla y se indicará el vector proyección.)

c. Mientras observa las gráficas en la pantalla, verifique que el vector **p** graficado sea el vector calculado en *a*). Localice el vector (paralelo a) **u** – **p**. ¿Cuál es la relación geométrica entre **u** – **p** y **v**?

i. **u** = [2;1] v = [3:0] ii. **u** = [2;3] v = [–3;0]
iii. **u** = [2;1] v = [–1;2] iv. **u** = [2;3] v = [–1;–2]
v. Elija sus propios vectores **u** y **v** (al menos tres pares).

3.3 VECTORES EN EL ESPACIO

Se ha visto que cualquier punto en el plano se puede representar como un par ordenado de números reales. De manera análoga, cualquier punto en el espacio se puede representar por una **terna ordenada** de números reales

$$(a, b, c) \tag{1}$$

$\mathbb{R}^3$
Origen
eje *x*
eje *y*
eje *z*

Los vectores de la forma (1) constituyen el espacio $\mathbb{R}^3$. Para representar un punto en el espacio, se comienza por elegir un punto en $\mathbb{R}^3$. Se llama a este punto el **origen**, denotado por 0. Después se dibujan tres rectas perpendiculares entre sí, a las que se llama el **eje** *x*, el **eje** *y* y el **eje** *z*. Estos ejes se pueden seleccionar de muchas maneras, pero la más común tiene los ejes *x* y *y* horizontales y el eje *z* vertical. Sobre cada eje se elige una dirección positiva y la distancia a lo largo de cada eje se mide como el número de unidades en esta dirección positiva a partir del origen.

Los dos sistemas básicos para dibujar estos ejes se describen en la figura 3.18. Si los ejes se colocan como en la figura 3.18*a*, entonces el sistema se llama **sistema derecho**; si se colocan como en la figura 3.18*b*, es un **sistema izquierdo**. En las figuras las flechas indican la dirección positiva de los ejes. La razón para la elección de estos términos es la siguiente: en un sistema derecho, si coloca su mano derecha de manera que el dedo índice señale en la dirección positiva del eje *x* mientras que el medio apunta en la dirección positiva del eje *y*, entonces su pulgar apuntará en la dirección positiva del eje *z*. Este concepto se ilustra en la figura 3.19. La misma regla funciona para el sistema izquierdo con los dedos de la mano izquierda. En el resto de este libro se seguirá la práctica común de describir los ejes de coordenadas usando un sistema derecho.

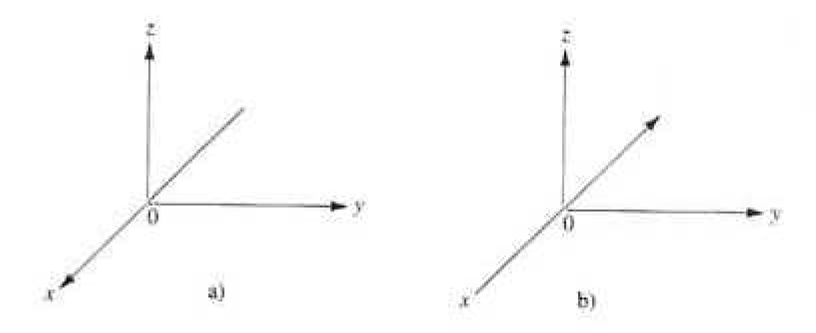


Figura 3.18 a) Un sistema derecho. b) Un sistema izquierdo

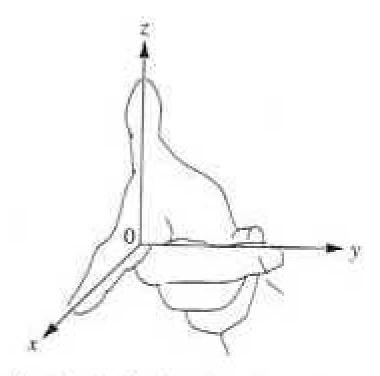


Figura 3.19 La mano derecha indica las direcciones de un sistema derecho

Planos coordenados

Los tres ejes en nuestro sistema determinan tres **planos coordenados**, que se llaman plano xy, plano xz y plano yz. El plano xy contiene los ejes x y y y es simplemente el plano con el que se ha venido trabajando hasta ahora en la mayor parte del libro. Se puede pensar en los planos xz y yz en una forma similar.

Teniendo nuestra estructura construida de ejes coordenados y planos, podemos describir cualquier punto P en $\mathbb{R}^3$ de una sola manera:

$$\boxed{P = (x, y, z)} \qquad (2)$$

en donde la primera coordenada x es la distancia dirigida del plano yz a P (medida en la dirección positiva del eje x a lo largo de una recta paralela al eje x), la segunda coordenada y es la distancia dirigida desde el plano xz hasta P (medida en la dirección positiva del eje y y a lo largo de una recta paralela al eje y) y la tercera coordenada z es la distancia dirigida desde el plano xy hasta P (medida en la dirección positiva del eje z y a lo largo de una recta paralela al eje z).

En este sistema los tres planos coordenados dividen al espacio $\mathbb{R}^3$ en ocho **octantes**, de la misma manera que en $\mathbb{R}^2$ los ejes coordenados dividen al plano en cuatro cuadrantes. El octante en el que los tres ejes coordenados son positivos siempre se elige como el primero.

Sistema de coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3$

El sistema coordenado que acaba de establecerse con frecuencia se conoce como **sistema de coordenadas rectangulares** o **sistema de coordenadas cartesianas**. Una vez que la noción de describir un punto en este sistema sea familiar, pueden extenderse muchas de las ideas a partir del plano.

TEOREMA 1 Sean $P = (x_1, y_1 z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ dos puntos en el espacio. Entonces la distancia $\overline{PQ}$ entre P y Q está dada por

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \tag{3}$$

Se pide al lector que pruebe este resultado en el problema 39. ✦

EJEMPLO 1 **Cálculo de la distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^3$** Calcule la distancia entre los puntos $(3, -1, 6)$ y $(-2, 3, 5)$.

Solución

$$\overline{PQ} = \sqrt{[3-(-2)]^2 + (-1-3)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{42}$$ ✦

En las secciones 3.1 y 3.2 se desarrollaron las propiedades geométricas de los vectores en el plano. Dada la similitud entre los sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, no es una sorpresa que los vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ tengan estructuras muy similares. Ahora se desarrollará el concepto de un vector en el espacio. El desarrollo seguirá de cerca los desarrollos de las últimas dos secciones, y por lo tanto, se omitirán algunos detalles.

Segmento de recta dirigido
Vector en $\mathbb{R}^3$

Sean P y Q dos puntos distintos en $\mathbb{R}^3$. Entonces el **segmento de recta dirigido** $\overrightarrow{PQ}$ es el segmento de recta que se extiende de P a Q. Dos segmentos de recta dirigidos son **equivalentes** si tienen la misma magnitud y dirección. Un **vector** en $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado, y cualquier segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ en ese conjunto se llama una **representación** del vector.

Hasta aquí las definiciones son idénticas. Por conveniencia, se elige P en el origen para poder describir el vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{0Q}$ mediante las coordenadas (x, y, z) del punto Q. Entonces la **magnitud** de $\mathbf{v} = |\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (del teorema 1).

EJEMPLO 2 **Cálculo de la magnitud de un vector en $\mathbb{R}^3$** Sea $\mathbf{v} = (1, 3, -2)$. Encuentre $|\mathbf{v}|$.

Solución

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}.$$ ✦

Sea $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ dos vectores y sea α un número real (escalar). Entonces se define

y

> **Suma de vectores y multiplicación por un escalar en $\mathbb{R}^3$**
>
> $$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
>
> $$\alpha\mathbf{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

Esta es la misma definición de suma de vectores y multiplicación por un escalar que se tenía; se ilustra en la figura 3.20.

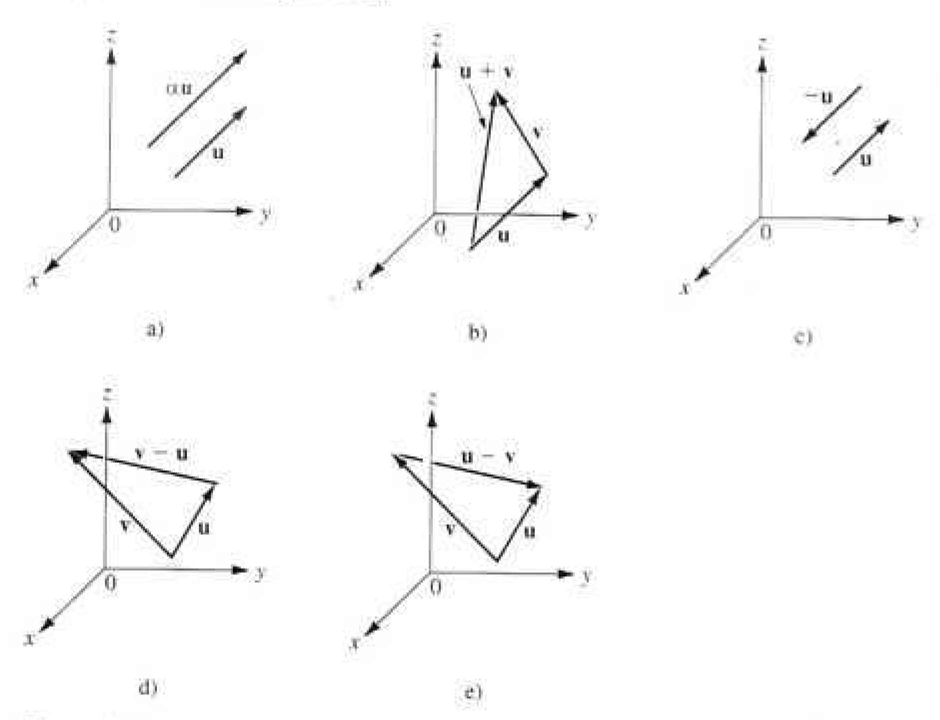


Figura 3.20 Ilustración de la suma de vectores y la multiplicación por un escalar en $\mathbb{R}^3$

Vector unitario Un **vector unitario u** es un vector con magnitud 1. Si **v** es un vector diferente de cero, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es un vector unitario que tiene la misma dirección que **v**.

EJEMPLO 3 **Cálculo de un vector unitario en $\mathbb{R}^3$** Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que $\mathbf{v} = (2, 4, -3)$

Solución Como $\mathbf{v} = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$, se tiene

$$\mathbf{u} = (2/\sqrt{29}, 4/\sqrt{29}, -3/\sqrt{29})$$ ◆

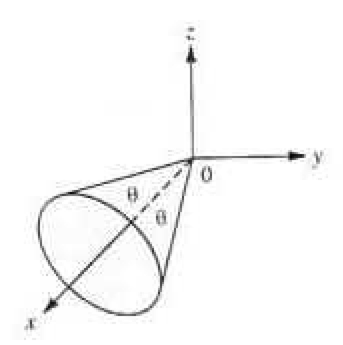


Figura 3.21 Todos los vectores que están en este cono forman un ángulo θ con la parte positiva del eje x

Ahora se puede definir formalmente la dirección de un vector en $\mathbb{R}^3$. No se puede definir como el ángulo θ que forma el vector con el eje x positivo ya que, por ejemplo, si $0 < \theta < \pi/2$, entonces existe un número infinito de vectores que forman un ángulo θ con el lado positivo del eje x, y estos vectores juntos forman un cono (vea la figura 3.21).

DEFINICIÓN 1 **Dirección en $\mathbb{R}^3$** La **dirección** de un vector **v** en $\mathbb{R}^3$ se define como el vector unitario $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

Observación. Se pudo haber definido la dirección de un vector **v** en $\mathbb{R}^2$ de esta manera, ya que si $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, entonces $\mathbf{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, donde θ es la dirección de **v**.

Sería satisfactorio definir la dirección de un vector **v** en términos de algunos ángulos. Sea **v** el vector $\overrightarrow{0P}$ descrito en la figura 3.22. Definimos α como el ángulo entre **v** y el eje x positivo, β el ángulo entre **v** y el eje y positivo, y γ el ángulo entre **v** y el eje z positivo. Los ángulos α, β, y γ son llamados **ángulos directores** del vector **v**. Entonces, de la figura 3.22,

Ángulos directores

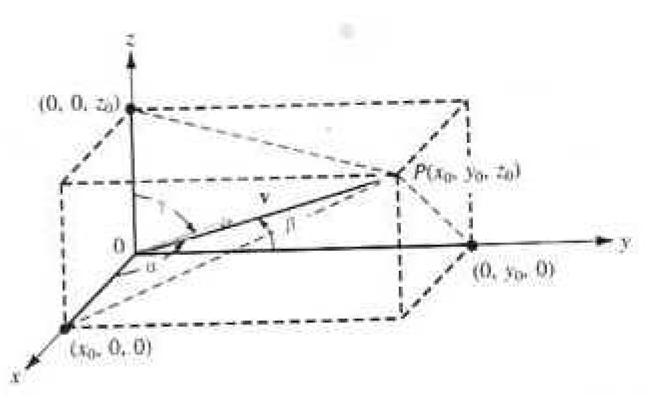


Figura 3.22 El vector **v** forma un ángulo α con el lado positivo del eje x, β con el lado positivo del eje y y γ con el eje positivo del eje z

$$\cos\alpha = \frac{x_0}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos\beta = \frac{y_0}{|\mathbf{v}|} \qquad \cos\gamma = \frac{z_0}{|\mathbf{v}|} \tag{4}$$

Si **v** es un vector unitario, entonces $|\mathbf{v}| = 1$ y

$$\cos\alpha = x_0 \qquad \cos\beta = y_0 \qquad \cos\gamma = z_0 \tag{5}$$

Cosenos directores

Por definición, cada uno de estos tres ángulos cae en el intervalo de $[0, \pi]$. Los cosenos de estos ángulos son llamados **cosenos directores** del vector **v**. Observe, de la ecuación (4), que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = 1 \tag{6}$$

Si α, β y γ son tres números cualesquiera entre cero y π tales que satisfacen la condición (6), entonces determinan de manera única un vector unitario dado por $\mathbf{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Números directores

Observación. Si $\mathbf{v} = (a, b, c)$ y $|\mathbf{v}| \neq 1$, entonces los números a, b y c se llaman **números directores** del vector **v**.

EJEMPLO 4 **Cálculo de los cosenos directores de un vector en $\mathbb{R}^3$** Encuentre los cosenos directores del vector $\mathbf{v} = (4, -1, 6)$.

Solución La dirección de **v** es $\mathbf{v}/|\mathbf{v}| = \mathbf{v}/\sqrt{53} = (4/\sqrt{53}, -1/\sqrt{53}, 6/\sqrt{53})$. Entonces $\cos\alpha = 4/\sqrt{53} \approx 0.5494$, $\cos\beta = -1/\sqrt{53} \approx -0.1374$ y $\cos\gamma = 6/\sqrt{53} \approx 0.8242$. Con estos valores se usan tablas o una calculadora para obtener $\alpha \approx 56.7° \approx 0.989$ rad, $\beta \approx 97.9° \approx 1.71$ rad y $\gamma = 34.5° \approx 0.602$ rad. En la figura 3.23 se da un bosquejo del vector, junto con los ángulos α, β y γ.

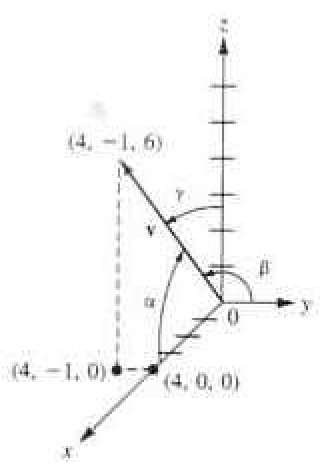


Figura 3.23 Los cosenos directores de (4, −1, 6) son $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ ◆

EJEMPLO 5 **Cálculo de un vector en $\mathbb{R}^3$ dados su magnitud y cosenos directores** Encuentre un vector **v** de magnitud 7 cuyos cosenos directores son $1/\sqrt{6}$, $1/\sqrt{3}$ y $1/\sqrt{2}$.

Solución Sea $\mathbf{u} = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{2})$. Entonces **u** es un vector unitario ya que $|\mathbf{u}| = 1$. Así, la dirección de **v** está dada por **u** y $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\,\mathbf{u} = 7\mathbf{u} = (7/\sqrt{6}, 7/\sqrt{3}, 7/\sqrt{2})$.

Nota. Este problema se puede resolver porque $(1/\sqrt{6})^2 + (1/\sqrt{3})^2 + (1/\sqrt{2})^2 = 1$. ◆

Es interesante observar que si **v** en $\mathbb{R}^2$ es un vector unitario y se puede escribir $\mathbf{v} = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$, donde θ es la dirección de **v**, entonces cos θ y sen θ son los cosenos directores de **v**. En este caso, $\alpha = \theta$ y se define β como el ángulo que forma **v** con el eje *y* (vea la figura 3.24). Por lo tanto, $\beta = (\pi/2) - \alpha$ de manera que $\cos\beta = \cos(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ y **v** se puede escribir en la forma de "cosenos directores"

$$\mathbf{v} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j}$$

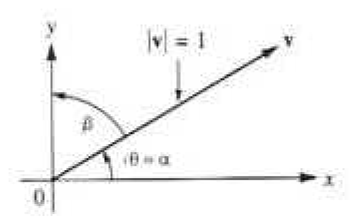


Figura 3.24 Si $\beta = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ y **v** es un vector unitario, entonces $\mathbf{v} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j}$

En la sección 3.1 se vio que cualquier vector en el plano se puede escribir en términos de los vectores base **i** y **j**. Para extender esta idea a $\mathbb{R}^3$, se define

$$\boxed{\mathbf{i} = (1, 0, 0) \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1)} \tag{7}$$

Aquí, **i**, **j** y **k** son vectores unitarios. El vector **i** está sobre el eje *x*, **j** sobre el eje *y* y **k** sobre el eje *z*. En la figura 3.25 se puede ver un bosquejo. Si $\mathbf{v} = (x, y, z)$ es cualquier

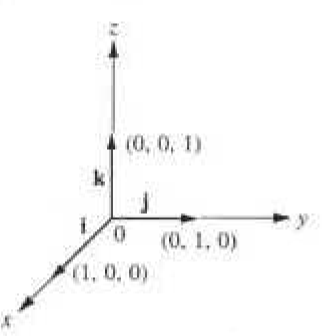


Figura 3.25 Los vectores base **i**, **j** y **k** en $\mathbb{R}^3$

vector en $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\mathbf{v} = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Esto es, *Cualquier vector* **v** *en* $\mathbb{R}^3$ *se puede escribir de manera única en términos de los vectores* **i**, **j** *y* **k**.

La definición de producto escalar en $\mathbb{R}^3$ es, por supuesto, la definición que se vio en la sección 1.6. Observe que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$ e $\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$.

TEOREMA 2 Si φ denota el ángulo positivo más pequeño entre dos vectores **u** y **v** diferentes de cero, se tiene

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \qquad \textbf{(8)}$$

Demostración La prueba es casi idéntica a la prueba del teorema 3.2.2 en la página 242 y se deja al lector como ejercicio (vea el problema 40). ◆

EJEMPLO 6 **Cálculo del coseno del ángulo entre dos vectores en $\mathbb{R}^3$** Calcule el coseno del ángulo entre $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 7$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{14}$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{26}$, por lo que $\cos \varphi = 7/(\sqrt{(14)(26)}) = 7/\sqrt{364} \approx 0.3669$ y $\varphi \approx 68.5° \approx 1.2$ rad. ◆

DEFINICIÓN 2 **Vectores paralelos y ortogonales** Dos vectores **u** y **v** diferentes de cero son:

i. **Paralelos** si el ángulo entre ellos es cero o π

ii. **Ortogonales** (o **perpendiculares**) si el ángulo entre ellos es $\pi/2$

TEOREMA 3

i. Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces **u** y **v** son paralelos si y sólo si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para algún escalar $\alpha \neq 0$.

ii. Si **u** y **v** son diferentes de cero, entonces **u** y **v** son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Demostración De nuevo la prueba es sencilla y se deja como ejercicio (vea el problema 41). ◆

Ahora se dará la definición de la proyección de un vector sobre otro. Primero se establece el teorema análogo al teorema 3.2.5 (y cuya demostración es idéntica).

TEOREMA 4 Sea **v** un vector diferente de cero, entonces para cualquier otro vector **u**,

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$$

es ortogonal a **v**. ✦

DEFINICIÓN 3 **Proyección** Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero. Entonces la **proyección** de **u** sobre **v**, denotada por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ está definida por

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \tag{9}$$

La **componente** de **u** en la dirección de **v** está dada por $\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. **(10)**

EJEMPLO 7 **Cálculo de una proyección en $\mathbb{R}^3$** Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$. Encuentre $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

Solución En este caso $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})/|\mathbf{v}|^2 = 2/41$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{2}{41}\mathbf{i} + \frac{4}{41}\mathbf{j} - \frac{12}{41}\mathbf{k}$. La componente de **u** en la dirección **v** es $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})/|\mathbf{v}| = 2/\sqrt{41}$. ✦

Observe que, igual que en el plano, $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es un vector que tiene la misma dirección que **v** si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$ y la dirección opuesta a la de **v** si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$.

PROBLEMAS 3.3

Autoevaluación

I. *Falso-verdadero.* La práctica común seguida en este libro es desplegar los ejes *xyz* para $\mathbb{R}^3$ como un sistema derecho.

II. La distancia entre los puntos (1, 2, 3) y (3, 5, −1) es _____.

- **a.** $\sqrt{(1+2+3)^2 + (3+5-1)^2}$
- **b.** $\sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2}$
- **c.** $\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}$
- **d.** $\sqrt{4^2 + 7^2 + 2^2}$

III. El punto (0.3, 0.5, 0.2) está _____ la esfera unitaria.

- **a.** en la tangente a
- **b.** sobre
- **c.** dentro de
- **d.** fuera de

IV. $(x-3)^2+(y+5)^2+z^2=81$ es la ecuación de la esfera con _____.
a. centro 81 y radio (−3, 5, 0)
b. radio 81 y centro (−3, 5, 0)
c. radio −9 y centro (3, −5, 0)
d. radio 9 y centro (3, −5, 0)

V. $\mathbf{j}-(4\mathbf{k}-3\mathbf{i})=$ _____.
a. (1, −4, −3)
b. (1, −4, 3)
c. (−3, 1, −4)
d. (3, 1, −4)

VI. $(\mathbf{i}+3\mathbf{k}-\mathbf{j})\cdot(\mathbf{k}-4\mathbf{j}+2\mathbf{i})=$ _____.
a. $2+4+3=9$
b. $(1+3-1)(1-4+2)=-3$
c. $1-12-2=-13$
d. $2-4-3=-5$

VII. El vector unitario en la misma dirección que $2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ es _____.
a. $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$
b. $\frac{1}{5}(2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})$
c. $\frac{1}{3}(2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})$
d. $\frac{1}{3}(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})$

VIII. El componente de **u** en la direción **w** es
a. $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$
b. $\dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$
c. $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}\dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$
d. $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}\dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$

En los problemas 1 al 3 encuentre la distancia entre los puntos:

1. (3, −4, 3); (3, 2, 5)
2. (3, −4, 7); (3, −4, 9)
3. (−2, 1, 3); (4, 1, 3)

En los problemas 4 al 17 encuentre la magnitud y los cosenos directores del vector dado.

4. $\mathbf{v}=3\mathbf{j}$
5. $\mathbf{v}=-3\mathbf{i}$
6. $\mathbf{v}=4\mathbf{i}-\mathbf{j}$
7. $\mathbf{v}=\mathbf{i}+2\mathbf{k}$
8. $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$
9. $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$
10. $\mathbf{v}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$
11. $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$
12. $\mathbf{v}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$
13. $\mathbf{v}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$
14. $\mathbf{v}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$
15. $\mathbf{v}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}-7\mathbf{k}$
16. $\mathbf{v}=-3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+8\mathbf{k}$
17. $\mathbf{v}=-2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$
18. Los tres ángulos directores de cierto vector unitario son los mismos y están entre cero y $\pi/2$. ¿Cuál es el vector?
19. Encuentre un vector de magnitud 12 que tenga la misma dirección que el vector del problema 18.
20. Demuestre que no existe un vector unitario cuyos ángulos directores sean $\pi/6$, $\pi/3$ y $\pi/4$.
21. Sea $P=(2, 1, 4)$ y $Q=(3, -2, 8)$. Encuentre un vector unitario en la misma dirección de $\overrightarrow{PQ}$.
22. Sea $P=(-3, 1, 7)$ y $Q=(8, 1, 7)$. Encuentre un vector unitario cuya dirección es opuesta la de $\overrightarrow{PQ}$.

Respuestas a la autoevaluación

I. V **II.** c **III.** c **IV.** d **V.** d **VI.** a **VII.** c **VIII.** a

23. En el problema 22 encuentre todos los puntos R tales que $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{PQ}$.

*24. Demuestre que el conjunto de puntos que satisfacen la condición del problema 23 y la condición $|\overrightarrow{PR}| = 1$ forman un círculo.

25. **Desigualdad del triángulo** Si **u** y **v** están en $\mathbb{R}^3$, demuestre que $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$

26. ¿Bajo qué circunstancias puede sustituirse la desigualdad en el problema 25 por un signo de igualdad?

En los problemas 27 al 38 sea $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{t} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

27. Calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

28. Calcule $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

29. Calcule $\mathbf{t} + 3\mathbf{w} - \mathbf{v}$.

30. Calcule $2\mathbf{u} - 7\mathbf{w} + 5\mathbf{v}$.

31. Calcule $2\mathbf{v} + 7\mathbf{t} - \mathbf{w}$.

32. Calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

33. Calcule $|\mathbf{w}|$.

34. Calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}$.

35. Calcule el ángulo entre **u** y **w**.

36. Calcule el ángulo entre **t** y **w**.

37. Calcule $\text{proy}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}$.

38. Calcule $\text{proy}_{\mathbf{t}}\, \mathbf{w}$.

39. Pruebe el teorema 1. [*Sugerencia:* Utilice el teorema de Pitágoras dos veces en la figura 3.26.]

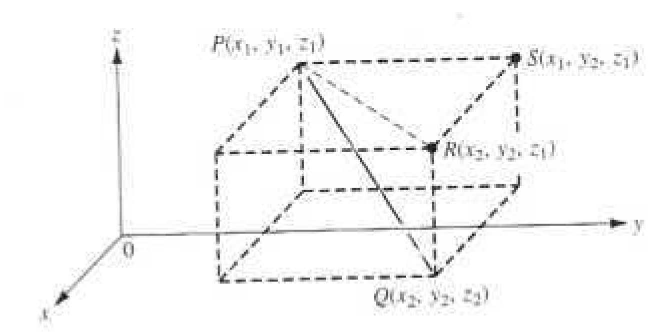
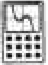


Figura 3.26

40. Pruebe el teorema 2.

41. Pruebe el teorema 3.

42. Pruebe el teorema 4.



MANEJO DE CALCULADORA

Las instrucciones para calculadora dadas en las secciones 3.1 y 3.2 para vectores en $\mathbb{R}^2$ se extienden a $\mathbb{R}^3$, con una excepción.

TI-85

La única diferencia es que la operación (◄Pol)se aplica sólo a $\mathbb{R}^2$. La dirección de un vector **A** en $\mathbb{R}^3$ se obtiene usando la operación (unitV) [ALPHA] [A] [ENTER] Todas las otras operaciones son las mismas.

Resuelva los siguientes problemas en una calculadora.

En los problemas 43 al 46 encuentre la magnitud y dirección de cada vector.

43. (0.2316, 0.4179, −0.5213)

44. (−2356, −8194, 3299)

45. (17.3, 78.4, 28.6)

46. (0.0136, −0.0217, −0.0448)

En los problemas 47 al 50 calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

47. $\mathbf{u} = (-15, 27, 83)$; $\mathbf{v} = (-84, -77, 51)$

48. $\mathbf{u} = (-0.346, -0.517, -0.824)$; $\mathbf{v} = (-0.517, 0.811, 0.723)$

49. $\mathbf{u} = (5241, -3199, 2386)$; $\mathbf{v} = (1742, 8233, 9416)$

50. $\mathbf{u} = (0.24, 0.036, 0.055)$; $\mathbf{v} = (0.088, -0.064, 0.037)$

3.4 EL PRODUCTO CRUZ DE DOS VECTORES

Hasta aquí el único producto de vectores que se ha considerado ha sido el producto escalar o producto punto. Ahora se define un nuevo producto, llamado *producto cruz* (o *producto vectorial*), que está definido *sólo* en $\mathbb{R}^3$.

Nota histórica. El producto cruz fue definido por Hamilton en uno de una serie de artículos publicados en *Philosophical Magazine* entre los años 1844 y 1850.

DEFINICIÓN 1 **Producto cruz** Sean $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}$. Entonces el **producto cruz (producto vectorial)** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, denotado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, es un nuevo vector definido por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{i} + (c_1a_2 - a_1c_2)\mathbf{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k} \quad (1)$$

Note que el resultado del producto cruz es un vector, mientras que el resultado del producto escalar es un escalar.

Aquí el producto cruz parece estar definido de una manera un poco arbitraria. Es obvio que existen muchas maneras de definir un producto vectorial. ¿Por qué se escogió esta definición? La respuesta a esta pregunta se da en esta sección demostrando algunas propiedades del producto cruz e ilustrando algunas de sus aplicaciones.

EJEMPLO 1 **Cálculo del producto cruz de dos vectores** Sean $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Calcule $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Solución Usando la fórmula (1) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= [(-1)(-4) - (2)(3)]\mathbf{i} + [(2)(2) - (1)(-4)]\mathbf{j} + [(1)(3) - (-1)(2)]\mathbf{k} \\ &= -2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 5\mathbf{k}\end{aligned}$$

Nota. En este ejemplo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot (-2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = -2 - 8 + 10 = 0$. De manera similar, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. Es decir, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$. Como se verá en breve, el producto cruz de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es siempre ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. ✦

Antes de continuar el estudio de las aplicaciones del producto cruz se observa que existe una forma sencilla de calcular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ usando determinantes.

TEOREMA 1

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}^{\dagger}$$

Demostración

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} &= \mathbf{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{i} + (c_1a_2 - a_1c_2)\mathbf{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k}\end{aligned}$$

que es igual a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ según la definición 1. ✦

EJEMPLO 2 **Uso del teorema 1 para calcular un producto cruz** Calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -5 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} &= (4 - 10)\mathbf{i} - (2 - 15)\mathbf{j} + (-4 + 12)\mathbf{k} \\ &= -6\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\end{aligned}$$

✦

El siguiente teorema resume algunas propiedades del producto cruz. Su demostración se deja como ejercicio (vea los problemas 32 al 35).

† En realidad no se tiene un determinante porque **i**, **j** y **k** no son números. Sin embargo, al usar la notación de determinantes, el teorema 1 ayuda a recordar cómo calcular un producto cruz.

TEOREMA 2 Sean **u**, **v** u **w** tres vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea α un escalar, entonces:

i. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

ii. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ **(propiedad anticonmutativa para el producto vectorial).**

iii. $(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

iv. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ **(propiedad distributiva para el producto vectorial).**

v. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. (Esto se llama **triple producto escalar** de **u**, **v** y **w**.)

vi. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$. (Es decir, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a **u** y a **v**.)

vii. Si ni **u** ni **v** son el vector cero, entonces **u** y **v** son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

◆

La parte *vi*) de este teorema es la que se usa con más frecuencia. Se vuelve a establecer como sigue:

> El producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a **u** como a **v**.

Se sabe que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es un vector ortogonal a **u** y **v**, pero siempre habrá *dos* vectores unitarios ortogonales a **u** y **v** (vea la figura 3.27). Los vectores **n** y $-\mathbf{n}$ (**n** por la letra inicial de **normal**) son ambos ortogonales a **u** y **v**. ¿Cuál tiene la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$? La respuesta está dada por la **regla de la mano derecha**. Si se coloca la mano derecha de manera que el índice apunte en la dirección de **u** y el dedo medio en la dirección de **v**, entonces el pulgar apuntará en la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (vea la figura 3.28.)

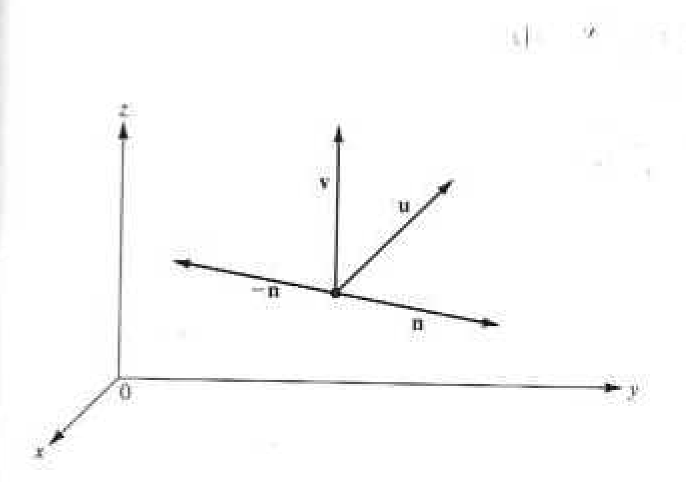


Figura 3.27 Existen exactamente dos vectores, **n** y $-\mathbf{n}$, que son ortogonales a dos vectores no paralelos **u** y **v** en $\mathbb{R}^3$

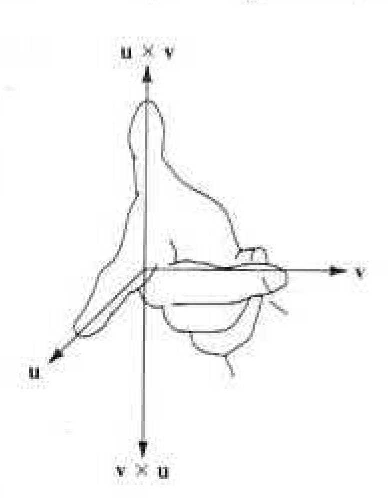


Figura 3.28 La dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ se puede determinar usando la regla de la mano derecha

Estudiada la dirección del vector **u** × **v**, la atención se dirige a su magnitud.

TEOREMA 3 Si φ es ángulo entre **u** y **v**, entonces

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen} \varphi \tag{2}$$

Demostración No es difícil demostrar (comparando coordenadas) que $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ (vea el problema 31). Entonces, como $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 \cos^2 \varphi$ (del teorema 3.3.2, página 257),

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 &= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2\cos^2 \varphi = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \end{aligned}$$

y el teorema queda demostrado después de sacar raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación. Observe que sen φ ≥ 0 porque $0 \le \varphi \le \pi$. ◆

Existe una interpretación geométrica interesante del teorema 3. Los vectores **u** y **v** están dibujados en la figura 3.29 y se puede pensar que son dos lados adyacentes de un paralelogramo. Entonces de la geometría elemental, se ve que

> El área del paralelogramo que tiene lados adyacentes **u** y **v** es igual a $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen} \varphi = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ (3)

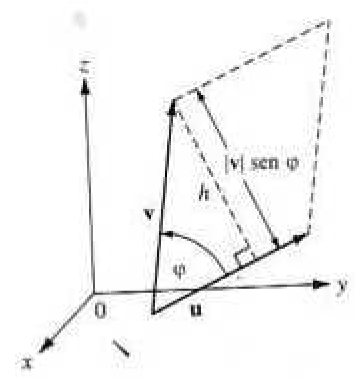


Figura 3.29 φ es el ángulo entre **u** y **v**. $\frac{h}{|\mathbf{v}|} = \operatorname{sen} \varphi$ de manera que $h = |\mathbf{v}| \operatorname{sen} \varphi$

EJEMPLO 3 **Cálculo del área de un paralelogramo en $\mathbb{R}^3$** Encuentre el área del paralelogramo con vértices consecutivos en $P = (1, 3, -2)$, $Q = (2, 1, 4)$ y $R = (-3, 1, 6)$.

Solución El paralelogramo está dibujado en la figura 3.30. Se tiene

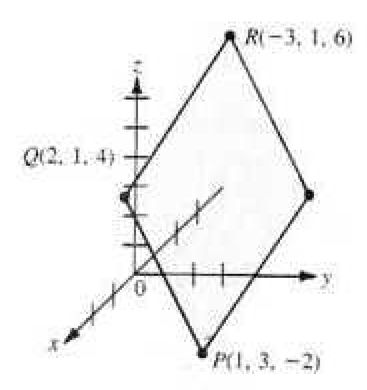


Figura 3.30 Un paralelogramo en $\mathbb{R}^3$

$$\text{Área} = |\vec{PQ} \times \vec{QR}| = |(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \times (-5\mathbf{i} + 2\mathbf{k})|$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 6 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = |-4\mathbf{i} - 32\mathbf{j} - 10\mathbf{k}| = \sqrt{1140} \text{ unidades cuadradas}$$

◆

Interpretación geométrica de los determinantes de 2 × 2 (otra vez)

En la sección 2.1 (página 180) se estudió el significado geométrico de un determinante de 2 × 2. Ahora se verá el mismo problema. Usando el producto cruz, se obtiene el resultado de la sección 2.1 en forma más sencilla. Sea A una matriz de 2 × 2 y sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores de 2 componentes. Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Estos vectores están dados en la figura 3.31.

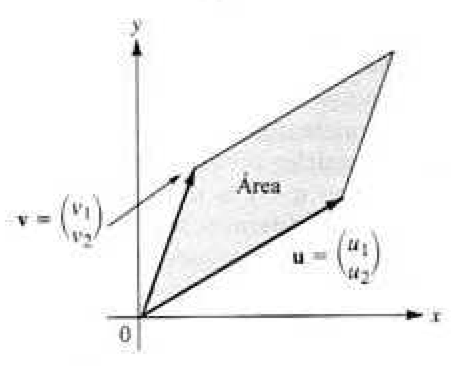


Figura 3.31 El área de la región sombreada es el área generada por **u** y **v**

El **área generada** por **u** y **v** se define como el área del paralelogramo dado en la figura. Se puede pensar que **u** y **v** son vectores en $\mathbb{R}^3$ que están en el plano xy. Entonces,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ y}$$

$$\text{Área generada por } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= |(u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}| = |u_1v_2 - u_2v_1|^{\dagger}$$

Ahora sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}' = A\mathbf{v}$. Entonces $\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix}$. ¿Cuál es el área generada por $\mathbf{u}'$ y $\mathbf{v}'$? Siguiendo los pasos anteriores se calcula

Área generada por $\mathbf{u}'$ y $\mathbf{v}'$ =

$$|\mathbf{u}' \times \mathbf{v}'| = \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_{11}u_1 + a_{12}u_2 & a_{21}u_1 + a_{22}u_2 & 0 \\ a_{11}v_1 + a_{12}v_2 & a_{21}v_1 + a_{22}v_2 & 0 \end{vmatrix} \right|$$

$$= |(a_{11}u_1 + a_{12}u_2)(a_{21}v_1 + a_{22}v_2) - (a_{21}u_1 + a_{22}u_2)(a_{11}v_1 + a_{12}v_2)|$$

La manipulación algebraica verifica que la última expresión es igual a

$$|(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(u_1v_2 - u_2v_1)| = \pm\det A \ \text{(área generada por } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v})$$

Entonces (en este contexto): *el determinante tiene el efecto de multiplicar el área*. En el problema 39 se pide al lector que demuestre que en cierto sentido un determinante de 3×3 tiene el efecto de multiplicar el volumen.

Interpretación geométrica del triple producto escalar

Sean **u**, **v** y **w** tres vectores que no están en el mismo plano. Entonces forman los lados de un **paralelepípedo** en el espacio (vea la figura 3.32). Calculemos su volumen. La base del paralelepípedo es un paralelogramo. Su área, de (3), es igual a $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a **u** como a **v** y, por lo tanto, es ortogonal al paralelogramo determinado por **u** y **v**. La altura del paralelepípedo, h, se mide a lo largo del vector ortogonal al paralelogramo.

---

† Observe que éste es el valor absoluto de $\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$.

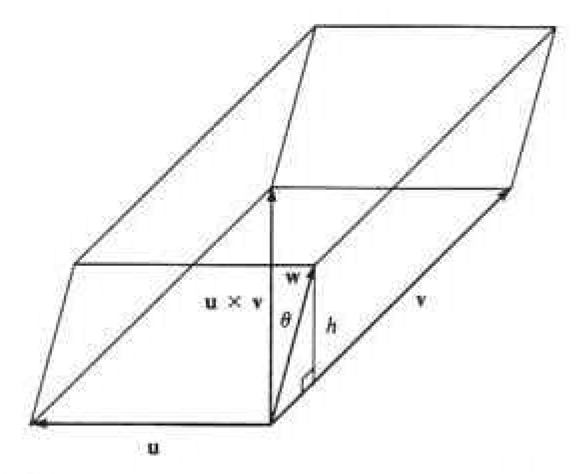


Figura 3.32 Tres vectores **u**, **v** y **w** que no están en el mismo plano determinara un paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$

Del análisis de la proyección en la página 245, se ve que h es el valor absoluto de la componente de **w** en la dirección (ortogonal) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Así, de la ecuación (10) en la página 258

$$h = \text{componente de } \mathbf{w} \text{ en la dirección } \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left| \frac{\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} \right|$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{Volumen del paralelepípedo} &= \text{área de base} \times \text{altura} \\ &= |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \left[\frac{|\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} \right] = |\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})| \end{aligned}$$

Es decir,

> El volumen del paralepípedo determinado por los tres vectores **u**, **v** y **w** es igual a $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$ = valor absoluto del triple producto escalar de **u**, **v** y **w**. **(4)**

Semblanza de . . .

Josiah Willard Gibbs y los orígenes del análisis vectorial

Josiah Willard Gibbs (*The Granger Collection, New York*)

Como ya se ha observado, el estudio de los vectores se originó con la invención de los cuaterniones de Hamilton. Hamilton y otros desarrollaron los cuaterniones como herramientas matemáticas para la exploración del espacio físico. Pero los resultados fueron desilusionantes porque vieron que los cuaterniones eran demasiado complicados para entenderlos con rapidez y aplicarlos fácilmente. Los cuaterniones contenían una parte escalar y una parte vectorial y las dificultades surgían cuando estas partes se manejaban al mismo tiempo. Los científicos se dieron cuenta de que muchos problemas se podían manejar considerando la parte vectorial por separado y así comenzó el análisis vectorial.

Este trabajo se debe principalmente al físico americano Josiah Willard Gibbs (1839-1903). Como nativo de New Haven, Connecticut, Gibbs estudió matemáticas y física en la Universidad de Yale y recibió el grado de doctor en 1863. Después estudió más matemáticas y física en París, Berlín y Heidelberg. En 1871 fue nombrado profesor de física en Yale. Era un físico original que hizo muchas publicaciones en el área físico matemática. El libro de Gibbs *Vector Analysis* apareció en 1881 y de nuevo en 1884. En 1902 publicó *Elementary Principles of Statistical Mechanics*. Los estudiantes de matemáticas aplicadas se encontraron con el singular **fenómeno de Gibbs** en las series de Fourier.

El libro pionero de Gibbs, *Vector Analysis* era en realidad un panfleto pequeño impreso para la distribución privada —en principio para que sus estudiantes lo usaran. De cualquier forma, creó un gran entusiasmo entre aquellos que veían una alternativa a los cuaterniones, y pronto el libro fue ampliamente conocido. Finalmente, el material se convirtió en un libro formal escrito por E. B. Wilson. El libro *Vector Analysis* de Gibbs y Wilson se basaba en la cátedra de Gibbs. Se publicó en 1901.

Todos los estudiantes de física elemental se encuentran con el trabajo de Gibbs. En la introducción a la física, un espacio vectorial se ve como un segmento de recta dirigido, o flecha. Gibbs dio definiciones de igualdad, suma y multiplicación de vectores; éstas son esencialmente las definiciones dadas en este capítulo. En particular, la parte vectorial de un cuaternión se escribía como $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, y ésta es la forma en que ahora se describen los vectores en $\mathbb{R}^3$.

Gibbs definió el producto escalar, inicialmente, sólo para los vectores **i**, **j**, **k**:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$$
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=0$$

Siguió a esto la definición más general. Gibbs aplicó el producto escalar en problemas referentes a la fuerza. (Recuerde, primero era físico.) Si **F** es un vector de fuerza de magnitud $|F|$ que actúa en la dirección del segmento $\overrightarrow{0Q}$ (vea la figura 3.33), entonces la efectividad de esta fuerza al empujar un objeto a lo largo del segmento $\overrightarrow{0P}$ (es decir,

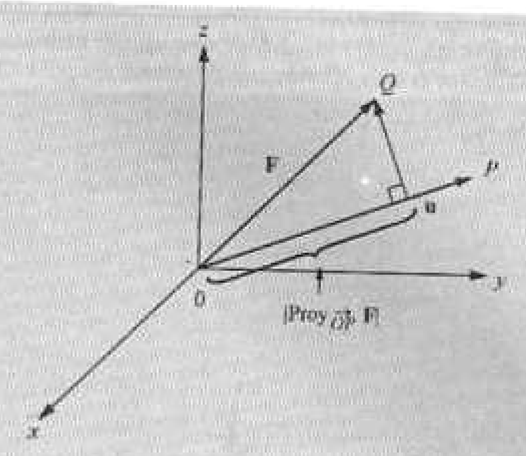


Figura 3.33 La efectividad de **F** en la dirección de $\vec{0P}$ es la componente de **F** en la dirección de $\vec{0P}$ (= **u**) si **u** = 1

a lo largo del vector **u**) está dada por **F** · **u**. Si |**u**| = 1, entonces **F** · **u** es la componente de **F** en la dirección de **u**. También el producto cruz tiene un significado físico. Suponga que un vector de fuerza **F** actúa en un punto P en el espacio en la dirección de $\vec{PQ}$. Si **u** es el vector representado por $\vec{0P}$, entonces el momento de fuerza ejercido por **F** alrededor del origen es el vector **u** × **F** (vea la figura 3.34).

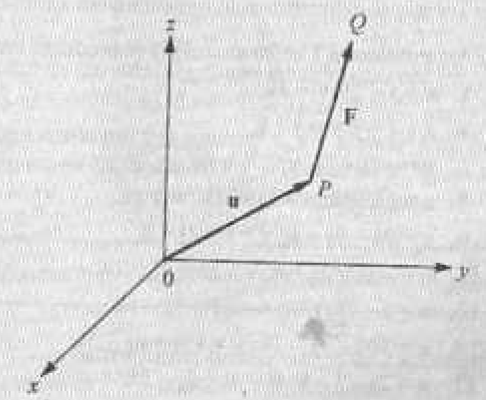


Figura 3.34 El vector **u** × **F** es el momento de la fuerza alrededor del origen

Tanto el producto escalar como el producto cruz entre vectores aparecen prominentemente en las aplicaciones físicas que involucran el cálculo de varias variables. Éstas incluyen las famosas ecuaciones de Maxwell en electromagnetismo.

Al estudiar matemáticas al final del siglo XX, no debemos perder de vista el hecho de que la mayor parte de las matemáticas modernas se desarrollaron para resolver problemas del mundo real. Los vectores fueron desarrollados por Gibbs y otros para facilitar el análisis de los fenómenos físicos. En ese sentido tuvieron un gran éxito.

PROBLEMAS 3.4

Autoevaluación

I. $\mathbf{i} \times \mathbf{k} - \mathbf{k} \times \mathbf{i} =$ ______.
 a. 0 b. $\mathbf{j}$ c. $2\mathbf{j}$ d. $-2\mathbf{j}$

II. $\mathbf{i} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) =$ ______.
 a. 0 b. **0** c. 1 d. $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

III. $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \times \mathbf{k}$ ______.
 a. $= 0$ b. $= \mathbf{0}$ c. $= 1$ d. no está definido

IV. $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{j} + \mathbf{k}) =$ ______.
 a. 0 b. **0** c. 1 d. $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

V. El seno del ángulo entre los vectores **u** y **w** es ______.
 a. $\dfrac{|\mathbf{u} \times \mathbf{w}|}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{w}|}$ b. $\dfrac{|\mathbf{u} \times \mathbf{w}|}{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}|}$
 c. $\dfrac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{w}|}$ d. $|\mathbf{u} \times \mathbf{w}| - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}|$

VI. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} =$ ______.
 a. $|\mathbf{u}|^2$ b. 1 c. **0** d. $\bar{0}$

En los problemas 1 al 20 encuentre el producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

1. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j};\ \mathbf{v} = 3\mathbf{k}$
2. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j};\ \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$
3. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j};\ \mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$
4. $\mathbf{u} = -7\mathbf{k};\ \mathbf{v} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
5. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j};\ \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$
6. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j};\ \mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$
7. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{k};\ \mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{k}$
8. $\mathbf{u} = a\mathbf{j} + b\mathbf{k};\ \mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{k}$
9. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k};\ \mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
10. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k};\ \mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
11. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k};\ \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
12. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k};\ \mathbf{v} = -\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
13. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k};\ \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
14. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k};\ \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$
15. $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k};\ \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
16. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k};\ \mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
17. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k};\ \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
18. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 8\mathbf{k};\ \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
19. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a\mathbf{k};\ \mathbf{v} = b\mathbf{i} + b\mathbf{j} + b\mathbf{k}$
20. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k};\ \mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} - c\mathbf{k}$
21. Encuentre dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ como a $\mathbf{v} = 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.
22. Encuentre dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ como a $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
23. Utilice el producto cruz para encontrar el seno del ángulo φ entre los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Respuestas a la autoevaluación

I. d II. c III. b = vector cero [*Nota:* $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \times \mathbf{k}$ *está* definido porque $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{k} = \mathbf{0} = \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$] IV. d V. a VI. c = vector cero

24. Utilice el producto escalar para calcular el coseno del ángulo φ entre los vectores del problema 23. Después demuestre que para los valores calculados, $\text{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$.

En los problemas 25 al 30 encuentre el área del paralelogramo con los vértices adyacentes dados.

25. $(1, -2, 3)$; $(2, 0, 1)$; $(0, 4, 0)$

26. $(-2, 1, 1)$; $(2, 2, 3)$; $(-1, -2, 4)$

27. $(-2, 1, 0)$; $(1, 4, 2)$; $(-3, 1, 5)$

28. $(7, -2, -3)$; $(-4, 1, 6)$; $(5, -2, 3)$

29. $(a, 0, 0)$; $(0, b, 0)$; $(0, 0, c)$

30. $(a, b, 0)$; $(a, 0, b)$; $(0, a, b)$

31. Demuestre que $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$. [*Sugerencia:* Escríbalo en términos de componentes.]

32. Utilice las propiedades 1, 4, 2 y 3 (en ese orden) en la sección 2.2 para probar las partes *i*), *ii*), *iii*) y *iv*) del teorema 2.

33. Pruebe el teorema 2 parte *v*) escribiendo las componentes de cada lado de la igualdad.

34. Pruebe el teorema 2 parte *vi*). [*Sugerencia:* utilice las partes *ii*) y *v*) y el hecho de que el producto escalar es conmutativo para demostrar que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.]

35. Pruebe el teorema 2 parte *vii*). [*Sugerencia:* use el teorema 3.3.3, pág. 257, la propiedad 6, pág. 196 y la ecuación (2).]

36. Demuestre que si $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ y $\mathbf{w} = (a_3, b_3, c_3)$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

37. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $-7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

38. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$, donde $P = (2, 1, -1)$, $Q = (-3, 1, 4)$, $R = (-1, 0, 2)$ y $S = (-3, -1, 5)$.

****39.** El **volumen generado** por tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^3$ está definido como el volumen del paralelepípedo cuyos lados son $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ (como en la figura 3.32). Sea A una matriz de 3×3 y sean $\mathbf{u}_1 = A\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1 = A\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}_1 = A\mathbf{w}$. Demuestre que

Volumen generado por $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 = (\pm\det A)$(volumen generado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$)

Esto muestra que el determinante de una matriz de 2×2 multiplica el área, el determinante de una matriz de 3×3 multiplica el volumen.

40. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a. Calcule el volumen generado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

b. Calcule el volumen generado por $A\mathbf{u}$, $A\mathbf{v}$ y $A\mathbf{w}$.

c. Calcule $\det A$

d. Demuestre que [volumen en el inciso *b*)] = $(\pm\det A) \times$ [volumen en el inciso *a*)].

41. El **triple producto cruz** de tres vectores en $\mathbb{R}^3$ está definido como el vector $\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. Demuestre que

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$$

MANEJO DE CALCULADORA

El producto cruz de dos vectores se puede encontrar directamente en algunas calculadoras.

TI-85

Introduzca dos vectores y asígneles nombres, digamos A y B. Oprima [2nd] [VECTR]

[F3] Se desplegarán ⟨MATH⟩ [F1] ⟨cross⟩ y "cross (". Después oprima

[ALPHA] [A] [,] [ALPHA] [B] [)] [ENTER]

y se obtendrá A × B.

En los problemas 42 al 45 calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ con una calculadora.

42. $\mathbf{u} = (-15, 27, 83)$; $\mathbf{v} = (-84, -77, 51)$

43. $\mathbf{u} = (-0.346, -0.517, -0.824)$; $\mathbf{v} = (-0.517, 0.811, 0.723)$

44. $\mathbf{u} = (5241, -3199, 2386)$; $\mathbf{v} = (1742, 8233, 9416)$

45. $\mathbf{u} = (0.024, 0.036, 0.055)$; $\mathbf{v} = (0.088, -0.064, 0.037)$

MATLAB 3.4

1. Utilice MATLAB para calcular el producto cruz de los vectores dados en los problemas 1, 2, 3, 4 y 10 de esta sección. Verifique sus respuestas calculando los productos escalares de los resultados con los vectores individuales. (¿Qué valor deben tener estos productos escalares?) El producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está definido como un vector de 3×1 dado por **[u(2)*v(3)– u(3)*v(2); – u(1)*v(3)+u(3)*v(1); u(1)*v(2)–v(1)*u(2)]**.

2. a. Dé tres vectores aleatorios de 3×1, **u**, **v** y **w** (use **2*rand(3,1)–1**). Calcule $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, el producto escalar de **u** con $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Sea $B = [\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w}]$. Encuentre $\det(B)$. Compare $\det(B)$ con el producto escalar. Haga lo mismo para varios juegos de **u**, **v** y **w**. Formule una conclusión y después pruébela (lápiz y papel).

b. Sean **u**, **v** y **w** tres vectores aleatorios de 3×1 y sea A una matriz aleatoria de 3×3. Sea **A = round(10*(2*rand(3)–1))**. Calcule $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$, $|A\mathbf{u} \cdot (A\mathbf{v} \times A\mathbf{w})|$ y $|\det(A)|$. (En MATLAB, **abs(a)** dé $|\mathbf{a}|$.) Haga esto para varias matrices A hasta que pueda formular una conclusión respecto a las tres cantidades calculadas. Pruebe sus conclusiones para otras matrices aleatorias A.

Según sus conclusiones, ¿qué significado geométrico tiene $|\det(A)|$?

c. (*Lápiz y papel*) Usando a), demuestre que $A\mathbf{u} \cdot (A\mathbf{v} \times A\mathbf{w}) = \det([A\mathbf{u}\ \ A\mathbf{v}\ \ A\mathbf{w}])$, donde A es una matriz de 3×3. Argumente por qué $[A\mathbf{u}\ \ A\mathbf{v}\ \ A\mathbf{w}] = AB$, donde $B = [\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w}]$. Ahora pruebe la conclusión obtenida en el inciso b).

3.5 RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

En el plano $\mathbb{R}^2$ se puede encontrar la ecuación de una recta si se conocen dos puntos sobre la recta, o bien, un punto y la pendiente de la misma. En $\mathbb{R}^3$ la intuición dice que las ideas básicas son las mismas. Como dos puntos determinan una recta, debe poderse calcular la ecuación de una recta en el espacio si se conocen dos puntos sobre ella. De manera alternativa, si se conoce un punto y la dirección de una recta, también debe ser posible encontrar su ecuación.

Comenzamos con dos puntos $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ sobre una recta L. Un vector paralelo a L es aquel con representación $\overrightarrow{PQ}$. Entonces,

$$\mathbf{v} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} \tag{1}$$

es un vector paralelo a L. Ahora sea $R = (x, y, z)$ otro punto sobre la recta. Entonces $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$, que a su vez es paralelo a **v**, de manera que por el teorema 3.3.3 en la página 257,

$$\overrightarrow{PR} = t\mathbf{v} \tag{2}$$

para algún número real t. Ahora vea la figura 3.35. Se tiene (en cada uno de los tres casos posibles)

$$\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{PR} \tag{3}$$

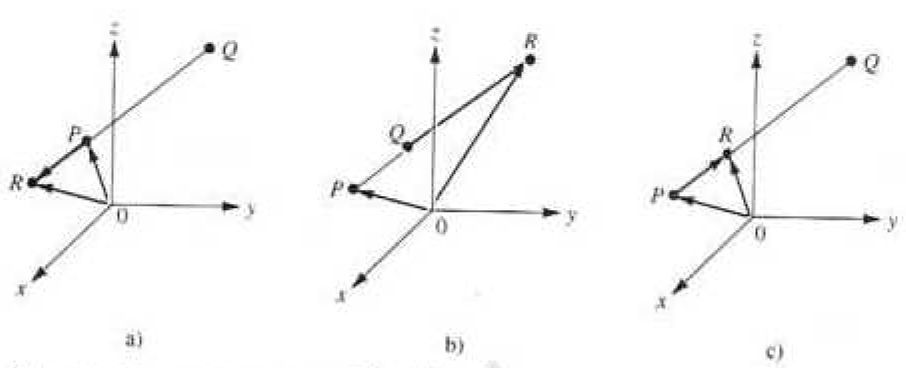


Figura 3.35 En los tres casos $\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{PR}$

Y al combinar (2) y (3) se obtiene

$$\boxed{\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + t\mathbf{v}} \tag{4}$$

Ecuación vectorial de una recta

La ecuación (4) se llama **ecuación vectorial** de la recta L. Si R está sobre L, entonces (4) se satisface para algún número real t. Inversamente, si (4) se cumple, entonces invirtiendo los pasos, se ve que $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a **v**, lo que significa que R está sobre L.

Si se extienden las componentes de la ecuación (4), se obtiene

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} + t(x_2 - x_1)\mathbf{i} + t(y_2 - y_1)\mathbf{j} + t(z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

o sea

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1) \end{aligned}} \qquad (5)$$

Ecuaciones paramétricas de una recta

Las ecuaciones (5) se llaman **ecuaciones paramétricas** de una recta.

Por último, al despejar t en (5) y definir $x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = b$ y $z_2 - z_1 = c$, se encuentra que si $abc \neq 0$,

$$\boxed{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}} \qquad (6)$$

Ecuaciones simétricas de una recta

Las ecuaciones (6) se llaman **ecuaciones simétricas** de una recta. Aquí a, b y c son números directores del vector **v**. Por supuesto, las ecuaciones (6) son válidas sólo si a, b y c son diferentes de cero.

EJEMPLO 1 **Determinación de las ecuaciones de una recta** Encuentre las ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas de la recta L que pasa por los puntos $P = (2, -1, 6)$ y $Q = (3, 1, -2)$.

Solución Primero se calcula $\mathbf{v} = (3 - 2)\mathbf{i} + [1 - (-1)]\mathbf{j} + (-2 - 6)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$. Después, de (4), si $R = (x, y, z)$ está sobre la recta, se obtiene $\overrightarrow{0R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \overrightarrow{0P} + t\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k} + t(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 8\mathbf{k})$, o sea,

$$x = 2 + t \qquad y = -1 + 2t \qquad z = 6 - 8t \qquad \text{ecuaciones paramétricas}$$

Por último, como $a = 1$, $b = 2$ y $c = -8$, las ecuaciones simétricas son

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 6}{-8} \qquad \text{ecuaciones simétricas} \qquad (7)$$

para verificar estas ecuaciones, se comprueba que $(2, -1, 6)$ y $(3, 1, -2)$ estén en realidad en la recta. Se tiene [después de insertar estos puntos en (7)]

$$\frac{2 - 2}{1} = \frac{-1 + 1}{2} = \frac{6 - 6}{-8} = 0$$

$$\frac{3 - 2}{1} = \frac{1 + 1}{2} = \frac{-2 - 6}{-8} = 1$$

Se pueden encontrar otros puntos en la recta. Por ejemplo, si $t = 3$ se obtiene

$$3 = \frac{x - 2}{1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 6}{-8}$$

Lo que lleva al punto $(5, 5, -18)$. ✦

EJEMPLO 2 **Obtención de las ecuaciones simétricas de una recta** Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por lo puntos $(1, -2, 4)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución Se usa la fórmula (6) con $P = (x_1, y_1, z_1) = (1, -2, 4)$ y $\mathbf{v}$ como se dio, de manera que $a = 1$, $b = 1$ y $c = -1$. Esto lleva a

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-1}$$

◆

¿Qué pasa si uno de los números directores a, b y c es cero?

EJEMPLO 3 **Determinación de las ecuaciones simétricas de una recta cuando un número director es cero** Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que contiene los puntos $P = (3, 4, -1)$ y $Q = (-2, 4, 6)$.

Solución Aquí $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$ y $a = -5$, $b = 0$, $c = 7$. Entonces una representación paramétrica de la recta es $x = 3 - 5t$, $y = 4$ y $z = -1 + 7t$. Despejando t se encuentra que

$$\frac{x-3}{-5} = \frac{z+1}{7} \quad \text{y} \quad y = 4$$

La ecuación $y = 4$ es la ecuación de un plano paralelo al plano xz, así que se obtuvo una ecuación de una recta en ese plano.

◆

EJEMPLO 4 **Determinación de las ecuaciones simétricas de una recta cuando dos números directores son cero** Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos $P = (2, 3, -2)$ y $Q = (2, -1, -2)$.

Solución Aquí $\mathbf{v} = -4\mathbf{j}$ de manera que $a = 0$, $b = -4$ y $c = 0$. Una representación paramétrica de la recta es, por la ecuación (5), dada por $x = 2$, $y = 3 - 4t$, $z = -2$. Ahora $x = 2$ es la ecuación de un plano paralelo al plano yz, mientras que $z = -2$ es la ecuación de un plano paralelo al plano xy. Su intersección es la recta $x = 2$, $z = -2$, que es paralela al eje y y pasa por los puntos $(2, 0, -2)$. De hecho, la ecuación $y = 3 - 4t$ dice, en esencia, que y puede tomar cualquier valor (mientras que x y z permanece fijos).

◆

ADVERTENCIA Las ecuaciones paramétricas o simétricas de una recta *no* son únicas. Para ver esto, simplemente comience con otros dos puntos arbitrarios sobre la recta. ◇

EJEMPLO 5 **Ilustración de la falta de unicidad en las ecuaciones simétricas de una recta** En el ejemplo 1 la recta cuyas ecuaciones se encontraron contiene al punto $(5, 5, -18)$. Al elegir $P = (5, 5, -18)$ y $Q = (3, 1, -2)$, se encuentra que $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$ de manera que $x = 5 - 2t$, $y = 5 - 4t$ y $z = -18 + 16t$. (Observe que si $t = \frac{1}{2}$, se obtiene $(x, y, z) =$

(2, −1, 6).) Las ecuaciones simétricas son ahora

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+18}{16}$$

◆

Note que $(-2, -4, 16) = -2(1, 2, -8)$.

La ecuación de una recta en el espacio se obtiene especificando un punto sobre la recta y un vector *paralelo* a esta recta. Se pueden derivar ecuaciones de un plano en el espacio especificando un punto en el plano y un vector ortogonal a todos los vectores en el plano. Este vector ortogonal se llama **vector normal** al plano y se denota por **n** (vea la figura 3.36).

Vector normal

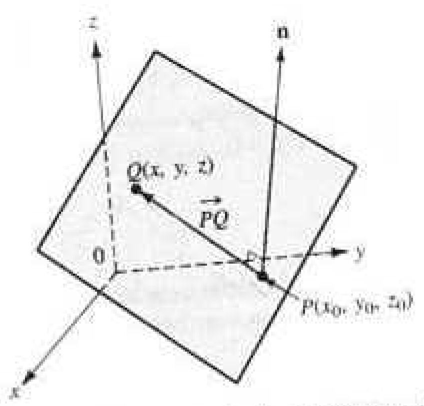


Figura 3.36 El vector **n** es ortogonal a todos los vectores en el plano

DEFINICIÓN 1 **Plano** Sea P un punto en el espacio y sea **n** un vector dado diferente de cero. Entonces el conjunto de todos los puntos Q para los que $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$ constituye un **plano** en $\mathbb{R}^3$.

Notación. Por lo general, un plano se denota por el símbolo π.

Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo sobre un plano con vector normal $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Si $Q = (x, y, z)$ es otro punto en el plano, entonces $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$. Como $\overrightarrow{PQ} \perp \mathbf{n}$, tenemos que $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$. Pero esto implica que

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad (8)$$

Una manera más común de escribir la ecuación de un plano se deriva de (8):

Ecuación cartesiana de un plano

$$ax + by + cz = d \qquad (9)$$

donde $d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \overrightarrow{0P} \cdot \mathbf{n}$

EJEMPLO 6 **Determinación de la ecuación de un plano que pasa por un punto dado y tiene un vector normal dado** Encuentre un plano π que pasa por el punto (2, 5, 1) y que tiene un vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Solución De (8) se obtiene directamente $(x - 2) - 2(y - 5) + 3(z - 1) = 0$, o sea,

$$x - 2y + 3z = -5 \quad \Rightarrow \pi \tag{10}$$

◆

Los tres planos coordenados se representan de la siguiente manera:

i. El *plano xy* pasa por el origen (0, 0, 0) y cualquier vector a lo largo del eje z es normal a él. El vector más simple es **k**. Así, de (8) se obtiene $0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0$, lo que lleva a

$$z = 0 \tag{11}$$

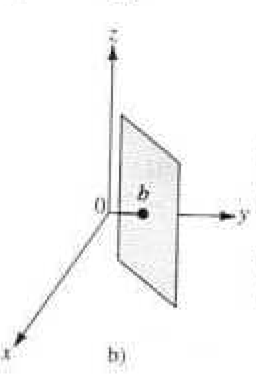
como la ecuación del plano xy. (Este resultado no debe sorprender.)

ii. El *plano xz* tiene la ecuación

$$y = 0 \tag{12}$$

iii. El *plano yz* tiene la ecuación

$$x = 0 \tag{13}$$



El dibujo de un plano

No es difícil dibujar un plano.

Caso 1. *El plano es paralelo a un plano coordenado.* Si el plano es paralelo a uno de los planos coordenados, entonces la ecuación del plano es una de las siguientes:

$x = a$ (paralelo al plano yz)

$y = b$ (paralelo al plano xz)

$z = c$ (paralelo al plano xy)

Cada plano se dibuja como un rectángulo con lados paralelos a los otros dos ejes coordenados. La figura 3.37 presenta un bosquejo de estos tres planos.

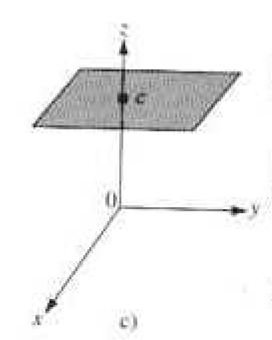


Figura 3.37 Tres planos paralelos a algún plano coordenado

Caso 2. *El plano intersecta a cada eje coordenado.* Suponga que una ecuación del plano es

$$ax + by + cz = d \qquad \text{con } abc \neq 0.$$

El cruce con el eje x es el punto $\left(\frac{d}{a}, 0, 0\right)$, el cruce con el eje y es el punto $\left(0, \frac{d}{b}, 0\right)$ y el cruce con el eje z es el punto $\left(0, 0, \frac{d}{c}\right)$.

Paso 1. Grafique los tres puntos de cruce.

Paso 2. Una los tres puntos de cruce para formar un triángulo.

Paso 3. Dibujando dos líneas paralelas, dibuje un paralelogramo cuya diagonal es el tercer lado del triángulo.

Paso 4. Extienda el paralelogramo dibujando cuatro líneas paralelas.

Este proceso se ilustra con la gráfica del plano $x + 2y + 3z = 6$ en la figura 3.38. Los cruces son (6, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 2).

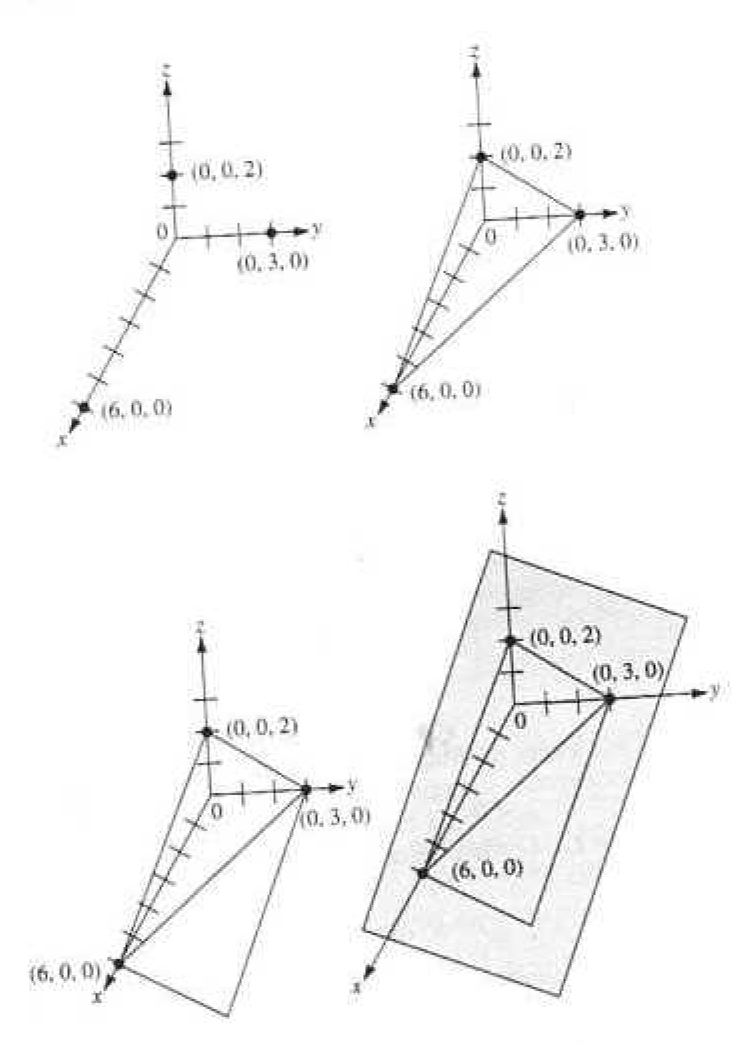


Figura 3.38 Dibujo del plano $x + 2y + 3z = 6$ en cuatro pasos

Figura 3.39 Los puntos P, Q y R determinan un plano siempre que no sean colineales

Tres puntos no colineales determinan un plano ya que determinan dos vectores no paralelos que se intersectan en un punto (vea la figura 3.39).

EJEMPLO 7 **Determinación de la ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados** Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos $P = (1, 2, 1)$, $Q = (-2, 3, -1)$ y $R = (1, 0, 4)$.

Solución Los vectores $\overrightarrow{PQ} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\overrightarrow{QR} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ están en el plano y por lo tanto son ortogonales al vector normal de manera que

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

y se obtiene, usando el punto P en la ecuación (8),

$$\pi: \quad -(x-1) + 9(y-2) + 6(z-1) = 0$$

es decir,

$$-x + 9y + 6z = 23$$

Observe que si se escoge otro punto, digamos Q, se obtiene la ecuación $-(x+2) + 9(y-3) + 6(z+1) = 0$, que se reduce a $-x + 9y + 6z = 23$. La figura 3.40 presenta un bosquejo de este plano.

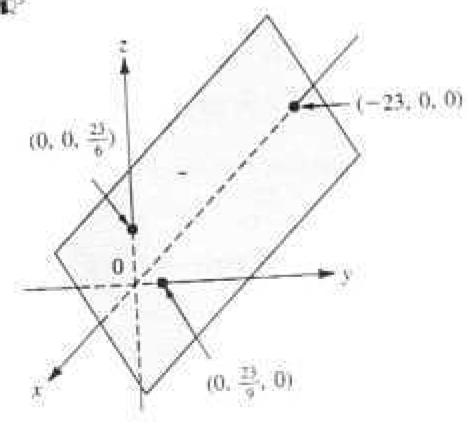


Figura 3.40 El plano $-x + 9y + 6z = 23$

DEFINICIÓN 2 **Planos paralelos** Dos planos son **paralelos**† si sus vectores normales son paralelos; es decir, si el producto cruz de sus vectores normales es cero.

En la figura 3.41 se dibujaron dos planos paralelos.

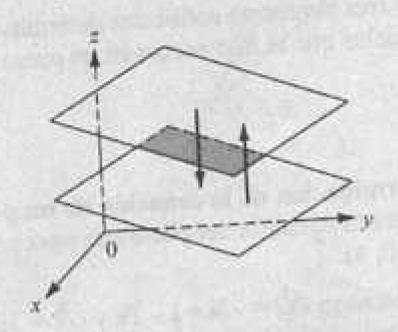


Figura 3.41 Dos plano paralelos

EJEMPLO 8 **Dos planos paralelos** Los planos π_1: $2x + 3y - z = 3$ y π_2: $-4x - 6y + 2z = 8$ son paralelos ya que $\mathbf{n}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{n}_2 = -4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = -2\mathbf{n}_1$ (y $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$). ◆

$-4 - 6 + 2 = -2(2, 3, -1)$

Si dos planos no son paralelos, entonces se intersectan en una línea recta.

EJEMPLO 9 **Puntos de intersección de planos** Encuentre todos los puntos de intersección de los planos $2x - y - z = 3$ y $x + 2y + 3z = 7$.

† Observe que dos planos paralelos pueden ser coincidentes. Por ejemplo, los planos $x + y + z = 1$ y $2x + 2y + 2z$ $= 2$ son coincidentes (son el mismo).

Solución Las coordenadas de cualquier punto (x, y, z) sobre la recta de intersección de estos dos planos deben satisfacer las ecuaciones $x + 2y + 3z = 7$ y $2x - y - z = 3$. Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas mediante reducción por renglones, se obtiene sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -7 & -11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{5}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{11}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{11}{5} \end{array}\right)$$

Por lo tanto, $y = \frac{11}{5} - (\frac{7}{5})z$ y $x = \frac{13}{5} - (\frac{1}{5})z$. Por último, con $z = t$, se obtiene una representación paramétrica de la recta de intersección: $x = \frac{13}{5} - \frac{1}{5}t$, $y = \frac{11}{5} - \frac{7}{5}t$ y $z = t$. ✦

A partir del teorema 2*vi*), en la página 263, se puede derivar un hecho interesante.

Si **w** está en el plano de **u** y **v**, entonces **w** es perpendicular a **u** × **v**, lo que significa que **w** · (**u** × **v**) = 0. Inversamente, si (**u** × **v**) · **w** = 0, entonces **w** es perpendicular a (**u** × **v**) de manera que **w** se encuentra en el plano determinado por **u** y **v**. Se concluye que

> Tres vectores **u**, **v** y **w** son coplanares si y sólo si su producto triple escalar es cero.

PROBLEMAS 3.5

Autoevaluación

I. La recta que pasa por los puntos (1, 2, 4) y (5, 10, 15) satisface la ecuación _____.

a. $(x, y, z) = (1, 2, 4) + t(4, 8, 11)$

b. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-4}{11}$

c. $(x, y, z) = (5, 10, 15) + s(4, 8, 11)$

d. $\frac{x-5}{4} = \frac{y-10}{8} = \frac{z-15}{11}$

II. La recta que pasa por el punto (7, 3, −4) y es paralela al vector **i** + 5**j** + 2**k** satisface la ecuación _____.

a. $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+4}{2}$

b. $(x, y, z) = (1, 5, 2) + t(7, 3, -4)$

c. $\frac{x-7}{8} = \frac{y-3}{8} = \frac{z+4}{-2}$

d. $(x, y, z) = (7, 3, -4) + s(8, 8, -2)$

III. La ecuación vectorial $(x, y, z) - (3, 5, -7) = t(-1, 4, 8)$ describe _____.

a. la recta que pasa por (−1, 4, 8) y es paralela a 3**i** + 5**j** − 7**k**

b. la recta que pasa por (−3, −5, 7) y es paralela a −**i** + 4**j** + 8**k**

c. la recta que pasa por (3, 5, −7) y es perpendicular a −**i** + 4**j** + 8**k**

d. la recta que pasa por (3, 5, −7) y es paralela a −**i** + 4**j** + 8**k**

IV. El plano que pasa por (5, –4, 3) que es ortogonal a **j** satisface _____.
   a. $y = -4$
   b. $(x-5)+(z-3)=0$
   c. $x+y+z=4$
   d. $5x-4y+3z=-4$

V. El plano que pasa por (5, –4, 3) que es ortogonal a **i** + **j** + **k** satisface _____.
   a. $y = -4$
   b. $(x-5)/1=(y+4)/1=(z-3)/1$
   c. $x+y+z=4$
   d. $5x-4y+3z=-4$

VI. El vector _____ es ortogonal al plano que satisface $2(x-3)-3(y+2)+5(z-5)=0$.
   a. $-3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-5\mathbf{k}$
   b. $2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$
   c. $(2-3)\mathbf{i}+(-3+2)\mathbf{j}+(5-5)\mathbf{k}$
   d. $(2)(-3)\mathbf{i}+(-3)(2)\mathbf{j}+(5)(-5)\mathbf{k}$

VII. El plano que satisface $6x+18y-12z=17$ es _____ al plano $-5x-15y+10z=29$.
   a. idéntico
   b. paralelo
   c. ortogonal
   d. ni paralelo ni ortogonal

En los problemas 1 al 14 encuentre una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las simétricas de la recta indicada.

1. Contiene a (2, 1, 3) y (1, 2, –1)
2. Contiene a (1, –1, 1) y (–1, 1, –1)
3. Contiene a (–4, 1, 3) y (–4, 0, 1)
4. Contiene a (2, 3, –4) y (2, 0, –4)
5. Contiene a (1, 2, 3) y (3, 2, 1)
6. Contiene a (7, 1, 3) y (–1, –2, 3)
7. Contiene a (2, 2, 1) y es paralela a $2\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$
8. Contiene a (–1, –6, 2) y es paralela a $4\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$
9. Contiene a (–1, –2, 5) y es paralela a $-3\mathbf{j}+7\mathbf{k}$
10. Contiene a (–2, 3, –2) y es paralela a $4\mathbf{k}$
11. Contiene a (a, b, c) y es paralela a $d\mathbf{i}+e\mathbf{j}$
12. Contiene a (a, b, c) y es paralela a $d\mathbf{k}$

Respuestas a la autoevaluación

I. a, b, c, d **II.** a **III.** d **IV.** a **V.** c **VI.** b **VII.** b

13. Contiene a $(4, 1, -6)$ y es paralela a $(x-2)/3 = (y+1)/6 = (z-5)/2$

14. Contiene a $(3, 1, -2)$ y es paralela a $(x+1)/3 = (y+3)/2 = (z-2)/(-4)$

15. Sea L_1 la recta dada por

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$$

y sea L_2 la recta dada por

$$\frac{x-x_1}{a_2} = \frac{y-y_1}{b_2} = \frac{z-z_1}{c_2}$$

Demuestre que L_1 es ortogonal a L_2 si y sólo si $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

16. Demuestre que las rectas

$$L_1\text{:}\ \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{y} \quad L_2\text{:}\ \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2}$$

son ortogonales.

17. Demuestre que las rectas

$$L_1\text{:}\ \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+3}{3} \quad \text{y} \quad L_2\text{:}\ \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-8}{9}$$

son paralelas.

La rectas en $\mathbb{R}^3$ que no tienen la misma dirección no necesitan tener un punto en común.

18. Demuestre que las rectas L_1: $x = 1 + t, y = -3 + 2t, z = -2 - t$ y L_2: $x = 17 + 3s, y = 4 + s, z = -8 - s$ tienen el punto $(2, -1, -3)$ en común.

19. Demuestre que las rectas L_1: $x = 2 - t, y = 1 + t, z = -2t$ y L_2: $x = 1 + s, y = -2s, z = 3 + 2s$ *no* tienen un punto en común.

20. Sea L dada en forma vectorial $\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + t\mathbf{v}$. Encuentre un número t tal que $\overrightarrow{0R}$ sea perpendicular a $\mathbf{v}$.

21. Utilice el resultado del problema 20 para encontrar la distancia entre la recta L (que contiene a P y es paralela a $\mathbf{v}$) y el origen cuando

a. $P = (2, 1, -4)$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
b. $P = (1, 2, -3)$; $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$
c. $P = (-1, 4, 2)$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

En los problemas 22 al 25 encuentre una recta L ortogonal a las dos rectas dadas y que pase por el punto dado.

22. $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{-5}$; $\frac{x-3}{7} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-8}{3}$; $(1, -3, 2)$

23. $\frac{x-2}{-4} = \frac{y+3}{-7} = \frac{z+1}{3}$; $\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+3}{-2}$; $(-4, 7, 3)$

24. $x = 3 - 2t, y = 4 + 3t, z = -7 + 5t$; $x = -2 + 4s, y = 3 - 2s, z = 3 + s$; $(-2, 3, 4)$

25. $x = 4 + 10t, y = -4 - 8t, z = 3 + 7t$; $x = -2t, y = 1 + 4t, z = -7 - 3t$; $(4, 6, 0)$

***26.** Calcule la distancia entre las rectas

$$L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-4}{-4} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+2}{1}$$

[*Sugerencia:* la distancia se mide a lo largo del vector **v** que es perpendicular a L_1 y a L_2. Sea P un punto en L_1 y Q un punto en L_2. Entonces la longitud de la proyecció de $\overrightarrow{PQ}$ sobre **v** es la distancia entre las rectas, medida a lo largo del vector que es perpendicular a ambas.]

***27.** Encuentre la distancia entre las rectas

$$L_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z-2}{4} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{1}$$

En los problemas 28 al 41 encuentre la ecuación del plano.

28. $P = (0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = \mathbf{i}$

29. $P = (0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = \mathbf{j}$

30. $P = (0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = \mathbf{k}$

31. $P = (1, 2, 3)$; $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

32. $P = (1, 2, 3)$; $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

33. $P = (1, 2, 3)$; $\mathbf{n} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

34. $P = (2, -1, 6)$; $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

35. $P = (-4, -7, 5)$; $\mathbf{n} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$

36. $P = (-3, 11, 2)$; $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

37. $P = (3, -2, 5)$; $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

38. Contiene a $(1, 2, -4)$, $(2, 3, 7)$ y $(4 -1, 3)$

39. Contiene a $(-7, 1, 0)$, $(2, -1, 3)$ y $(4, 1, 6)$

40. Contiene a $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$

41. Contiene a $(2, 3, -2)$, $(4, -1, -1)$ y $(3, 1, 2)$

Dos planos son **ortogonales** si sus vectores normales son ortogonales. En los problemas 42 al 4 determine si los planos dados son paralelos, ortogonales, coincidentes (es decir, el mismo) ninguno de los anteriores.

42. π_1: $x + y + z = 2$; π_2: $2x + 2y + 2z = 4$

43. π_1: $x - y + z = 3$; π_2: $-3x + 3y - 3z = -9$

44. π_1: $2x - y + z = 3$; π_2: $x + y - z = 7$

45. π_1: $2x - y + z = 3$; π_2: $x + y + z = 3$

46. π_1: $3x - 2y + 7z = 4$; π_2: $-2x + 4y + 2z = 16$

En los problemas 47 al 49 encuentre la ecuación del conjunto de todos los puntos de intersecci de los dos planos.

47. π_1: $x - y + z = 2$; π_2: $2x - 3y + 4z = 7$

48. π_1: $3x - y + 4z = 3$; π_2: $-4x - 2y + 7z = 8$

49. π_1: $-2x - y + 17z = 4$; π_2: $2x - y - z = -7$

***50.** Sea π un plano, P un punto sobre el plano, **n** un vector normal al plano y Q un punto fu del plano (vea la figura 3.42). Demuestre que la distancia perpendicular D de Q al pl está dada por

$$D = |\text{proy}_{\mathbf{n}}\, \overrightarrow{PQ}| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$$

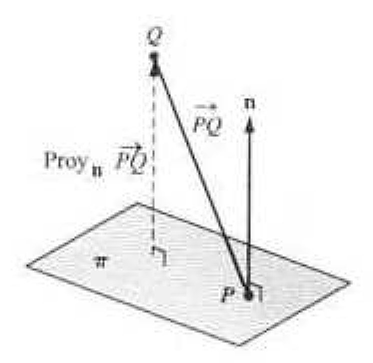


Figura 3.42

En los problemas 51 al 53 encuentre la distancia del punto dado al plano dado.

51. $(4, 0, 1)$; $2x - y + 8z = 3$

52. $(-7, -2, -1)$; $-2x + 8z = -5$

53. $(-3, 0, 2)$; $-3x + y + 5z = 0$

54. Pruebe que la distancia entre el plano $ax + by + cz = d$ y el punto (x_0, y_0, z_0) está dada por

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

El **ángulo entre dos planos** está definido como el ángulo agudo† entre sus vectores normales. En los problemas 55 al 57 encuentre el ángulo entre los dos planos

55. Los dos planos del problema 47

56. Los dos planos del problema 48

57. Los dos planos del problema 49

***58.** Sean **u** y **v** dos vectores no paralelos diferentes de cero en un plano π. Demuestre que si **w** es cualquier otro vector en π, entonces existen escalares α y β tales que $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$. Esto se llama **representación paramétrica** del plano π. [*Sugerencia:* dibuje un paralelogramo en el que $\alpha\mathbf{u}$ y $\beta\mathbf{v}$ formen lados adyacentes y el vector diagonal sea **w**.]

***59.** Tres vectores **u**, **v** y **w** se llaman **coplanares** si están todos en el mismo plano π. Demuestre que si **u**, **v** y **w** pasan todos a través del origen, entonces son coplanares si y sólo si el triple producto escalar es igual a cero: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$.

En los problemas 60 al 64 determine si los tres vectores de posición dados (es decir, con punto inicial en el origen) son coplanares. Si lo son, encuentre la ecuación del plano que los contiene.

60. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $\mathbf{w} = 9\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

61. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

62. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

63. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$; $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$

64. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; $\mathbf{w} = 6\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

† Recuerde que un ángulo agudo α es un ángulo entre 0 y 90°; es decir, $\alpha \in (0, \pi/2)$.

RESUMEN

- El **segmento de recta dirigido** que se extiende de P a Q en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, denotado por $\overrightarrow{PQ}$ es el segmento de recta que va de P a Q. (pp. 227, 252)
- Dos segmentos de recta dirigidos en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ son **equivalentes** si tienen la misma magnitud (longitud) y dirección. (pp. 228, 252)
- ***Definición geométrica de un vector***
  Un **vector** en $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) es el conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos en $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) equivalentes a un segmento de recta dirigido dado. Una representación de un vector tiene su punto inicial en el origen y se denota por $\overrightarrow{0R}$. (pp. 228, 252)
- ***Definición algebraica de un vector***
  Un **vector v** en el plano xy ($\mathbb{R}^2$) es un par ordenado de números reales (a, b). Los números a y b se llaman **componentes** del vector **v**. El **vector cero** es el vector $(0, 0)$. En $\mathbb{R}^3$, un vector **v** es una **terna ordenada** de números reales (a, b, c). El **vector cero** en $\mathbb{R}^3$ es el vector $(0, 0, 0)$. (pp. 229, 252)
- Las definiciones geométrica y algebraica de un vector en $\mathbb{R}^2$ [$\mathbb{R}^3$] se relacionan de la siguiente manera: si $\mathbf{v} = (a, b)$ [(a, b, c)], entonces una representación de **v** es $\overrightarrow{0R}$, donde $R = (a, b)$ [$R = (a, b, c)$]. (p. 229)
- Si $\mathbf{v} = (a, b)$, entonces la **magnitud de v**, denotada por $|\mathbf{v}|$, está dada por $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si $\mathbf{v} = (a, b, c)$, entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. (pp. 229, 252)
- Si **v** es un vector en $\mathbb{R}^2$, entonces la **dirección de v** es el ángulo en $[0, 2\pi)$ que forma cualquier representación de **v** con el lado positivo del eje x. (p. 230)
- ***Desigualdad del triángulo***
  En $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ (p. 233)
  $$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$$
- En $\mathbb{R}^2$ sean $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$; entonces $\mathbf{v} = (a, b)$ se puede escribir como $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. (p. 234)
- En $\mathbb{R}^3$ sean $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$; entonces $\mathbf{v} = (a, b, c)$ se puede escribir como (p. 257)
  $$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$
- Un **vector unitario u** en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ es un vector que satisface $|\mathbf{u}| = 1$. En $\mathbb{R}^2$ un vector unitario se puede escribir como (pp. 234, 235)
  $$\mathbf{u} = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$$
  donde θ es la dirección de **u**.
- Sean $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$; entonces el **producto escalar** o **producto punto** de **u** y **v**, denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, está dado por (p.241)
  $$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1a_2 + b_1b_2$$
  Si $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$, entonces
  $$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$
- El **ángulo** φ entre dos vectores **u** y **v** en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ es el único número en $[0, \pi]$ que satisface (pp. 241, 242)
  $$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

- Dos vectores en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ son **paralelos** si el ángulo entre ellos es 0 o π. Son paralelos si uno es un múltiplo escalar del otro. (pp. 243, 257)
- Dos vectores en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ son **ortogonales** si el ángulo entre ellos es $\pi/2$. Son ortogonales si y sólo si su producto escalar es cero. (pp. 243, 244, 257)
- Sean **u** y **v** dos vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. La **proyección** de **u** sobre **v** es un vector, denotado por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$, que está definido por (pp. 245, 258)

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$$

El escalar $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ se llama la **componente** de **u** en la dirección de **v**.

- $\text{Proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$ es paralelo a **v** y $\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$ es ortogonal a **v**. (pp. 246, 258)
- La **dirección** de un vector **v** $\mathbb{R}^3$ es el vector unitario (p. 254)

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

- Si $\mathbf{v} = (a, b, c)$, entonces $\cos \alpha = \frac{a}{|\mathbf{v}|}$, $\cos \beta = \frac{b}{|\mathbf{v}|}$ y $\cos \gamma = \frac{c}{|\mathbf{v}|}$ se llaman **cosenos directores** de **v**. (p. 255)
- Sea $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}$. Entonces el **producto cruz** o **producto vectorial** de **u** y **v**, denotado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, está dado por: (pp. 261, 262)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

- ***Propiedades del producto cruz*** (p. 263)

  i. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
  ii. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.
  iii. $(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.
  iv. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$.
  v. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (el **triple producto escalar**).
  vi. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a **u** como a **v**.
  vii. Si ni **u** ni **v** son el vector cero, entonces **u** y **v** son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

- Si φ es el ángulo entre **u** y **v**, entonces (p. 264)
  $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen} \varphi$ = área del paralelogramo con lados **u** y **v**
- Sean $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ dos puntos sobre una recta L en $\mathbb{R}^3$. Sea $\mathbf{v} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$ y sea $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$ y $c = z_2 - z_1$.

Ecuación vectorial de una recta: $\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + t\mathbf{v}$ (p. 273)

Ecuaciones paramétricas de una recta: (p. 274)

$$x = x_1 + at$$
$$y = y_1 + bt$$
$$z = z_1 + ct$$

Ecuaciones simétricas de una recta: $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$, si a, b y c son diferentes de cero (p. 274)

- Sea P un punto en $\mathbb{R}^3$ y sea **n** un vector dado diferente de cero; entonces el conjunto de todos los puntos Q para los que $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$ constituye un plano en $\mathbb{R}^3$. El vector **n** se llama **vector normal** al plano. (p. 276)
- Si $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ y $P = (x_0, y_0, z_0)$, entonces la ecuación del plano se puede escribir (p. 276)

$$ax + by + cz = d$$

donde

$$d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \overrightarrow{0P} \cdot \mathbf{n}$$

- El **plano** xy tiene la ecuación $z = 0$; el **plano** xz tiene la ecuación $y = 0$; el **plano** yz tiene la ecuación $x = 0$ (p. 277)
- Dos planos son **paralelos** si sus vectores normales son paralelos. Si los dos planos no son paralelos, entonces se intersectan en una línea recta. (p. 280)

EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 al 6 encuentre la magnitud y dirección del vector dado.

1. $\mathbf{v} = (3, 3)$
2. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
3. $\mathbf{v} = (2, -2\sqrt{3})$
4. $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, 1)$
5. $\mathbf{v} = -12\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$
6. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

En los ejercicios 7 al 10 escriba el vector **v**, representado por $\overrightarrow{PQ}$, en la forma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Bosqueje $\overrightarrow{PQ}$ y **v**.

7. $P = (2, 3)$; $Q = (4, 5)$
8. $P = (1, -2)$; $Q = (7, 12)$
9. $P = (-1, -6)$; $Q = (3, -4)$
10. $P = (-1, 3)$; $Q = (3, -1)$

11. Sea $\mathbf{u} = (2, 1)$ y $\mathbf{v} = (-3, 4)$. Encuentre a) $5\mathbf{u}$; b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$; c) $-8\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$.

12. Sea $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Encuentre a) $-3\mathbf{v}$; b) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; c) $3\mathbf{u} - 6\mathbf{v}$.

En los ejercicios 13 al 19 encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.

13. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
14. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$
15. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
16. $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
17. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
18. $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
19. $\mathbf{v} = a\mathbf{i} - a\mathbf{j}$

20. Si $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, encuentre sen θ y cos θ, donde θ es la dirección de **v**.

21. Encuentre un vector unitario con la dirección opuesta a $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

22. Encuentre dos vectores unitarios ortogonales a $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$.

23. Encuentre un vector unitario con la dirección opuesta a la de $\mathbf{v} = 10\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$.

En los ejercicios 24 al 27 encuentre un vector **v** que tenga la magnitud y dirección dadas.

24. $|\mathbf{v}| = 2$; $\theta = \pi/3$
25. $|\mathbf{v}| = 1$; $\theta = \pi/2$
26. $|\mathbf{v}| = 4$; $\theta = \pi$
27. $|\mathbf{v}| = 7$; $\theta = 5\pi/6$

En los ejercicios 28 al 31 calcule el producto escalar de los dos vectores y el coseno del ángulo entre ellos.

28. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
29. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = 11\mathbf{j}$
30. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
31. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

En los ejercicios 32 al 37 determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Después bosqueje cada par.

32. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

33. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

34. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

34. $\mathbf{u} = -7\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

36. $\mathbf{u} = -7\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$

37. $\mathbf{u} = -7\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$

38. Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}$. Determine α tal que
- **a.** $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ sean ortogonales.
- **b.** $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ sean paralelos
- **c.** El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ sea $\pi/4$.
- **d.** El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ sea $\pi/6$.

En los ejercicios 39 al 44 calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

39. $\mathbf{u} = 14\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

40. $\mathbf{u} = 14\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

41. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

42. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

43. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$

44. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j}$

45. Sean $P = (3, -2)$, $Q = (4, 7)$, $R = (-1, 3)$ y $S = (2, -1)$. Calcule $\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\,\overrightarrow{RS}$ y $\text{proy}_{\overrightarrow{RS}}\,\overrightarrow{PQ}$.

En los ejercicios 46 al 48 encuentre la distancia entre los dos puntos dados

46. $(4, -1, 7)$; $(-5, 1, 3)$

47. $(-2, 4, -8)$; $(0, 0, 6)$

48. $(2, -7, 0)$; $(0, 5, -8)$

En los ejercicios 49 al 51 encuentre la magnitud y los cosenos directores del vector dado

49. $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$

50. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

51. $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

52. Encuentre un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{PQ}$, donde $P = (3, -1, 2)$ y $Q = (-4, 1, 7)$.

53. Encuentre un vector unitario cuya dirección sea opuesta a la de $\overrightarrow{PQ}$, donde $P = (1, -3, 0)$ y $Q = (-7, 1, -4)$.

En los ejercicios 54 al 61 sean $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Calcule

54. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

55. $3\mathbf{v} + 5\mathbf{w}$

56. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{w}$

57. $\text{proy}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{u}$

58. $2\mathbf{u} - 4\mathbf{v} + 7\mathbf{w}$

59. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$

60. El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$

61. El ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$

En los ejercicios 62 al 65 encuentre el producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

62. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$

63. $\mathbf{u} = 7\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$

64. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

65. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

66. Encuentre dos vectores unitarios ortogonales a $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

67. Calcule el área del paralelogramo con vértices adyacentes $(1, 4, -2)$, $(-3, 1, 6)$ y $(1, -2, 3)$.

En los ejercicios 68 al 71 encuentre una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las simétricas de la recta dada.

68. Contiene a (3, −1, 4) y (−1, 6, 2)

69. Contiene a (−4, 1, 0) y (3, 0, 7)

70. Contiene a (3, 1, 2) y es paralela a $3\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

71. Contiene a (1, −2, −3) y es paralela a $(x + 1)/5 = (y - 2)/(-3) = (z - 4)/2$

72. Demuestre que las rectas L_1: $x = 3 - 2t, y = 4 + t, z = -2 + 7t$ y L_2: $x = -3 + s, y = 2 - 4s, z = 1 + 6s$ no tienen puntos en común.

73. Encuentre la distancia del origen a la recta que pasa por el punto (3, 1, 5) y que tiene la dirección de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

74. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por (−1, 2, 4) y es ortogonal a L_1: $(x - 1)/4 = (y + 6)/3 = z/(-2)$ y L_2: $(x + 3)/5 = (y - 1)/1 = (z + 3)/4$.

En los ejercicios 75 al 77 encuentre la ecuación del plano que contiene al punto dado y es ortogonal al vector normal dado.

75. $P = (1, 3, -2)$; $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

76. $P = (1, -4, 6)$; $\mathbf{n} = 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

77. $P = (-4, 1, 6)$; $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

78. Encuentre la ecuación del plano que contiene a los puntos (−2, 4, 1), (3, −7, 5) y (−1, −2, −1).

79. Encuentre todos los puntos de intersección del plano π_1: $-x + y + z = 3$ y π_2: $-4x + 2y - 7z = 5$.

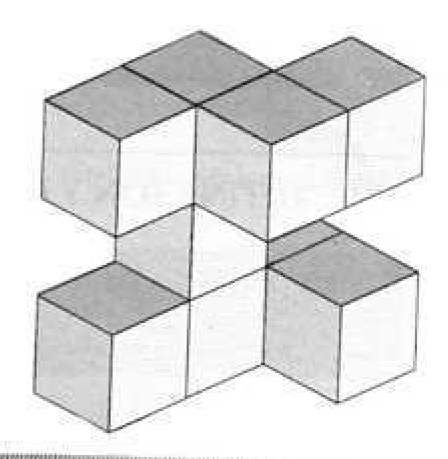
80. Encuentre todos los puntos de intersección de los planos π_1: $-4x + 6y + 8z = 12$ y π_2: $2x - 3y - 4z = 5$.

81. Encuentre todos los puntos de intersección de los planos π_1: $3x - y + 4z = 8$ y π_2: $-3x - y - 11z = 0$.

82. Encuentre la distancia desde (1, −2, 3) al plano $2x - y - z = 6$

83. Encuentre el ángulo entre los planos del ejercicio 79.

84. Demuestre que los vectores de posición $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = 9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ son coplanares y encuentre la ecuación del plano que los contiene.



4

Espacios vectoriales

4.1 INTRODUCCIÓN

Como se vio en el capítulo anterior, los conjuntos $\mathbb{R}^2$ (vectores en el plano) y $\mathbb{R}^3$ (vectores en el espacio) cuentan con muchas propiedades interesantes. Se puede sumar dos vectores en $\mathbb{R}^2$ y obtener otro vector en $\mathbb{R}^2$. Bajo la suma, los vectores en $\mathbb{R}^2$ obedecen las leyes conmutativa y asociativa. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ y $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Se puede multiplicar vectores en $\mathbb{R}^2$ por escalares y obtener las leyes distributivas. Las mismas propiedades se cumplen en $\mathbb{R}^3$.

Los conjuntos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ junto con las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar se llaman *espacios vectoriales*. De manera intuitiva, se puede decir que un espacio vectorial es un conjunto de objetos junto con dos operaciones que obedecen las reglas que acaban de escribirse.

En este capítulo se hará un cambio, en apariencia grande, del mundo concreto de la solución de ecuaciones y el manejo sencillo de los vectores que se pueden visualizar al mundo abstracto de los espacios vectoriales arbitrarios. Existe una ventaja en esto. Una vez que se establecen los hechos sobre los espacios vectoriales en general, se pueden aplicar estos hechos a *todos* los espacios vectoriales. De otra manera, tendría que probarse cada hecho una y otra vez, para cada nuevo espacio vectorial que nos encontráramos (y existe un sin fin de ellos). Pero como se verá, muchos de los teoremas abstractos que se demostrarán en realidad no son más difíciles que los que ya se ha estudiado.

4.2 DEFINICIÓN Y PROPIEDADES BÁSICAS

DEFINICIÓN 1 **Espacio vectorial real** Un **espacio vectorial real** V es un conjunto de objetos, llamados **vectores**, junto con dos operaciones llamadas **suma** y **multiplicación por un escalar** que satisfacen los diez axiomas enumerados a continuación.

Notación. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V y si α es un número real, entonces la suma se escribe como $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ y el producto escalar de α y $\mathbf{x}$ como $\alpha\mathbf{x}$.

Antes de dar la lista de las propiedades que satisfacen los vectores en un espacio vectorial deben mencionarse dos cosas. Primero, mientras que puede ayudar pensar en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ al manejar un espacio vectorial, con frecuencia ocurre que el espacio vectorial parece ser muy diferente a estos cómodos espacios. (Esto se verá en breve.) Segundo, la definición 1 da una definición de un espacio vectorial *real*. La palabra "real" significa que los escalares que se usan son números reales. Sería igual de sencillo definir un espacio vectorial *complejo* usando números complejos en lugar de reales. Este libro está dedicado principalmente a espacios vectoriales reales, pero las generalizaciones a otros conjuntos de escalares presenta muy poca dificultad.

AXIOMAS DE UN ESPACIO VECTORIAL

i. Si $\mathbf{x} \in V$ y $\mathbf{y} \in V$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ **(cerradura bajo la suma)**.

ii. Para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ en V, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
(ley asociativa de la suma de vectores).

iii. Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que para todo $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$
(el $\mathbf{0}$ se llama **vector cero** o **idéntico aditivo**).

iv. Si $\mathbf{x} \in V$, existe un vector $-\mathbf{x}$ en V tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
($-\mathbf{x}$ se llama **inverso aditivo** de $\mathbf{x}$).

v. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
(ley conmutativa de la suma de vectores).

vi. Si $\mathbf{x} \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha\mathbf{x} \in V$
(cerradura bajo la multiplicación por un escalar).

vii. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$
(primera ley distributiva).

viii. Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$
(segunda ley distributiva).

ix. Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$
(ley asociativa de la multiplicación por escalares).

x. Para cada vector $\mathbf{x} \in V$, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Nota. No es difícil demostrar que el idéntico aditivo y el inverso aditivo en un espacio vectorial son únicos (vea los problemas 21 y 22).

EJEMPLO 1 **El espacio $\mathbb{R}^n$** Sea $V = \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n \right\}$.

Cada vector en $\mathbb{R}^n$ es una matriz de $n \times 1$. Según la definición de suma de matrices dada en la página 51, $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ es una matriz de $n \times 1$ si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son matrices de $n \times 1$. Haciendo

$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ y $-\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$, se ve que los axiomas *ii*) a *x*) se obtienen de la definición de suma de vectores (matrices) y el teorema 1.5.1 en la página 53.

Nota. Los vectores en $\mathbb{R}^n$ se pueden escribir indistintamente como vectores renglón o vectores columna. ◆

EJEMPLO 2 **Un espacio vectorial trivial** Sea $V = \{0\}$. Es decir, V consiste sólo en el número 0. Como $0 + 0 = 1 \cdot 0 = 0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0 = 0$, se ve que V es un espacio vectorial. Con frecuencia se le da el nombre de espacio vectorial **trivial**. ◆

EJEMPLO 3 **Un conjunto que no es un espacio vectorial** Sea $V = \{1\}$. Es decir, V consiste sólo en el número 1. Éste *no* es un espacio vectorial ya que viola el axioma *i*) — el axioma de cerradura. Para ver esto, basta con observar que $1 + 1 = 2 \notin V$. También viola otros axiomas, sin embargo, con sólo demostrar que viola al menos uno de los diez axiomas queda probado que V no es un espacio vectorial. ◆

Nota. Verificar los diez axiomas puede ser tedioso. En adelante se verificarán sólo aquellos axiomas que no son obvios.

EJEMPLO 4 **El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que están en una recta que pasa por el origen constituye un espacio vectorial** Sea

$V = \{(x, y): y = mx$, donde m es un número real fijo y x es un número real arbitrario$\}$.

Es decir, V consiste en todos los puntos que están sobre la recta $y = mx$ que pasa por el origen y tiene pendiente m. Para demostrar que V es un espacio vectorial, se puede verificar que se cumple cada uno de los axiomas. Observe que los vectores en $\mathbb{R}^2$ se han escrito como renglones en lugar de columnas que en esencia es lo mismo.

i. Suponga que $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{y} = (x_2, y_2)$ están en V. Entonces $y_1 = mx_1$, $y_2 = mx_2$, y

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1, mx_1)+(x_2, mx_2)=(x_1+x_2, mx_1+mx_2)$$
$$=(x_1+x_2, m(x_1+x_2)) \in V$$

Por lo tanto se cumple el axioma *i*).

ii. Suponga que $(x, y) \in V$. Entonces $y = mx$ y $-(x, y) = -(x, mx) = (-x, m(-x))$, de manera que $-(x, y)$ también pertenece a V y $(x, mx) + (-x, m(-x)) = (x - x, m(x - x)) = (0, 0)$.

Todo vector en V es un vector en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial, como se muestra en el ejemplo 1. Como $(0, 0) = \mathbf{0}$ está en V (explique por qué) todas las demás propiedades se deducen del ejemplo 1. Entonces V es un espacio vectorial. ◆

EJEMPLO 5 **El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que están sobre una recta que no pasa por el origen no constituye un espacio vectorial** Sea $V = \{(x, y): y = 2x + 1, x \in \mathbb{R}\}$. Es decir, V es el conjunto de puntos que están sobre la recta $y = 2x + 1$. V *no* es un espacio vectorial porque no se cumple la cerradura bajo la suma, como en el ejemplo 3. Para ver esto, suponga que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) están en V. Entonces,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Si el vector del lado derecho estuviera en V, se tendría

$$y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) + 1 = 2x_1 + 2x_2 + 1$$

Pero $y_1 = 2x_1 + 1$ y $y_2 = 2x_2 + 1$ de manera que

$$y_1 + y_2 = (2x_1 + 1) + (2x_2 + 1) = 2x_1 + 2x_2 + 2$$

Por lo tanto, se concluye que

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \notin V \quad \text{si } (x_1, y_1) \in V \text{ y } (x_2, y_2) \in V$$

Por ejemplo, (0,1) y (3, 7) están en V, pero $(0, 1) + (3, 7) = (3, 8)$ no está en V porque $8 \neq 2 \cdot 3 + 1$. Una forma más sencilla de ver que V no es un espacio vectorial es observar que $\mathbf{0} = (0, 0)$ no está en V porque $0 \neq 2 \cdot 0 + 1$. No es difícil demostrar que el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ qué está sobre cualquier recta que no pasa por (0, 0) no constituye un espacio vectorial. ◆

EJEMPLO 6 **El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que está en un plano que pasa por el origen constituye un espacio vectorial** Sea $V = \{(x, y, z): ax + by + cz = 0\}$. Esto es, V es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que está en el plano con vector normal (a, b, c) y que pasa por el origen. Como en el ejemplo 4, los vectores se escriben como renglones en lugar de columnas.

Suponga que (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) están en V. Entonces $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in V$ porque

$$a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2)$$
$$= (ax_1 + by_1 + cz_1) + (ax_2 + by_2 + cz_2) = 0 + 0 = 0$$

Por lo tanto el axioma *i*) se cumple. Los otros axiomas se verifican fácilmente. Así, el conjunto de puntos que está en un plano en $\mathbb{R}^3$, que pasa por el origen, constituye un espacio vectorial. ◆

EJEMPLO 7 **El espacio vectorial P_n** Sea $V = P_n$, el conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a n.† Si $p \in P_n$, entonces

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde cada a_i es real. La suma de $p(x) + q(x)$ está definida de la manera usual: si $q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, entonces

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Es claro que la suma de dos polinomios de grado menor o igual a n es otro polinomio de grado menor o igual a n, por lo que se cumple el axioma *i*). Las propiedades *ii*) y *v*) a *x*) son obvias. Si se define el polinomio $\mathbf{0} = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x + 0$, entonces claramente $\mathbf{0} \in P_n$ y el axioma *iii*) se cumple. Por último, sea $-p(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$, se ve que el axioma *iv*) se cumple, con lo que P_n es un espacio vectorial real. ◆

EJEMPLO 8 **Los espacios vectoriales $C[0, 1]$ y $C[a, b]$** Sea $V = C[0, 1]$ = el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas en el intervalo $[0, 1]$. Se define

Cálculo

$$(f + g)x = f(x) + g(x) \quad \text{y} \quad (\alpha f)(x) = \alpha[f(x)]$$

Como la suma de funciones continuas es continua, el axioma *i*) se cumple y los otros axiomas se verifican fácilmente con $\mathbf{0}$ = la función cero y $(-f)(x) = -f(x)$. De igual manera, $C[a, b]$, el conjunto de funciones de valores reales definidas y continuas en $[a, b]$, constituye un espacio vectorial. ◆

EJEMPLO 9 **El espacio vectorial M_{34}** Si $V = M_{34}$ denota el conjunto de matrices de 3×4 con componentes reales, entonces con la suma de matrices y multiplicación por un escalar usuales, es de nuevo sencillo verificar que M_{34} es un espacio vectorial con $\mathbf{0}$ como la matriz cero de 3×4. Si $A = (a_{ij})$ está en M_{34}, entonces $-A = (-a_{ij})$ también está en M_{34}. ◆

EJEMPLO 10 **El espacio vectorial M_{mn}** En forma idéntica se puede ver que M_{mn}, el conjunto de matrices de $m \times n$ con componentes reales, forma un espacio vectorial para cualesquiera enteros positivos m y n. ◆

EJEMPLO 11 **Un conjunto de matrices invertibles puede no formar un espacio vectorial** Sea S_3 el conjunto de matrices invertibles de 3×3. Se define la "suma" $A \oplus B$ por $A \oplus B = AB$.§ Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible (por el teorema 1.8.3, página 100) de manera que el axioma *i*) se cumple. El axioma *ii*) es sencillamente la ley asociativa para la multiplicación de matrices (teorema 1.6.2, página 68); los axiomas *iii*) y *iv*) se satisfacen con $\mathbf{0} = I_3$ y $-A = A^{-1}$. Sin embargo, $AB \neq BA$ en general (vea la página 66), entonces el axioma *v*) no se cumple y por lo tanto S_3 no es un espacio vectorial. ◆

---

† Se dice que las funciones constantes (incluyendo la función $f(x) = 0$) son polinomios de **grado cero**.

Cálculo Este símbolo se usa en todo el libro para indicar que el problema o ejemplo utiliza conceptos de cálculo.

§ Se usa un signo más encirculado para evitar confusión con el signo más normal que denota la suma de matrices.

EJEMPLO 12 **Un conjunto de puntos en un semiplano puede no formar un espacio vectorial** Sea $V = \{(x, y): y \geq 0\}$. V consiste en los puntos en $\mathbb{R}^2$ en el semiplano superior (los primeros dos cuadrantes). Si $y_1 \geq 0$ y $y_2 \geq 0$, entonces $y_1 + y_2 \geq 0$; así, si $(x_1, y_1) \in V$ y $(x_2, y_2) \in V$, entonces $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in V$. Sin embargo, V no es un espacio vectorial ya que el vector (1, 1), por ejemplo, no tiene un inverso en V porque $(-1, -1) \notin V$. Más aun, el axioma *vi*) falla, ya que si $(x, y) \in V$, entonces $\alpha(x, y) \notin V$ si $\alpha < 0$.

EJEMPLO 13 **El espacio $\mathbb{C}^n$** Sea $V = \mathbb{C}^n = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n): c_i$ es un número complejo para $i = 1, 2, \ldots, n\}$ y el conjunto de escalares es el conjunto de números complejos. No es difíc verificar que $\mathbb{C}^n$, también es un espacio vectorial.

Como lo sugieren estos ejemplos, existen muchos tipos diferentes de espaci vectoriales y muchas clases de conjuntos que *no* son espacios vectoriales. Antes d terminar esta sección, se demostrarán algunos resultados sobre los espacios vectoriale

TEOREMA 1 Sea V un espacio vectorial. Entonces

i. $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo escalar α.

ii. $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in V$.

iii. Si $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\alpha = 0$ o $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (o ambos).

iv. $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in V$.

Demostración **i.** Por el axioma *iii*), $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$; y del axioma *vii*),

$$\alpha\mathbf{0} = \alpha(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0}$$

Sumando $-\alpha\mathbf{0}$ en los dos lados de (1) y usando la ley asociativa (axioma *ii*), se obtiene

$$\alpha\mathbf{0} + (-\alpha\mathbf{0}) = [\alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0}] + (-\alpha\mathbf{0})$$
$$\mathbf{0} = \alpha\mathbf{0} + [\alpha\mathbf{0} + (-\alpha\mathbf{0})]$$
$$\mathbf{0} = \alpha\mathbf{0} + \mathbf{0}$$
$$\mathbf{0} = \alpha\mathbf{0}$$

ii. Se usa esencialmente la misma prueba que en la parte *i*). Se comienza con $0 + 0 = 0$ y se usa el axioma *viii*) para ver que $0\mathbf{x} = (0 + 0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x}$ o $0\mathbf{x} + (-0\mathbf{x}) = 0\mathbf{x} + [0\mathbf{x} + (-0\mathbf{x})]$ o $\mathbf{0} = 0\mathbf{x} + \mathbf{0} = 0\mathbf{x}$.

iii. Sea $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si $\alpha \neq 0$, se multiplican ambos lados de la ecuación por $1/\alpha$ para obtener $(1/\alpha)(\alpha\mathbf{x}) = (1/\alpha)\mathbf{0} = \mathbf{0}$ [por la parte *i*)]. Pero $(1/\alpha)(\alpha\mathbf{x}) = 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (por el axioma *ix*), de manera que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

iv. Primero se usa el hecho de que $1 + (-1) = 0$. Después, usando la parte *ii*), se obtiene

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{x} = [1 + (-1)]\mathbf{x} = 1\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x}$$

Se suma $-\mathbf{x}$ en ambos lados de (2) para obtener

$$-\mathbf{x} = \mathbf{0} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) + (-1)\mathbf{x}$$
$$= \mathbf{0} + (-1)\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$$

Así, $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$. Observe que el orden de la suma en la ecuación anterior se pudo invertir usando la ley conmutativa (axioma *v*). ◆

Observación. La parte *iii*) del teorema 1 no es obvia como parece. Existen situaciones familiares en las que $xy = 0$ no implica que x o y sean cero. Como ejemplo, se tiene la multiplicación de matrices de 2 × 2. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en donde ni A ni B son cero y, como se puede verificar, $AB = 0$, la matriz cero.

PROBLEMAS 4.2

Autoevaluación

Falso-verdadero

I. El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ con $y = -3x$ es un espacio vectorial real.

II. El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ con $y = -3x + 1$ es un espacio vectorial real.

III. El conjunto de matrices invertibles de 5 × 5 forma un espacio vectorial (con "+" definido como en la suma matrices ordinaria).

IV. El conjunto de múltiplos constantes de la matriz idéntica de 2 × 2 es un espacio vectorial (con "+" definido como en III).

V. El conjunto de matrices idénticas de $n \times n$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$ es un espacio vectorial (con "+" definido como en III).

VI. El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ con $2x - y - 12z = 0$ es un espacio vectorial real.

VII. El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ con $2x - y - 12z = 1$ es un espacio vectorial real.

VIII. El conjunto de polinomios de grado 3 es un espacio vectorial real (con "+" definido como la suma de polinomios ordinaria).

Respuestas a la autoevaluación

I. V **II.** F **III.** F **IV.** V **V.** F **VI.** V **VII.** F **VIII.** F

En los problemas 1 al 20 determine si el conjunto dado es un espacio vectorial. Si no lo es, ... una lista de los axiomas que no se cumplen.

1. El conjunto de matrices diagonales de $n \times n$ bajo la suma de matrices y multiplicación por un escalar usuales.
2. El conjunto de matrices diagonales de $n \times n$ bajo la multiplicación (es decir, $A \oplus B = AB$).
3. $\{(x, y): y \leq 0; x, y \text{ reales}\}$ con la suma de vectores y multiplicación por un escalar usuales.
4. Los vectores en el plano que está en el primer cuadrante.
5. El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ de la forma (x, x, x).
6. El conjunto de polinomios de grado 4 bajo las operaciones del ejemplo 7.
7. El conjunto de matrices simétricas de $n \times n$ (vea la sección 1.9) bajo la suma y multiplicación por un escalar usuales.
8. El conjunto de matrices de 2×2 que tienen la forma $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ bajo la suma y multiplicación por un escalar usuales.
9. El conjunto de matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ con las operaciones de matrices de suma y multiplicación por un escalar.
10. El conjunto que consiste en un solo vector $(0, 0)$ bajo las operaciones usuales en $\mathbb{R}^2$.
11. El conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con término constante cero.
12. El conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con término constante a_0 positivo.
13. El conjunto de funciones continuas de valores reales definidas en $[0, 1]$ con $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$ bajo las operaciones del ejemplo 8.
14. El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que están sobre una recta que pasa por el origen.
15. El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que están sobre la recta $x = t + 1$, $y = 2t$, $z = t - 1$.
16. $\mathbb{R}^2$ con la suma definida por $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$ y la multiplicación por un escalar ordinaria.
17. El conjunto del problema 16 con la multiplicación por un escalar definida por $\alpha(x, y) = (\alpha + \alpha x - 1, \alpha + \alpha y - 1)$.
18. El conjunto que consiste en un objeto con la suma definida por *objeto* + *objeto* = *objeto* y la multiplicación por un escalar definida por α(*objeto*) = *objeto*.

† **Cálculo** 19. El conjunto de funciones diferenciables definidas en $[0, 1]$ con las operaciones del ejemplo 8.

*20. El conjunto de números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$, Donde a y b son números racionales bajo la suma de números reales usual y la multiplicación por un escalar definida sólo para escalares racionales.

21. Demuestre que en un espacio vectorial el elemento idéntico aditivo es único.
22. Demuestre que en un espacio vectorial todo vector tiene un inverso aditivo único.
23. Si **x** y **y** son vectores en un espacio vectorial V, demuestre que existe un vector único **z** $\in V$ tal que **x** + **z** = **y**.
24. Demuestre que el conjunto de números reales positivos forma un espacio vectorial bajo las operaciones $x + y = xy$ y $\alpha x = x^\alpha$.

---

† **Cálculo** Este símbolo se usa para indicar que el problema o ejemplo usa conceptos de cálculo.

* Cálculo **25.** Considere la ecuación diferencial de segundo orden homogénea

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

Donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas. Demuestre que el conjunto de soluciones de la ecuación es un espacio vectorial bajo las reglas usuales para la suma de funciones y multiplicación por un escalar.

MATLAB 4.2

1. (*Este problema usa el archivo vctrsp.m*) El archivo *vctrsp.m* es una demostración sobre la geometría de algunas propiedades de los espacios vectoriales de vectores en $\mathbb{R}^2$. Dé **help vctrsp** para ver una descripción.

Introduzca los vectores **x**, **y** y **z** dados enseguida y después dé el comando **vctrsp(x,y,z)**. La demostración ilustrará la geometría de las propiedades conmutativa y asociativa de la suma de vectores y de la propiedad distributiva de la multiplicación por un escalar sobre la suma de vectores. Cuando le pidan que dé un valor escalar para a ("*input a scalar value for a*") dé sólo el valor de a (SIN espacios) y oprima la tecla "enter".

a. **x** = [3;0], **y** = [2;2], **z** = [−2;4]. Use $a = 2$, $a = \frac{1}{2}$ y $a = -2$.

b. **x** = [−5;5], **y** = [0;−4], **z** = [4,4]. Use $a = 2$, $a = \frac{1}{3}$ y $a = -\frac{3}{2}$.

c. Su propia elección de **x**, **y**, **z** y/o a.

2. **a.** Elija algunos valores para n y m y genere tres matrices aleatorias de $n \times m$, llamadas X, Y y Z. Genere dos escalares aleatorios a y b. (Por ejemplo, **a = 2*rand(1)–1**.) Verifique todas las propiedades del espacio vectorial para estas matrices y escalares. Para demostrar $A = B$, demuestre que $A - B = 0$; para la propiedad *iii*) decida cómo generar el idéntico aditivo para matrices de $n \times m$.) Repita para otros tres juegos de X, Y, Z, a y b (para las mismas n y m).

b. (*Lápiz y papel*) Pruebe las propiedades del espacio vectorial para M_{nm}, las matrices de $n \times m$.

c. (*Lápiz y papel*) ¿Cuál es la diferencia entre los incisos a) y b)?

4.3 SUBESPACIOS

Del ejemplo 4.2.1, página 293, se sabe que $\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \text{ y } y \in \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial. En el ejemplo 4.2.4, página 293, se vió que $V = \{(x, y): y = mx\}$ también es un espacio vectorial. Además, es evidente que $V \subset \mathbb{R}^2$. Esto es, $\mathbb{R}^2$ tiene un subconjunto que también es un espacio vectorial. De hecho, todos los espacios vectoriales tiene subconjuntos que también son espacios vectoriales. En esta sección se examinarán estos importantes subconjuntos.

DEFINICIÓN 1 **Subespacio** Sea H un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V y suponga que H es en sí un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en V. Entonces se dice que H es un **subespacio** de V.

Se puede decir que el subespacio H **hereda** las operaciones del espacio vectorial "padre" V.

Se cuenta con muchos ejemplos de subespacios en este capítulo, pero primero se demostrará un resultado que hace relativamente sencillo determinar si un subconjunto de V es en realidad un subespacio de V.

TEOREMA 1 Un subconjunto no vacío H de un espacio vectorial V es un subespacio de V si se cumplen las dos reglas de cerradura:

Reglas de cerradura para ver si un subconjunto no vacío es un subespacio

i. Si $\mathbf{x} \in H$ y $\mathbf{y} \in H$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in H$.

ii. Si $\mathbf{x} \in H$, entonces $\alpha\mathbf{x} \in H$ para todo escalar α.

Demostración Es evidente que si H es un espacio vectorial, entonces las dos reglas de cerradura deben cumplirse. Inversamente, para demostrar que H es un espacio vectorial, debe demostrarse que los axiomas *i*) a *x*) en la página 292 se cumplen bajo las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar definidas en V. Las dos operaciones de cerradura [axiomas *i*) y *iv*)] se cumplen por hipótesis. Como los vectores en H son también vectores en V, las identidades asociativa, conmutativa, distributiva y multiplicativa [axiomas *ii*), *v*), *vii*), *viii*), *ix*) y *x*)] se cumplen. Sea $\mathbf{x} \in H$. Entonces $0\mathbf{x} \in H$ por hipótesis *ii*). Pero por el teorema 4.2.1, página 296, (parte *ii*), $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Así, $\mathbf{0} \in H$ y se cumple el axioma *iii*). Por último, por la parte *ii*), $(-1)\mathbf{x} \in H$ para todo $\mathbf{x} \in H$. Por el teorema 4.2.1 (parte *iv*), $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x} \in H$ de manera que se cumple el axioma *iv*) y la prueba queda completa. ✦

Este teorema demuestra que para probar si H es o no un subespacio de V, es suficiente verificar que

$\mathbf{x} + \mathbf{y}$ y $\alpha\mathbf{x}$ están en H cuando $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en H y α es un escalar.

La prueba anterior contiene un hecho que por su importancia merece que se le mencione explícitamente:

Todo subespacio de un espacio vectorial V contiene al $\mathbf{0}$. **(1)**

Este hecho con frecuencia facilitará ver si un subconjunto de V en particular *no* es un subespacio de V. Es decir, si un subconjunto no contiene al $\mathbf{0}$, entonces no es un subespacio. Note que el vector cero en H, un subespacio de V, es el mismo que el vector cero en V.

Ahora se darán algunos ejemplos de subespacios.

EJEMPLO 1 **El subespacio trivial** Para cualquier espacio vectorial V, el subconjunto $\{\mathbf{0}\}$ que consiste en el vector cero nada más es un subespacio ya que $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$ y $\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$ para todo número real α [parte *i*) del teorema 4.2.1]. Esto se llama el **subespacio trivial**. ◆

EJEMPLO 2 **Un espacio vectorial es un subespacio en sí mismo** Para cada espacio vectorial V, V es un subespacio de sí mismo. ◆

Subespacios propios

Los primeros dos ejemplos muestran que todo espacio vectorial V contiene dos subespacios, $\{\mathbf{0}\}$ y V (que coinciden si $V=\{\mathbf{0}\}$). Es más interesante encontrar otros subespacios. Los subespacios distintos a $\{\mathbf{0}\}$ y $\mathbf{V}$ se llaman **subespacios propios**.

EJEMPLO 3 **Un subespacio propio de $\mathbb{R}^2$** Sea $H=\{(x,y): y=mx\}$ (vea el ejemplo 4.2.4, página 293). Entonces, como ya se dijo, H es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. En la sección 4.6 (problema 15, página 345) se verá que si H es cualquier subespacio propio de $\mathbb{R}^2$, entonces H consiste en el conjunto de puntos que están sobre una recta que pasa por el origen; es decir, un conjunto de puntos que está sobre una recta que pasa por el origen es el único tipo de subespacio propio de $\mathbb{R}^2$. ◆

EJEMPLO 4 **Un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$** Sea $H=\{(x,y,z): x=at, y=bt \text{ y } z=ct;\ a,b,c,t \text{ reales}\}$. Entonces H consiste en los vectores en $\mathbb{R}^3$ que están sobre una recta que pasa por el origen. Para ver que H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, sea $\mathbf{x}=(at_1, bt_1, ct_1)\in H$ y $\mathbf{y}=(at_2, bt_2, ct_2)\in H$. Entonces

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(a(t_1+t_2), b(t_1+t_2), c(t_1+t_2))\in H$$

y

$$\alpha\mathbf{x}=(a(\alpha t_1), b(\alpha t_2), c(\alpha t_3))\in H.$$

Así H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. ◆

EJEMPLO 5 **Otro subespacio propio de $\mathbb{R}^3$** Sea $\pi=\{(x,y,z): ax+by+cz=0;\ a,b,c \text{ reales}\}$. Entonces, como se vio en el ejemplo 4.2.6, página 294, π es un espacio vectorial; así, π es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. ◆

En la sección 4.6 se demostrará que los conjuntos de vectores que están sobre rectas y planos que pasan por el origen son los únicos subespacios propios de $\mathbb{R}^3$.

Antes de estudiar más ejemplos, se debe observar que *no todo espacio vectorial tiene subespacios propios*.

EJEMPLO 6 **$\mathbb{R}$ no tiene subespacios propios** Sea H un subespacio de $\mathbb{R}$.† Si $H \neq \{\mathbf{0}\}$, entonces H contiene un número real α diferente de cero. Por el axioma *vi*), $1 = (1/\alpha)\alpha \in H$ y $\beta 1 = \beta \in H$ para todo número real β. Así, si H no es el subespacio trivial, entonces $H = \mathbb{R}$. Es decir, $\mathbb{R}$ **no** tiene subespacios propios. ✦

EJEMPLO 7 **Algunos subespacios propios de P_n** Si P_n denota el espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$ (ejemplo 4.2.7, página 295), y si $0 \leq m < n$, entonces P_m es un subespacio propio de P_n como se verifica fácilmente. ✦

EJEMPLO 8 **Un subespacio propio de M_{mn}** Sea M_{mn} (ejemplo 4.2.10, página 295) el espacio vectorial de matrices de $m \times n$ con componentes reales y sea $H = \{A \in M_{mn}: a_{11} = 0\}$. Por la definición de suma de matrices y multiplicación por un escalar, es claro que los dos axiomas de cerradura se cumplen de manera que H es un subespacio. ✦

EJEMPLO 9 **Un subconjunto que no es un subespacio propio de M_{nn}** Sea $V = M_{nn}$ (las matrices de $n \times n$) y sea $H = \{A \in M_{nn}: A$ es invertible$\}$. Entonces H no es un subespacio ya que la matriz cero de $n \times n$ no está en H. ✦

EJEMPLO 10 Cálculo **Un subespacio propio de $C[0, 1]$** $P_n[0, 1]$‡ $\subset C[0, 1]$ (vea el ejemplo 4.2.8, página 295) porque todo polinomio es continuo y P_n es un espacio vectorial para todo entero n de manera que cada $P_n[0, 1]$ es un subespacio de $C[0, 1]$. ✦

EJEMPLO 11 Cálculo **$C^1[0, 1]$ es un subespacio propio de $C[0, 1]$** Sea $C^1[0, 1]$ el conjunto de funciones con primeras derivadas continuas definidas en $[0, 1]$. Como toda función diferenciable es continua, se tiene $C^1[0, 1] \subset C[0, 1]$. Como las suma de dos funciones diferenciables es diferenciable y un múltiplo constante de una función diferenciable es diferenciable, se ve que $C^1[0, 1]$ es un subespacio de $C[0, 1]$. Se trata de un subespacio propio porque no toda función continua es diferenciable. ✦

EJEMPLO 12 Cálculo **Otro subespacio propio de $C[0, 1]$** Si $f \in C[0, 1]$, entonces $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe. Sea $H = \{f \in C[0, 1]: \int_0^1 f(x)\,dx = 0\}$. Si $f \in H$ y $g \in H$, entonces $\int_0^1 [f(x) + g(x)]\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx = 0 + 0 = 0$ y $\int_0^1 \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Así, $f + g$ y αf están en H para todo número real α. Esto muestra que H es un subespacio propio de $C[0, 1]$. ✦

Como lo ilustran los últimos tres ejemplos, un espacio vectorial puede tener un número grande y variado de subespacios propios. Antes de terminar esta sección, se demostrará un hecho interesante sobre subespacios.

---

† Observe que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real ; es decir, $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial en donde los escalares se toman como los números reales. Éste es el ejemplo 4.2.1, página 293, con $n = 1$.

‡ $P_n[0, 1]$ denota el conjunto de polinomios de grado $\leq n$, definidos en el intervalo $[0, 1]$.

TEOREMA 2 Sean H_1 y H_2 dos subespacios de un espacio vectorial V. Entonces $H_1 \cap H_2$ es un subespacio de V.

Demostración Observe que $H_1 \cap H_2$ es no vacío porque contiene al $\mathbf{0}$. Sea $\mathbf{x}_1 \in H_1 \cap H_2$ y $\mathbf{x}_2 \in H_1 \cap H_2$. Entonces como H_1 y H_2 son subespacios, $\mathbf{x}_1 + x_2 \in H_1$ y $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in H_2$. Esto significa que $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in H_1 \cap H_2$. De manera similar, $\alpha\mathbf{x}_1 \in H_1 \cap H_2$. Por lo tanto, se cumplen los dos axiomas de cerradura y $H_1 \cap H_2$ es un subespacio. ◆

EJEMPLO 13 **La intersección de dos subespacios de $\mathbb{R}^3$ es un subespacio** En $\mathbb{R}^3$ sea $H_1 = \{(x, y, z): 2x - y - z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z): x + 2y + 3z = 0\}$. Entonces H_1 y H_2 consisten en vectores que están sobre planos que pasan por el origen y son, según el ejemplo 5, subespacios de $\mathbb{R}^3$. $H_1 \cap H_2$ es la intersección de los dos planos que se calculan como en el ejemplo 9 de la sección 3.5:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 2x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

reduciendo renglones, se tiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & 0 \end{array}\right)$$

Así, todas las soluciones al sistema homogéneo están dadas por $(-\frac{1}{5}z, -\frac{7}{5}z, z)$. Haciendo $z = t$, se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta L en $\mathbb{R}^3$: $x = -\frac{1}{5}t$, $y = -\frac{7}{5}t$, $z = t$. Como se vio en el ejemplo 4, el conjunto de vectores sobre L constituye un subespacio de $\mathbb{R}^3$. ◆

Observación. No es necesariamente cierto que si H_1 y H_2 son subespacios de V, $H_1 \cup H_2$ sea un subespacio de V (puede o no serlo). Por ejemplo, $H_1 = \{(x, y): y = 2x\}$ y $\{(x, y): y = 3x\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^2$, pero $H_1 \cup H_2$ no es un subespacio. Para ver esto, observe que $(1, 2) \in H_1$ y $(1, 3) \in H_2$ de manera que tanto $(1, 2)$ como $(1, 3)$ están en $H_1 \cup H_2$. Pero $(1, 2) + (1, 3) = (2, 5) \notin H_1 \cup H_2$ porque $(2, 5) \notin H_1$ y $(2, 5) \in H_2$. Así, $H_1 \cup H_2$ no es cerrado bajo la suma y por lo tanto no es un subespacio.

PROBLEMAS 4.3

Autoevaluación

Falso-verdadero

1. El conjunto de vectores de la forma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

II. El conjunto de vectores de la forma $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. V

III. El conjunto de matrices diagonales de 3×3 es un subespacio de M_{33}. V

IV. El conjunto de matrices triangulares superiores de 3×3 es un subespacio de M_{33}. V

V. El conjunto de matrices triangulares de 3×3 es un subespacio de M_{33}.

VI. Sea H un subespacio de M_{22}. Entonces $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ debe estar en H.

VII. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x + 3y - z = 0 \right\}$ y $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - 2y + 5z = 0 \right\}$, entonces $H \cup K$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

VIII. Si H y K son los subconjuntos del problema VII, entonces $H \cap K$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

IX. El conjunto de polinomios de grado 2 es un subespacio de P_3.

En los problemas 1 al 20 determine si el subconjunto dado H del espacio vectorial V es un subespacio de V.

1. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y): y \geq 0\}$

2. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y): x = y\}$

3. $V = \mathbb{R}^3$; $H =$ el plano xy

4. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$

5. $V = M_{nn}$; $H = \{D \in M_{nn}$: D es diagonal$\}$

6. $V = M_{nn}$; $H = \{T \in M_{nn}$: T es triangular superior$\}$

7. $V = M_{nn}$; $H = \{S \in M_{nn}$: S es simétrica$\}$

8. $V = M_{mn}$; $H = \{A \in M_{mn}: a_{ij} = 0\}$

9. $V = M_{22}$; $H = \left\{ A \in M_{22}: A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \right\}$

10. $V = M_{22}$; $H = \left\{ A \in M_{22}: A = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

11. $V = M_{22}$; $H = \left\{ A \in M_{22}: A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \right\}$

12. $V = P_4$; $H = \{p \in P_4$: grado $p = 4\}$

13. $V = P_4$; $H = \{p \in P_4: p(0) = 0\}$

14. $V = P_n$; $H = \{p \in P_n: p(0) = 0\}$

15. $V = P_n$; $H = \{p \in P_n: p(0) = 1\}$

16. $V = C[0, 1]$; $H = \{f \in C[0, 1]: f(0) = f(1) = 0\}$

17. $V = C[0, 1]$; $H = \{f \in C[0, 1]: f(0) = 2\}$

Cálculo **18.** $V = C^1[0, 1]$; $H = \{f \in C^1[0, 1]: f'(0) = 0\}$

Cálculo **19.** $V = C[a, b]$, donde a y b son números reales y $a < b$; $H = \{f \in C[a, b]: \int_a^b f(x)\,dx = 0\}$

Cálculo **20.** $V = C[a, b]$; $H = \{f \in C[a, b]: \int_a^b f(x)\,dx = 1\}$

Respuestas a la autoevaluación

I. F **II.** V **III.** V **IV.** V **V.** F **VI.** V **VII.** F **VIII.** V **IX.** F

21. Sea $V = M_{22}$; sean $H_1 = \{A \in M_{22}: a_{11} = 0\}$ y $H_2 = \left\{A \in M_{22}: A = \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}\right\}$.

  a. Demuestre que H_1 y H_2 son subespacios.

  b. Describa el subconjunto de $H = H_1 \cap H_2$ y muestre que es un subespacio.

Cálculo **22.** Si $V = C[0, 1]$, sea H_1 el subespacio del ejemplo 10 y H_2 el subespacio del ejemplo 11. Describa el conjunto $H_1 \cap H_2$ y demuestre que es un subespacio.

23. Sea A una matriz de $n \times m$ y sea $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m: A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^m$. H se llama **espacio nulo** de la matriz A.

24. En el problema 23 sea $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m: A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$. Demuestre que H no es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

25. Sea $H = \{(x, y, z, w): ax + by + cz + dw = 0\}$, donde a, b, c y d son números reales, no todos cero. Demuestre que H es un subespacio propio de $\mathbb{R}^4$. H se llama un **hiperplano** en $\mathbb{R}^4$ que pasa por el origen.

26. Sea $H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales no todos cero. Demuestre que H es un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$. Igual que en el problema 25, H se llama un **hiperplano** en $\mathbb{R}^n$.

27. Sean H_1 y H_2 subespacios de un espacio vectorial V. Sea $H_1 + H_2 = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ con $\mathbf{v}_1 \in H_1$ y $\mathbf{v}_2 \in H_2\}$. Demuestre que $H_1 + H_2$ es un subespacio de V.

28. Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Demuestre que $H = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2; a, b \text{ reales}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

***29.** En el problema 28 demuestre que si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son no colineales, entonces $H = \mathbb{R}^2$.

***30.** Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores arbitrarios en un espacio vectorial V. Sea $H = \{\mathbf{v} \in V: \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares$\}$. Demuestre que H es un subespacio de V. H se llama el subespacio **generado** por los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

MATLAB 4.3

1. **a.** Genere una matriz aleatoria A de 4×4 y sea **S = triu(A) + triu(A)'**. Verifique que S es simétrica.

  b. Usando el inciso a), genere dos matrices aleatorias de 4×4 reales simétricas, S y T, y un escalar aleatorio, a. Verifique que aS y $S + T$ también son simétricas. Repita para otros cuatro juegos de S, T y a.

  c. ¿Por qué se puede decir que se ha reunido evidencia de que el subconjunto de matrices simétricas de 4×4 es un subespacio de M_{44}?

  d. (*Lápiz y papel*) Pruebe que el subconjunto de matrices simétricas de $n \times n$ es un subespacio de M_{nn}.

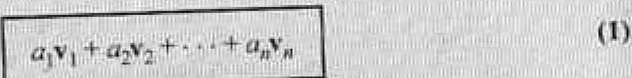
4.4 COMBINACIÓN LINEAL Y ESPACIO GENERADO

Se ha visto que todo vector $\mathbf{v} = (a, b, c)$ en $\mathbb{R}^3$ se puede escribir en la forma

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

En este caso se dice que $\mathbf{v}$ es una *combinación lineal* de los tres vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$. De manera más general, se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1 **Combinación lineal** Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores en un espacio vectorial V. Entonces cualquier vector de la forma



$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n \qquad (1)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares se llama una **combinación lineal** de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

EJEMPLO 1 **Una combinación lineal en $\mathbb{R}^3$** En $\mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ya que $\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. ◆

EJEMPLO 2 **Una combinación lineal en M_{23}** En M_{23}, $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, lo que muestra que $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$. ◆

EJEMPLO 3 **Combinaciones lineales en P_n** En P_n todo polinomio se puede escribir como una combinación lineal de los "monomios" $1, x, x^2, \ldots, x^n$. ◆

DEFINICIÓN 2 **Conjunto generador** Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en un espacio vectorial V **generan** a V si todo vector en V se puede escribir como una combinación lineal de ellos. Es decir, para todo $\mathbf{v} \in V$, existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n \qquad (2)$$

EJEMPLO 4 **Conjunto de vectores que generan $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$** En la sección 3.1 se vio que los vectores $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan $\mathbb{R}^2$. En la sección 3.3 se vio que $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan $\mathbb{R}^3$. ◆

Ahora se verá brevemente la generación de algunos otros espacios vectoriales.

EJEMPLO 5 **$n + 1$ vectores que generan a P_n** Del ejemplo 3 se deduce que los monomios $1, x, x^2, \ldots, x^n$ generan a P_n. ◆

EJEMPLO 6 **Cuatro vectores que generan a M_{22}** Como $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, vemos que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ generan a M_{22}. ◆

EJEMPLO 7 **Ningún conjunto finito de polinomios genera a P** Sea P el espacio vectorial de polinomios. Entonces ningún conjunto *finito* de polinomios genera a P. Para ver esto, suponga que $p_1, p_2, \ldots, p_m$ son polinomios. Sea p_k el polinomio de grado más alto en este conjunto y sea $N = \text{grad } p_k$. Entonces el polinomio $p(x) = x^{N+1}$ no se puede escribir como una combinación lineal de $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Por ejemplo si $N = 3$, entonces $x^4 \neq c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ para cualesquiera escalares c_0, c_1, c_2 y c_3. ◆

Ahora se verá otra manera de encontrar subespacios de un espacio vectorial V.

DEFINICIÓN 3 **Espacio generado por un conjunto de vectores** Sea $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_k$ k vectores en un espacio vectorial V. El **espacio generado por** $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_k\}$ es el conjunto de combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_k$. Es decir,

$$\text{gen } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_k\mathbf{v}_k\} \quad (3)$$

donde $a_1, a_2, \ldots a_k$ son escalares arbitrarios.

TEOREMA 1 Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_k$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_k\}$ es un subespacio de V.

Demostración La prueba es sencilla y se deja como ejercicio (vea el problema 16). ◆

EJEMPLO 8 **El espacio generado por dos vectores en $\mathbb{R}^3$** Sea $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4)$ y $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 6)$. Entonces $H = \text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = a_1(2, -1, 4) + a_2(4, 1, 6)\}$. ¿Cuál es la apariencia de H? Si $\mathbf{v} = (x, y, z) \in H$, entonces se tiene $x = 2a_1 + 4a_2$, $y = -a_1 + a_2$ y $z = 4a_1 + 6a_2$. Si se piensa que (x, y, z) está fijo, entonces estas ecuaciones se pueden ver como un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas a_1, a_2. Este sistema se resuelve en la forma usual:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & | & y \\ 2 & 4 & | & x \\ 4 & 6 & | & z \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & -y \\ 2 & 4 & | & x \\ 4 & 6 & | & z \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & -y \\ 0 & 6 & | & x+2y \\ 0 & 10 & | & z+4y \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{6}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & -y \\ 0 & 1 & | & (x+2y)/6 \\ 0 & 10 & | & z+4y \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 10R_2]{R_1 \to R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x/6 - 2y/3 \\ 0 & 1 & | & x/6 + y/3 \\ 0 & 0 & | & -5x/3 + 2y/3 + z \end{pmatrix}$$

Del capítulo 1 se ve que el sistema tiene una solución sólo si $-5x/3 + 2y/3 + z = 0$; o multiplicando por -3, si

$$5x - 2y - 3z = 0 \tag{4}$$

La ecuación (4) es la ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen. ◆

Este último ejemplo se puede generalizar para probar el siguiente hecho interesante:

> *El espacio generado por dos vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^3$ que no son paralelos es un plano que pasa por el origen.*

En los problemas 19 y 20 se encuentra la sugerencia de una demostración.

Se puede dar una interpretación geométrica de este resultado. Vea los vectores en la figura 4.1. Se conoce (de la sección 3.1) la interpretación geométrica de los vectores

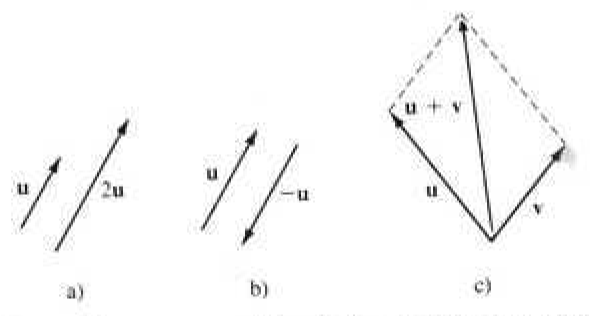


Figura 4.1 $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ se obtiene de la regla del paralelogramo

$2\mathbf{u}$, $-\mathbf{u}$ y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, por ejemplo. Usando éstos, se ve que cualquier otro vector en el plano de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se puede obtener como una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. La figura 4.2 muestra cuatro situaciones diferentes en las que un tercer vector $\mathbf{w}$ en el plano de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se puede escribir como $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ para valores adecuados de α y β.

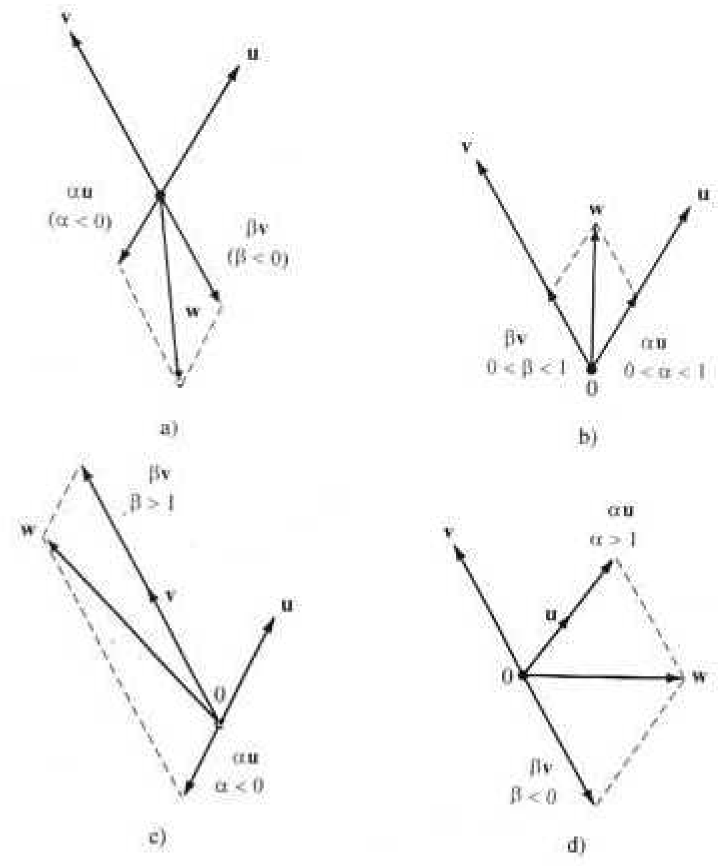


Figura 4.2 En cada caso $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ para valores adecuados de α y β

Observación. En las definiciones 2 y 3 se usaron dos términos diferentes: "genera" y "espacio generado". Se hace hincapié en que

verbo

↓

Un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *genera* a V si todo vector en V se puede escribir como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$;
pero

Sustantivo

↓

El *espacio generado* por los n vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ es el conjunto de combinaciones lineales de estos vectores.

Estos dos conceptos son diferentes —aun cuando los términos se parezcan.

Se cierra esta sección citando un resultado útil. Su demostración no es difícil y se deja como ejercicio (vea el problema 21).

TEOREMA 2 Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ $n+1$ vectores que están en un espacio vectorial V. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ genera a V, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ también genera a V. Es decir, si se agregan uno, o más, vectores a un conjunto generador se obtiene otro conjunto generador. ✦

PROBLEMAS 4.4

Autoevaluación

I. ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores *no* pueden generar a $\mathbb{R}^2$?

a. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ **e.** $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

II. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de polinomios generan a P_2?

a. $1, x^2$ **b.** $3, 2x, -x^2$ **c.** $1+x, 2+2x, x^2$ **d.** $1, 1+x, 1+x^2$

Falso-vedadero

III. $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ está en el espacio generado por $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\}$.

IV. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ está en el espacio generado por $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$.

V. $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{10\,000}\}$ genera a P.

VI. $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ genera a M_{22}.

VII. gen $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\0\\8\\2\end{pmatrix}\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

VIII. gen $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\0\\8\\2\end{pmatrix}\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

IX. Si $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$ genera a $\mathbb{R}^2$, entonces $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}\right\}$ también genera $\mathbb{R}^2$.

Respuestas a la autoevaluación

I. a, b, d **II.** b, d **III.** V **IV.** F **V.** F **VI.** V **VII.** F **VIII.** V **IX.** V

En los problemas 1 al 13 determine si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial dado.

1. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

2. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

3. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

4. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$

5. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

6. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\3\\5\end{pmatrix}$

7. En $\mathbb{R}^3$: $(1, -1, 2), (1, 1, 2), (0, 0, 1)$

8. En $\mathbb{R}^3$: $(1, -1, 2), (-1, 1, 2), (0, 0, 1)$

9. En P_2: $1 - x, 3 - x^2$

10. En P_2: $1 - x, 3 - x^2, x$

11. En M_{22}: $\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}$

12. En M_{22}: $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4 & -1\\3 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2 & 5\\6 & 0\end{pmatrix}$

13. En M_{23}: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

14. Demuestre que dos polinomios no pueden generar P_2.

*15. Si $p_1, p_2, \ldots, p_m$ genera P_n, demuestre que $m \geq n + 1$.

16. Demuestre que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\alpha\mathbf{u}$ están en gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ [*Sugerencia:* Usando la definición de espacio generado escriba $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\alpha\mathbf{u}$ como combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.]

17. Demuestre que el conjunto infinito $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ genera P, el espacio vectorial de polinomios.

18. Sea H un subespacio de V que contiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Demuestre que gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq H$. Es decir, gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es el subespacio *más pequeño* de V que contiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

19. Sean $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que si $\mathbf{v}_2 = c\mathbf{v}_1$, entonces gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una recta que pasa por el origen.

**20. En el problema 19 suponga que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ no son paralelos. Demuestre que H = gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es un plano que pasa por el origen. ¿Cuál es la ecuación del plano? [*Sugerencia:* Si $(x, y, z) \in H$, escriba $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$ y encuentre una condición respecto a x, y y z tal que el sistema de 3×2 que resulta tenga una solución.]

21. Pruebe el teorema 2. [*Sugerencia:* Si $\mathbf{v} \in V$, escriba $\mathbf{v}$ como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}$ con el coeficiente de $\mathbf{v}_{m+1}$ igual a cero.]

22. Demuestre que M_{22} se puede generar con matrices invertibles.

*23. Sean $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ dos n-vectores en un espacio vectorial V. Suponga que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{12}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{u}_n \\ \mathbf{v}_2 &= a_{21}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{u}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_n &= a_{n1}\mathbf{u}_1 + a_{n2}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{u}_n \end{aligned}$$

Demuestre que si

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ = gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

MATLAB 4.4

1. Visualización de las combinaciones lineales
   a. Vuelva a trabajar con los problemas 2 y 3 de MATLAB 3.1.

   M b. (*Usa el archivo combo.m*) El archivo *combo.m* ilustra la combinación lineal $a * \mathbf{u1} + b * \mathbf{u2} + c * \mathbf{u3}$. Con **help combo** se obtiene una descripción. Dados tres vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ y tres escalares a, b y c, **combo(u1,u2,u3,a,b,c)** ilustra la geometría de la combinación lineal anterior. Hay pausas durante el despliegue de pantallas; para continuar, oprima cualquier tecla.
      i. **u1** = [1;2], **u2** = [−2;3], **u3** = [5;4], $a = -2$, $b = 2$, $c = -1$
      ii. **u1** = [1;1], **u2** = [−1;1], **u3** = [3;0], $a = 2$, $b = -1$, $c = .5$
      iii. Vectores de su elección

2. a. (*Lápiz y papel*) Decir que **w** está en gen {**u**, **v**} significa que existen escalares c_1 y c_2 tales que $\mathbf{w} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v}$. Para los conjuntos de vectores dados, escriba $\mathbf{w} = c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v}$, interprete esto como un sistema de ecuaciones para las incógnitas c_1 y c_2, verifique que la matriz aumentada para el sistema sea [**u** **v**|**w**], y resuelva el sistema.

   i. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

   ii. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

   iii. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$

   M b. (*Utiliza el archivo lincomb.m*) Verifique los resultados (y observe la geometría) introduciendo primero los vectores **u**, **v** y **w** y después dando **lincomb(u,v,w)** para cada uno de los conjuntos de vectores en el inciso a).

3. a. (*Lápiz y papel*) Decir que **w** está en gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ significa que existen escalares c_1, c_2 y c_3 tales que $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$. Para cada conjunto de vectores dado, escriba $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$, interprételo como un sistema de ecuaciones para las incógnitas c_1, c_2 y c_3, verifique que la matriz aumentada para el sistema sea $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3|\mathbf{w}]$ y resuelva el sistema. Observe que habrá un número infinito de soluciones.

   i. $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

ii. $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

b. (*Lápiz y papel*) Este inciso y el inciso c) exploran el "significado" de tener un número infinito de soluciones. Para cada conjunto de vectores en el inciso a):

i. Haga $c_3 = 0$ y despeje c_2 y c_1. Escriba **w** como combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.
ii. Haga $c_2 = 0$ y despeje c_1 y c_3. Escriba **w** como combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_3$.
iii. Haga $c_1 = 0$ y despeje c_2 y c_3. Escriba **w** como combinación lineal de $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$.

M **c.** (*Utilice el archivo combine2.m*) Dando **help combine2** se obtiene una descripción. Para cada conjunto de vectores en el inciso a), introduzca los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y **w** y después dé **combine2(v1,v2,v3,w)**. Con esto se demuestra la geometría de las observaciones del inciso b).

Nota. Es importante observar que los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ tomados por pares no son paralelos.

4. a. (*Lápiz y papel*) Para el conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y el vector **w** en i) del inciso c), escriba la ecuación expresando $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ como un sistema de ecuaciones con c_1, c_2 y c_3 como incógnitas. Escriba la matriz aumentada para este sistema de ecuaciones y verifique que sea $[\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \ \mathbf{v}_3|\mathbf{w}]$. Explique por qué **w** es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ si y sólo si el sistema tiene solución.

b. Para cada conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ y **w** en el inciso c), encuentre la matriz aumentada $[\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_k|\mathbf{w}]$ y resuelva el sistema correspondiente usando el comando **rref**. Forme $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$, una solución al sistema de ecuaciones si existe la solución.

c. Para cada caso trabajado en el inciso b), escriba una conclusión diciendo si **w** es o no una combinación lineal de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ y por qué. Si es una combinación lineal, verifique que $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$, donde $c_1, \ldots, c_k$ sean las componentes del vector solución **c** en el inciso b).

i. $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 25 \end{pmatrix}$

ii. $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 25 \end{pmatrix}$

iii. $\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$ $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 10.5 \\ 2 \\ -14 \\ 3.5 \end{pmatrix}$

iv. el mismo conjunto que en iii); $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

v. $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 11 \\ -17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -19 \\ -9 \\ -46 \\ 74 \end{pmatrix}$

vi. el mismo conjunto que i); $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

vii. $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

5. a. Para $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ dados, sea $A=[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\cdots\mathbf{v}_k]$ y encuentre **rref(A)**. Argumente por qué habrá una solución al sistema $[A|\mathbf{w}]$ para cualquier **w** en el $\mathbb{R}^n$ indicado. Explique por qué se puede concluir que el conjunto genera a todo ese $\mathbb{R}^n$.

i. $\mathbb{R}^3$ $\left\{\begin{pmatrix}4\\2\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\1\\-8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}\right\}$

ii. $\mathbb{R}^3$ $\left\{\begin{pmatrix}9\\-9\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\7\\-7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-10\\4\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix}\right\}$

b. Para $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ dados, sea $A=[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\cdots\mathbf{v}_k]$ y encuentre **rref(A)**. Argumente por qué habrá alguna **w** en el $\mathbb{R}^n$ indicado para el que no hay una solución al sistema $[A|\mathbf{w}]$. Experimente usando MATLAB para encontrar esa **w**. Explique por qué puede concluir que el conjunto no genera todo $\mathbb{R}^n$.

i. $\mathbb{R}^4$ $\left\{\begin{pmatrix}10\\0\\-5\\-8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9\\-9\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\8\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

ii. $\mathbb{R}^4$ $\left\{\begin{pmatrix}4\\5\\3\\-9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\8\\-5\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\2\\11\\-17\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-7\\0\\8\end{pmatrix}\right\}$

iii. $\mathbb{R}^3$ $\left\{\begin{pmatrix}9\\-9\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\7\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}14\\-2\\12\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\16\\2\end{pmatrix}\right\}$

6. Considere las matrices en el problema 2 de MATLAB 1.8. Pruebe la invertibilidad de cada matriz. Para cada matriz, decida si las columnas de A generarían o no todo $\mathbb{R}^n$ (el tamaño de la matriz es $n\times n$). Escriba una conclusión respecto a la relación entre la invertibilidad de una matriz de $n\times n$ y si las columnas de la matriz generan todo $\mathbb{R}^n$.

7. Recuerde de problemas anteriores que $\mathbf{w}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k$; es decir, **w** está en gen $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ siempre que $\mathbf{c}=\begin{pmatrix}c_1\\\vdots\\c_k\end{pmatrix}$ es una solución al sistema de ecuaciones cuya matriz aumentada es $[\mathbf{v}_1\cdots\mathbf{v}_k|\mathbf{w}]$.

a. Para el siguiente conjunto de vectores, muestre que cualquier **w** en $\mathbb{R}^4$ estará en el espacio generado por el conjunto de vectores pero habrá un número infinito de maneras de escribir **w** como una combinación lineal del conjunto de vectores; es decir, habrá un número infinito de maneras de elegir los coeficientes $c_1,\ldots,c_k$.

$$\left\{\begin{pmatrix}3\\-7\\4\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\-7\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\2\\9\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}14\\-5\\27\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-5\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

b. Para cada **w** dada:

i. Resuelva el sistema para encontrar los coeficientes para escribir **w** como una combinación lineal del conjunto de vectores y escriba la soluciones en términos de variables arbitrarias naturales (es decir, las variables correspondientes a las columnas en la **rref** sin pivotes).

ii. Establezca variables arbitrarias iguales a cero y escriba **w** como una combinación lineal de los vectores en el conjunto.

iii. Verifique que **w** es igual a la combinación lineal que encontró:

$$\mathbf{w}=\begin{pmatrix}23\\-15\\33\\-5\end{pmatrix}\qquad \mathbf{w}=\begin{pmatrix}-13\\18\\-45\\18\end{pmatrix}$$

c. A partir de los resultados del inciso b), ¿qué vectores del conjunto original no se necesitaron al escribir **w** como combinación lineal del conjunto de vectores? ¿Por qué? ¿Cómo pueden reconocerse en la forma escalonada por renglones reducidos de la matriz cuyas columnas son el conjunto de vectores?

d. Considere el subconjunto de los vectores originales obtenido eliminando los vectores no necesarios. Demuestre que cada vector no necesario está en el espacio generado por este subconjunto de vectores. Argumente la razón por la que cualquier vector **w** en $\mathbb{R}^4$ estará en el espacio generado por este subconjunto de vectores y por la que los coeficientes de la combinación lineal son únicos.

e. Repita los incisos a) a d) para el siguiente conjunto de vectores y los vectores **w** dados en $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{pmatrix}10\\8\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-10\\-4\\19\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-6\\-7\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}32\\32\\-5\end{pmatrix}\right\}\qquad \mathbf{w}=\begin{pmatrix}26\\31\\17\end{pmatrix}\qquad \mathbf{w}=\begin{pmatrix}2\\20\\52\end{pmatrix}$$

8. Aplicación Una compañía de concreto almacena tres mezclas básicas, dadas enseguida. Las cantidades se miden en gramos y cada "unidad" de mezcla pesa 60 gramos. Puede formular mezclas especiales revolviendo combinaciones de las tres mezclas básicas; entonces las mezclas especiales posibles pertenecen al espacio generado por los tres vectores que representan las tres mezclas básicas.

	A	B	C
Cemento	20	18	12
Agua	10	10	10
Arena	20	25	15
Grava	10	5	15
Tobas	0	2	8

a. ¿Puede hacer una mezcla que consiste en 1000 g de cemento, 200 g de agua, 1000 g de arena 500 g de grava y 300 g de tobas? ¿Porqué puede o porqué no? Si puede, ¿cuántas unidades de cada una —mezcla A, B y C— se necesitan para formular la mezcla especial?

b. Suponga que quiere hacer 5000 g de concreto que tiene una razón de agua a cemento de 2 a 3, con 1250 g de cemento. Si debe incluir 1500 g de arena y 1000 g de grava en las especificaciones, encuentre la cantidad de tobas para hacer 5000 g de concreto. Se puede formular ésta como una mezcla especial? Si así es, ¿cuántas unidades de cada mezcla se necesitan para formular la mezcla especial?

Nota. Este problema fue tomado de "Teaching Elementary Linear Algebra with MATLAB to Engineering Students" de Deborah P. Levinson, en *Proceedings of the Fifth International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, 1992.

9. Se pueden representar polinomios como vectores si nos fijamos sólo en los coeficientes. Sea $p(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 1$. $p(x)$ se puede representar como el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. En esta representación, la primera componente es el término constante, la segunda componente es el coeficiente del término x, la tercera el coeficiente de x^2 y la cuarta el de x^3.

a. (*Lápiz y papel*) Explique por qué $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ representa el polinomio $q(x) = x^3 + 3x - 5$.

b. Encuentre el polinomio $r(x) = 2p(x) - 3q(x)$. Encuentre el vector $\mathbf{w} = 2\mathbf{v} - 3\mathbf{u}$ y explique por qué $\mathbf{w}$ representa a $r(x)$.

Para los incisos c) a e), primero represente cada polinomio por un vector como se describió. Después conteste las preguntas sobre el espacio generado como si se tratara de un conjunto de vectores.

c. En P_2, ¿está $p(x) = 2x - 1$ en el espacio generado por $\{-5x^2 - 2, -6x^2 - 9x + 8, -x^2 - 7x + 9\}$? Si así es, escriba $p(x)$ como una combinación de los polinomios en el conjunto. ¿Genera el conjunto de polinomios a todo P_2? ¿Por qué?

d. En P_3, ¿está $p(x) = x^3 + 3x^2 + 29x - 17$ en el espacio generado por $\{-2x^3 - 7x^2 + 8x - 8, 7x^3 + 9x^2 + 3x + 5, -7x^3 + 6x^2 - x - 3\}$? Si así es, escriba $p(x)$ como una combinación lineal de los polinomios del conjunto. ¿Genera el conjunto de polinomios todo P_3? ¿Por qué?

e. ¿Genera a P_3 el siguiente conjunto de polinomios? ¿Por qué?

$$\{x^3 - x + 2, x^3 + x^2 + 3x + 1, 2x^3 + x^2 + 2x + 1, -x^2 + 1\}$$

10. Suponga que $A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ b_1 & d_1 & f_1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 & e_2 \\ b_2 & d_2 & f_2 \end{pmatrix}$.

Sean $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ e_1 \\ f_1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ e_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$. Observe que **v** representa a la matriz A en el sentido de que está construido a partir de A, comenzando con el elemento (1, 1) de A, enumerando los elementos de la primera columna en orden, continuando la lista con los elementos de la segunda columna y terminando con los de la tercera. Observe también que **w** representa a B de la misma manera.

a. (*Lápiz y papel*) Escriba la matriz $C = A - 2B$. Escriba el vector que representa a C en la forma descrita y verifique que este vector sea igual a $\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$.

Para los incisos b) y d), primero represente cada matriz por un vector como el que se describió. Después conteste las preguntas relativas al espacio generado como si se refirieran a vectores.

b. ¿Está $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 29 & -17 \end{pmatrix}$ en el espacio generado por el siguiente conjunto de matrices? Si es así, escríbala como una combinación lineal:

$$\left\{\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$$

¿Genera este conjunto a M_{22}? ¿Por qué?

c. ¿Está $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -10 \\ -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ en el espacio generado por las siguientes matrices? Si es así, escríbala como una combinación lineal.

$$\left\{\begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 9 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & -1 & 5 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 & -10 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}\right\}$$

¿Genera este conjunto a todo M_{23}? ¿Por qué?

d. ¿Genera el siguiente conjunto de matrices todo M_{22}? ¿Por qué?

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

4.5 INDEPENDENCIA LINEAL

En el estudio del álgebra lineal, una de las ideas centrales es la de dependencia o independencia lineal de los vectores. En esta sección se define el significado de independencia lineal y se muestra su relación con la teoría de sistemas homogéneos de ecuaciones y determinantes.

¿Existe una relación especial entre los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$? Por supuesto, se ve que $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$; o si se escribe esta ecuación de otra manera,

$$2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \tag{1}$$

Es decir, el vector cero se puede escribir como una combinación no trivial de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ (es decir, donde los coeficientes en la combinación lineal no son ambos cero). ¿Qué tienen de especial los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix}$? La respuesta a esta pregunta es más difícil a primera vista. Sin embargo, es sencillo verificar que $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$; reescribiendo esto se obtiene

$$3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \tag{2}$$

Se ha escrito el vector cero como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. Parece que los dos vectores en la ecuación (1) y los tres vectores en la ecuación (2) tienen una relación más cercana que un par arbitrario de 2-vectores o una terna arbitraria de 3-vectores. En cada caso, se dice que los vectores son *linealmente dependientes*. En general, se tiene la siguiente definición importante.

DEFINICIÓN 1 **Dependencia e independencia lineal** Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ n vectores en un espacio vectorial V. Entonces se dice que los vectores son **linealmente dependientes** si existen n escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *no todos cero* tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{3}$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son **linealmente independientes**.

Para decirlo de otra manera, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes si la ecuación $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ se cumple sólo para $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Son linealmente dependientes si el vector cero en V se puede expresar como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ con coeficientes no todos iguales a cero.

Nota. Se dice que los *vectores* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *son* linealmente independientes (o dependientes), o que *el conjunto* de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *es* linealmente independiente (o dependiente). Esto es, se usan las dos frases indistintamente.

¿Cómo se determina si un conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente? El caso de 2-vectores es sencillo.

TEOREMA 1 Dos vectores en un espacio vectorial son linealmente dependientes si y sólo si uno es un múltiplo escalar del otro.

Demostración Primero suponga que $\mathbf{v}_2 = c\mathbf{v}_1$ para algún escalar $c \neq 0$. Entonces $c\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente dependientes. Por otro lado, suponga que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente dependientes. Entonces existen constantes c_1 y c_2, al menos uno distinto de cero, tales que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Si $c_1 \neq 0$, entonces dividiendo entre c_1, se obtiene $\mathbf{v}_1 + (c_2/c_1)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, o sea,

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{c_2}{c_1}\right)\mathbf{v}_2$$

Es decir, $\mathbf{v}_1$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{v}_2$. Si $c_1 = 0$, entonces $c_2 \neq 0$ y, por lo tanto, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1$. ◆

EJEMPLO 1 **Dos vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^4$** Los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes ya que $\mathbf{v}_2 = -3\mathbf{v}_1$. ◆

EJEMPLO 2 **Dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$** Los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes; si no lo fueran, se tendría $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 2c \\ 4c \end{pmatrix}$. Entonces $2 = c$, $5 = 2c$ y $-3 = 4c$, lo cual es evidentemente imposible para cualquier número c. ◆

EJEMPLO 3 **Determinación de la dependencia o independencia lineal de tres vectores en $\mathbb{R}^3$**

Determine si los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución Suponga que $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces multiplicando y sumando

se obtiene $\begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ -2c_1 - 2c_2 + \quad c_3 \\ 3c_1 \qquad\quad + 7c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Esto lleva al sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas c_1, c_2 y c_3:

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 \qquad\quad &= 0 \\ -2c_1 - 2c_2 \quad + \ c_3 &= 0 \\ 3c_1 \qquad\quad + 7c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Así, los vectores serán linealmente dependientes si y sólo si el sistema (4) tiene soluciones no triviales. Se escribe el sistema (4) usando una matriz aumentada y después se reduce por renglones. La forma escalonada reducida por renglones de $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right)$ es $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Este último sistema de ecuaciones se lee $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Por lo tanto, (4) no tiene soluciones no triviales y los vectores dados son linealmente independientes. ✦

EJEMPLO 4 Determinación de la dependencia o independencia lineal de tres vectores en $\mathbb{R}^3$

Determine si los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución La ecuación $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ conduce al sistema homogéneo

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 + 11c_3 &= 0 \\ -3c_1 \qquad - \ 6c_3 &= 0 \\ 4c_2 + 12c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Escribiendo el sistema (5) en la forma de matriz aumentada y reduciendo por renglones, se obtiene

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 11 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 9 & 27 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nos podemos detener aquí ya que la teoría de la sección 1.4 muestra que el sistema (5) tiene un número infinito de soluciones. Por ejemplo, la última matriz aumentada se lee

$$\begin{aligned} c_1 \quad - 2c_3 &= 0 \\ c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Si se hace $c_3 = 1$, se tiene $c_2 = -3$ y $c_1 = -2$, de manera que, como puede verificarse, $-2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y los vectores son linealmente dependientes.

✦

Interpretación geométrica de la dependencia lineal en $\mathbb{R}^3$

En el ejemplo 3 se encontraron tres vectores en $\mathbb{R}^3$ que eran linealmente independientes. En el ejemplo 4 se encontraron tres vectores que eran linealmente dependientes. ¿Qué significado geométrico tiene esto?

Suponga que **u**, **v** y **w** son tres vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$. Se pueden tratar los vectores como si tuvieran un punto terminal en el origen. Entonces existen constantes c_1, c_2 y c_3, no todas cero, tales que

$$c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = \mathbf{0} \tag{6}$$

Suponga que $c_3 \neq 0$ (un resultado similar se cumple si $c_1 \neq 0$ o $c_2 \neq 0$). Esntonces se pueden dividir ambos lados de (6) entre c_3 y rearreglar los términos para obtener

$$\mathbf{w} = -\frac{c_1}{c_3}\mathbf{u} - \frac{c_2}{c_3}\mathbf{v} = A\mathbf{u} + B\mathbf{v}$$

donde $A = -c_1/c_3$ y $B = -c_2/c_3$. Ahora se demostrará que **u**, **v** y **w** son coplanares. Se calcula

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (A\mathbf{u} + B\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = A[\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})] + B[\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})] \\ &= A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

porque **u** y **v** son ambos ortogonales a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (vea la página 263). Sea $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Si $\mathbf{n} = \mathbf{0}$, entonces por el teorema 3.4.2 parte *vii)* **u** y **v** son paralelos (y colineales). Así **u**, **v** y **w** están en cualquier plano que contiene tanto a **u** como a **v** y por lo tanto son coplanares. Si $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, entonces **u** y **v** están en el plano que consiste en aquellos vectores que pasan por el origen que son ortogonales a **n**. Pero **w** está en el mismo plano porque $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$. Esto muestra que **u**, **v** y **w** son coplanares.

En el problema 59 se pide al lector que demuestre que si **u**, **v** y **w** son coplanares, entonces son linealmente dependientes. Se concluye que

Tres vectores en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes si y sólo si son coplanares.

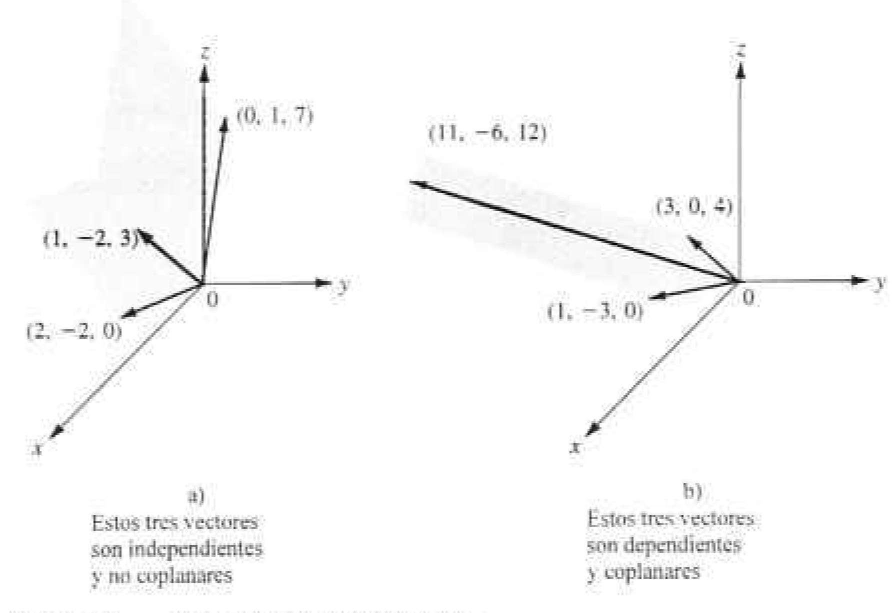


Figura 4.3 Dos conjuntos de tres vectores

La figura 4.3 ilustra este hecho usando los vectores en el ejemplo 3 y 4.

La teoría de sistemas homogéneos nos puede decir algo sobre la dependencia o independencia lineal de los vectores.

TEOREMA 2 Un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^m$ siempre es linealmente dependiente si $n > m$.

Demostración Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ n vectores en $\mathbb{R}^m$ e intentemos encontrar constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos cero tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{7}$$

Sea $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Entonces la ecuación (7) se convierte en

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n &= 0 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\ \ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Pero el sistema (8) es el sistema (1.4.1) en la página 41, y según el teorema 1.4.1, tiene un número infinito de soluciones si $n > m$. Así, existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos cero, que satisfacen (8) y, por lo tanto, los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes. ◆

EJEMPLO 5 **Cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$ que son linealmente dependientes** Los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 18 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes ya que constituyen un conjunto de cuatro vectores de 3 elementos. ◆

Existe un corolario importante (y obvio) del teorema 2.

COROLARIO Un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ contiene a lo más n vectores. ◆

Nota. El corolario se puede expresar de otra manera: Si se tienen n n-vectores linealmente independientes, entonces no se pueden incluir más vectores sin convertir el conjunto en uno linealmente dependiente.

Del sistema (8) se puede hacer otra observación importante cuya prueba se deja como ejercicio (vea el problema 27).

TEOREMA 3 Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces las columnas de A, consideradas como vectores, son linealmente dependientes si y sólo si el sistema (8), que se puede escribir como $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$, tiene soluciones no triviales. Aquí $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. ◆

EJEMPLO 6 **Soluciones a un sistema homogéneo escritas como combinaciones lineales de vectores solución linealmente independientes** Considere el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(9)}$$

Solución Haciendo una reducción de renglones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

El último sistema es

$$\begin{aligned} x_1 \qquad -9x_3 + 6x_4 &= 0 \\ x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Se ve que este sistema tiene un número infinito de soluciones, que se escriben como una combinación lineal de los vectores columna:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x_3 - 6x_4 \\ -4x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Observe que $\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones linealmente independientes para (9) porque ninguno de los dos es múltiplo del otro. (El lector debe verificar que sean soluciones.) Como x_3 y x_4 son números reales arbitrarios, se ve de (10) que el conjunto de soluciones al sistema (9) es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por estos dos vectores solución linealmente independientes. ◆

Los siguientes dos teoremas se deducen directamente del teorema 3.

TEOREMA 4 Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores en $\mathbb{R}^n$ y sea A una matriz de $n \times n$ cuyas columnas son $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes si y sólo si la única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Demostración Éste es el teorema 3 para el caso $m = n$. ◆

TEOREMA 5 Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces $\det A \neq 0$ si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes.

Demostración Del teorema 4 y del teorema de resumen (página 216), las columnas de A son linealmente independientes $\Leftrightarrow$ $\mathbf{0}$ es la única solución a $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$. Aquí, $\Leftrightarrow$ significa "si y sólo si". ◆

El teorema 5 nos lleva a extender nuestro teorema de resumen.

TEOREMA 6 **Teorema de resumen (punto de vista 5)** Sea A una matrix de $n \times n$. Entonces las ocho afirmaciones siguientes son equivalentes; es decir, cada una implica a las otras siete (de manera que si una es cierta, todas son ciertas).

i. A es invertible.

ii. La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial $(\mathbf{x} = \mathbf{0})$.

iii. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para todo n-vector $\mathbf{b}$.

iv. A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.

v. A se puede escribir como el producto de matrices elementales.

vi. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii. $\det A \neq 0$.

viii. Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.

Demostración La única parte que no se ha demostrado es que los renglones de A son linealmente independientes $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$. Las columnas son independientes $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A^t = \det A \neq 0$ (vea el teorema 2.2.4, página 190) $\Leftrightarrow$ las columnas de A^t son linealmente independientes. Pero las columnas de A^t son los renglones de A. Esto completa la prueba. ◆

El siguiente teorema combina las ideas de independencia lineal y conjuntos generadores en $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 7 Cualquier conjunto de n vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$.

Demostración Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ vectores linealmente independientes y sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Debemos demostrar que existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Es decir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \tag{11}$$

En (11) se multiplican componentes, se igualan y se suman para obtener un sistema de n ecuaciones con n incógnitas $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n &= x_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n &= x_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n &= x_n \end{aligned} \tag{12}$$

Se puede escribir (12) como $A\mathbf{c} = \mathbf{v}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Pero $\det A \neq 0$ ya que las columnas de A son linealmente independientes. De manera que el sistema (12) tiene una solución única $\mathbf{c}$ por el teorema 6 y el teorema queda demostrado. ◆

Observación. *Esta demostración no sólo muestra que* $\mathbf{v}$ *se puede escribir como una* combinación lineal de los vectores independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, sino también que esto se puede hacer *de una sola manera* (ya que el vector solución $\mathbf{c}$ es único).

EJEMPLO 7 **Tres vectores en $\mathbb{R}^3$ generan $\mathbb{R}^3$ si su determinante es diferente de cero** Los vectores (2, −1, 4), (1, 0, 2) y (3, −1, 5) generan $\mathbb{R}^3$ porque $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ y, por lo tanto, son independientes. ◆

Todos los ejemplos que se han dado hasta ahora han sido en el espacio $\mathbb{R}^n$. Esto no es una restricción tan grande como parece. En la sección 5.4 (teorema 6) se demostrará que muchos espacios vectoriales de apariencia muy distinta tienen, en esencia, las mismas propiedades. Por ejemplo, se verá que el espacio P_n es fundamentalmente el mismo que $\mathbb{R}^{n+1}$. Se dirá que dos espacios vectoriales de esta forma son *isomórficos*.

Este poderoso resultado tendrá que esperar hasta el capítulo 5. Mientras tanto, se darán algunos ejemplos en espacios diferentes a $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLO 8 **Tres matrices linealmente independientes en M_{23}** En M_{23}, sean $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Determine si A_1, A_2 y A_3 son linealmente dependientes o independientes.

Solución Suponga que $c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = 0$. Entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 - c_2 - c_3 & c_2 & 2c_1 + 4c_2 + c_3 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 & c_1 + 3c_2 + 2c_3 & -c_1 + c_3 \end{pmatrix}$$

Esto da un sistema homogéneo de seis ecuaciones con tres incógnitas c_1, c_2 y c_3, y es bastante sencillo verificar que la única solución es $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Así, las tres matrices son linealmente independientes. ◆

EJEMPLO 9 **Cuatro polinomios linealmente independientes en P_3** En P_3 determine si los polinomios $1, x, x^2$ y x^3 son linealmente dependientes o independientes.

Solución Suponga que $c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 = 0$. Esto debe cumplirse para todo número real x. En particular, si $x = 0$, se obtiene $c_1 = 0$. Entonces, haciendo $x = 1, -1, 2$, se obtiene, sucesivamente,

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 + c_4 &= 0 \\ -c_2 + c_3 - c_4 &= 0 \\ 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 &= 0 \end{aligned}$$

El determinante de este sistema homogéneo es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

de manera que el sistema tiene una solución única $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ y los cuatro polinomios son linealmente independientes. Esto se puede ver de otra manera. Se sabe que cualquier polinomio de grado 3 tiene a lo más tres raíces reales. Pero si $c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 = 0$ para algunas constantes diferentes de cero c_1, c_2, c_3 y c_4 y para todo número real x, entonces se ha construido un polinomio cúbico para el que todo número real es una raíz. Esto es imposible. ◆

EJEMPLO 10 **Tres polinomios linealmente dependientes en P_2** En P_2 determine si los polinomios $x - 2x^2$, $x^2 - 4x$ y $-7x + 8x^2$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución Sea $c_1(x - 2x^2) + c_2(x^2 - 4x) + c_3(-7x + 8x^2) = 0$. Rearreglando términos se obtiene

$$\begin{aligned} (c_1 - 4c_2 - 7c_3)x &= 0 \\ (-2c_1 + c_2 + 8c_3)x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se cumplen para todo x si y sólo si

$$c_1 - 4c_2 - 7c_3 = 0$$

y

$$-2c_1 + c_2 + 8c_3 = 0$$

Pero por el teorema 1.4.1, página 41, este sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas tiene un número infinito de soluciones. Esto muestra que los polinomios son linealmente dependientes.

Si se resuelve este sistema homogéneo, se obtiene, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & -7 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{25}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & 0 \end{array}\right)$$

Así, se puede dar un valor arbitrario a c_3, $c_1 = \frac{25}{7}c_3$ y $c_2 = -\frac{6}{7}c_3$. Si, por ejemplo, $c_3 = 7$, entonces $c_1 = 25$, $c_2 = -6$ y se tiene

$$25(x - 2x^2) - 6(x^2 - 4x) + 7(-7x + 8x^2) = 0$$ ✦

PROBLEMAS 4.5

Autoevaluación

I. ¿Cuál de los siguientes pares de vectores son linealmente independientes?

a. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -3 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \end{pmatrix}$ **e.** $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

II. ¿Cuál de los siguientes pares de vectores es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$?

a. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -3 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \end{pmatrix}$ **e.** $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

III. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de vectores *debe* ser linealmente dependiente?

a. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix}$

Aquí $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ y l son números reales.

Falso-verdadero

IV. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ también son linealmente independientes.

V. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ son linealmente dependientes.

VI. Si A es una matriz de 3×3 y $\det A = 0$, entonces los renglones de A son vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$.

VII. Los polinomios 3, $2x$, $-x^3$ y $3x^4$ son linealmente independientes en P_4.

VIII. Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en M_{22}.

En los problemas 1 al 22 determine si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente.

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

13. En P_2: $1 - x$, x

14. En P_2: $-x$, $x^2 - 2x$, $3x + 5x^2$

15. En P_2: $1 - x$, $1 + x$, x^2

16. En P_2: x, $x^2 - x$, $x^3 - x$

17. En P_3: $2x$, $x^3 - 3$, $1 + x - 4x^3$, $x^3 + 18x - 9$

18. En M_{22}: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

Respuestas a la autoevaluación

I. Todos **II.** Todos **III.** b, d **IV.** F **V.** V **VI.** V **VII.** V **VIII.** F

19. En M_{22}: $\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

20. En M_{22}: $\begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\\7 & -4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8 & -5\\7 & 6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4 & -1\\2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & 4\end{pmatrix}$

***21.** En $C[0, 1]$: sen x, cos x

***22.** En $C[0, 1]$: $x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$

23. Determine una condición sobre los números a, b, c y d tal que los vectores $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ sean linealmente dependientes.

***24.** Encuentre una condición sobre los números a_{ij} tal que los vectores $\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}$ sean linealmente dependientes.

25. ¿Para qué valor(es) de α serán linealmente dependientes los vectores $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\\alpha\\4\end{pmatrix}$?

26. ¿Para qué valor(es) de α son linealmente dependientes los vectores $\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\6\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\1\\2\end{pmatrix}$?

[*Sugerencia:* observe con cuidado.]

27. Pruebe el teorema 3. [*Sugerencia:* observe con cuidado el sistema (8).]

28. Demuestre que si los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^m$ y si $\mathbf{v}_{n+1}$ es cualquier otro vector en $\mathbb{R}^m$, entonces el conjunto $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ es linealmente dependiente.

29. Demuestre que si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ $(n \geq 2)$ son linealmente independientes, entonces también los son $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, donde $k < n$.

30. Demuestre que si los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ diferentes de cero en $\mathbb{R}^n$ son ortogonales (vea la página 80), entonces el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es linealmente independiente.

***31.** Suponga que $\mathbf{v}_1$ es ortogonal a $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ y que $\mathbf{v}_2$ es ortogonal a $\mathbf{v}_3$. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son diferentes de cero, demuestre que el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente.

32. Sea A una matriz cuadrada (de $n \times n$) cuyas columnas son los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Demuestre que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes si y sólo si la forma escalonada por renglones de A no contiene un renglón de ceros.

En los problemas 33 al 37 escriba las soluciones a los sistemas homogéneos dados en términos de uno o más vectores linealmente independientes.

33. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

34. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 &= 0\\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + x_4 &= 0\end{aligned}$

35. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0\\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0\end{aligned}$

36. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 0\\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 6x_5 &= 0\end{aligned}$

37. $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0$

38. Sea $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$.

a. Sea $H = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3: \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0\}$ Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

b. Encuentre dos vectores linealmente independientes en H. Llámelos $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$.

c. Calcule $\mathbf{w} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$.

d. Demuestre que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente dependientes.

e. Dé una interpretación geométrica de los incisos a) y c) y explique por qué d) debe ser cierto.

Observación. Si $V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3: \mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para algún número real $\alpha\}$, entonces V es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y H se llama **complemento ortogonal** de V.

39. Elija un vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^3$. Repita los pasos del problema 38 comenzando con el vector que eligió.

40. Demuestre que cualesquiera cuatro polinomios en P_2 son linealmente dependientes.

41. Demuestre que dos polinomios no pueden generar a P_2.

***42.** Demuestre que cualesquiera $n + 2$ polinomios en P_n son linealmente dependientes.

43. Demuestre que cualquier subconjunto de un conjunto de vectores linealmente independientes es linealmente independiente. [*Nota:* esto generaliza el problema 29.]

44. Demuestre que cualesquiera siete matrices en M_{32} son linealmente dependientes.

***45.** Pruebe que cualesquiera $mn + 1$ matrices en M_{mn} son linealmente dependientes.

46. Sean S_1 y S_2 dos conjuntos finitos linealmente independientes en un espacio vectorial V. Demuestre que $S_1 \cap S_2$ es un conjunto linealmente independiente.

***47.** Demuestre que en P_n los polinomios $1, x, x^2, \ldots, x^n$ son linealmente independientes. [*Sugerencia:* por supuesto, esto es cierto si $n = 1$. Suponga que $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ son linealmente independientes y demuestre que esto implica que $1, x, x^2, \ldots, x^n$ también son linealmente independientes. Esto completa la prueba por inducción matemática.]

48. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto linealmente independiente. Demuestre que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes.

49. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto linealmente dependiente de vectores diferentes de cero en un espacio vectorial V. Demuestre que al menos uno de los vectores en S se puede escribir como combinación lineal de los vectores que le preceden. Es decir, demuestre que existe un entero $k \leq n$ y escalares $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ tales que $\mathbf{v}_k = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}$.

50. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores que tiene la propiedad de que el conjunto $\{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\}$ es linealmente dependiente cuando $i \neq j$. Demuestre que cada vector del conjunto es un múltiplo de un solo vector de ese conjunto.

Cálculo

51. Sean f y g en $C^1[0, 1]$. Entonces el **wronskiano**† de f y g está definido por

$$W(f, g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

Demuestre que si f y g son linealmente dependientes, entonces $W(f, g)(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

† Llamado así por el matemático polaco Józef María Hoene-Wronski (1778-1853). Hoene-Wronski pasó la mayor parte de su vida adulta en Francia. Trabajó en la teoría de determinantes y fue conocido también por sus escritos críticos sobre filosofía de las matemáticas.

Cálculo

52. Determine una definición adecuada para el wronskiano de las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C^{(n-1)}[0, 1]$.†

53. Suponga que **u**, **v** y **w** son linealmente independientes. Pruebe o desapruebe: **u** + **v**, **u** + **w** y **v** + **w** son linealmente independientes.

54. ¿Para qué valores reales de c son linealmente independientes los vectores $(1 - c, 1 + c)$ y $(1 + c, 1 - c)$?

55. Demuestre que los vectores $(1, a, a^2)$, $(1, b, b^2)$ y $(1, c, c^2)$ son linealmente independientes si $a \neq b$, $a \neq c$ y $b \neq c$.

56. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto linealmente independiente y suponga que $\mathbf{v} \notin$ gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Demuestre que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$ es un conjunto linealmente independiente.

57. Encuentre un conjunto de tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\left[\textit{Sugerencia}: \text{Encuentre un vector } \mathbf{v} \notin \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}. \right]$

58. Encuentre un conjunto linealmente independiente de vectores en P_2 que contenga a los polinomios $1 - x^2$ y $1 + x^2$.

59. Suponga que $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ son coplanares.

a. Demuestre que existen constantes a, b y c no todas cero tales que

$$\begin{aligned} au_1 + bu_2 + cu_3 &= 0 \\ av_1 + bv_2 + cv_3 &= 0 \\ aw_1 + bw_2 + cw_3 &= 0 \end{aligned}$$

b. Explique por qué

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = 0$$

c. Use el teorema 3 para demostrar que **u**, **v** y **w** son linealmente dependientes.

† $C^{(n-1)}[0, 1]$ es el conjunto de funciones cuyas $(n - 1)$-ésimas derivadas están definidas y son continuas en $[0, 1]$.

MATLAB 4.5

1. Utilice **rref** para verificar la independencia o dependencia de los conjuntos de vectores en los problemas 1 al 12 de esta sección. Explique sus conclusiones.
2. **a.** Para los problemas 7 y 9 argumente por qué los vectores no son coplanares
   b. Explique por qué los conjuntos de vectores dados son coplanares.

   i. $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$ **ii.** $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}\right\}$

3. Elija m y n con $m > n$ y sea **A = 2*rand(n,m) –1**. Determine la dependencia o independencia de las columnas de A. Repita para otros cuatro valores de m y n. Escriba una conclusión sobre la independencia lineal de las columnas de una matriz que tiene más columnas que renglones. Pruebe su conclusión.
4. Considere las matrices del problema 2 en MATLAB 1.8. Pruebe la invertibilidad de cada A, la independencia lineal de las columnas de A y la independencia lineal de los renglones de A (considere A'). Escriba una conclusión relacionando la invertibilidad de A' con la independencia lineal de las columnas de A y con la independencia lineal de los renglones de A. Pruebe su conclusión en términos de las propiedades de la forma escalonada reducida por renglones.
5. **a.** (*Lápiz y papel*) Si A es de $n \times m$ y $\mathbf{z}$ es de $m \times 1$, explique por qué $\mathbf{w} = A\mathbf{z}$ está en el espacio generado por las columnas de A.
   b. Para cada conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ dado, genere un vector aleatorio $\mathbf{w}$ que esté en el espacio generado por ese conjunto [use el inciso a)]. Pruebe la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}\}$. Repita para otros tres vectores $\mathbf{w}$.

   i. $\left\{\begin{pmatrix}8\\7\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-7\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\-6\\-1\end{pmatrix}\right\}$ **ii.** $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\4\end{pmatrix}\right\}$

   iii. $\left\{\begin{pmatrix}4\\3\\2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\2\\8\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\2\\8\\2\\10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\\2\\6\end{pmatrix}\right\}$

   c. Escriba una conclusión a lo siguiente: si $\mathbf{w}$ está en gen $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, entonces . . .
6. **a.** Recuerde los conjuntos de vectores en los problemas 3 y 7 de MATLAB 4.4. Para $\mathbf{w}$ en el espacio generado por esos conjuntos de vectores, había un número infinito de maneras de escribir $\mathbf{w}$ como una combinación lineal de los vectores. Verifique que cada uno de esos conjuntos de vectores es linealmente dependiente.
   b. (*Lápiz y papel*) Pruebe la siguiente afirmación: para los vectores en $\mathbb{R}^n$ tales que $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$ tiene una solución, existe un número infinito de soluciones para $c_1, \ldots, c_k$ si y sólo si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es linealmente dependiente. [*Sugerencia:* Piense en la forma escalonada reducida por renglones.]
7. **a.** Elija n y m con $m \le n$ y sea **A = 2*rand(n,m)–1**. Verifique que las columnas de A sean linealmente independientes. Cambie A de manera que alguna(s) columna(s) sea(n) combinaciones lineales de otras columnas de A. (Por ejemplo, **B = A; B(:,3) = 3*B(:,1)–2*B(:,2).**) Verifique que las columnas de B sean dependientes. Repita para

otras combinaciones lineales. ¿Qué columnas de **rref(B)** no tienen pivotes? ¿Cómo se relaciona esto con su combinación lineal?

b. Repita el inciso a) para otros cuatro juegos de n, m y A.

c. Escriba una conclusión a lo siguiente: si una columna de A es una combinación lineal de otras columnas, entonces . . .

d. Vuelva a hacer el problema 5 de MATLAB 1.7. Verifique para cada matriz A en ese problema que las columnas son dependientes.

e. Escriba una conclusión a lo siguiente: si las columnas de A son linealmente dependientes, entonces . . .

f. (*Lápiz y papel*) Pruebe su conclusión.

8. a. Del problema 7 de esta sección y el problema 5 de MATLAB 1.7, se puede concluir que si las columnas de A son dependientes, entonces las columnas de A correspondientes a las columnas sin pivotes en **rref(A)** se pueden escribir como combinaciones lineales de las columnas de A correspondientes a las columnas con pivotes en **rref(A)**. Siguiendo el proceso descrito en el problema 5 de MATLAB 1.7, determine cuáles columnas de las matrices dadas son combinaciones lineales de otras columnas; escriba estas columnas como combinaciones lineales y verifique, usando MATLAB, que estas combinaciones lineales estén correctas.

i. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ **ii.** $\begin{pmatrix} 10 & 0 & -10 & -6 & 32 \\ 8 & 2 & -4 & -7 & 32 \\ -5 & 7 & 19 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

iii. $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 11 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & -5 & -20 & 9 \\ 7 & 6 & 11 & 3 & 8 \\ 8 & 2 & -2 & -16 & 6 \\ 7 & 3 & 2 & -9 & 7 \end{pmatrix}$ **iv.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

b. (*Lápiz y papel*) Haga el problema 49 de la sección 4.5.

9. a. Demuestre que los siguientes conjuntos de vectores son independientes pero que existe un vector en su $\mathbb{R}^n$ respectivo que no está en el espacio generado por el conjunto.

i. $\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ii. $\mathbb{R}^4$ vea el inciso b *ii*) del problema 5 de esta sección de MATLAB.

iii. $\mathbb{R}^5$ vea el inciso b *iii*) del problema 5 de esta sección de MATLAB.

b. Demuestre que los siguientes conjuntos de vectores generan todo su $\mathbb{R}^n$ respectivo pero que no son linealmente independientes.

i. $\mathbb{R}^2$ $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ **ii.** $\mathbb{R}^3$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

iii. $\mathbb{R}^4$ $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c. ¿Es posible alguna de las situaciones en los incisos a) o b) si se considera un conjunto de n [illegible] usando MATLAB.

d. (*Lápiz y papel*) Escriba una conclusión relacionando la independencia lineal con la generación de todo $\mathbb{R}^n$ para el conjunto de m vectores en $\mathbb{R}^n$. Considere $m < n$, $m = n$ y $m > n$. Pruebe su afirmación considerando las propiedades de la forma escalonada reducida por renglones de la matriz cuyas columnas son el conjunto de vectores.

10. a. Verifique que cada conjunto de vectores dado sea linealmente independiente.

i. $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\4\end{pmatrix}\right\}$ ii. $\left\{\begin{pmatrix}4\\3\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\2\\8\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\2\\8\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$

iii. $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\5\end{pmatrix}\right\}$

iv. Genere cuatro vectores aleatorios en $\mathbb{R}^4$ usando el comando **rand**. Verifique la independencia. (Siga generando conjuntos hasta que obtenga uno independiente.)

b. Forme una matriz A invertible de 4×4. Para cada conjunto de vectores linealmente independientes $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ del inciso a), verifique la dependencia o independencia de $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k\}$ para determinar qué conjuntos $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k\}$ son independientes.

c. Forme una matriz A de 4×4 que no sea invertible. (Por ejemplo, dada una matriz invertible A, cambie una de las columnas para que sea una combinación lineal de otras.) Para cada conjunto de vectores linealmente independientes $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ del inciso a), verifique la dependencia o independencia de $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k\}$ para determinar qué conjuntos $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k\}$ son independientes.

d. Escriba una conclusión describiendo cuándo la multiplicación por una matriz cuadrada preserva la independencia de un conjunto de vectores.

11. Utilice MATLAB para verificar la dependencia o independencia de los conjuntos de polinomios en los problemas 13 a 17 de esta sección. Si el conjunto es dependiente, escriba los polinomios dependientes como combinaciones lineales de otros polinomios en el conjunto y verifique esas combinaciones lineales. (Vea el problema 9 de MATLAB 4.4 y el problema 8 de MATLAB 4.5.)

12. Utilice MATLAB para verificar la dependencia o independencia de los conjuntos de matrices en los problemas 18 a 20 en la sección 4.5. Si el conjunto es dependiente, escriba las matrices dependientes como combinaciones lineales de otras matrices en el conjunto y verifique esas combinaciones lineales. (Vea el problema 10 de MATLAB 4.4 y el problema 8 de MATLAB 4.5.)

13. a. Genere un conjunto de cinco matrices aleatorias en M_{22} y muestre que el conjunto es linealmente dependiente. Repita para otros dos conjuntos de matrices.

b. Genere un conjunto de siete matrices aleatorias en M_{23} y muestre que son linealmente dependientes. Repita para otros dos conjuntos de matrices.

c. Para M_{42}, ¿cuántas matrices se necesitan en un conjunto para garantizar que es dependiente? Pruebe su conclusión generando conjuntos de matrices aleatorias. Demuestre que los conjuntos con menos matrices no necesariamente son dependientes.

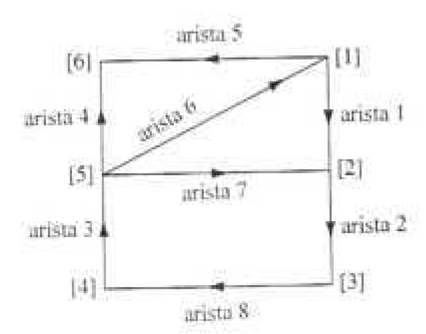
d. (*Lápiz y papel*) Trabaje los problemas 44 y 45 de esta sección.

14. Ciclos en digráficas e independencia lineal Para una gráfica dirigida (*digráfica*), la matriz de incidencia nodo-arista está definida como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } j \text{ entra al nodo } i \\ -1 & \text{si la arista } j \text{ sale del nodo } i \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Por lo tanto, cada columna corresponde a una arista de la digráfica.

a. Para la digráfica siguiente, establezca la matriz de incidencia nodo-arista A. (Para introducir A de manera eficiente, vea el problema 2 de MATLAB 1.5.)

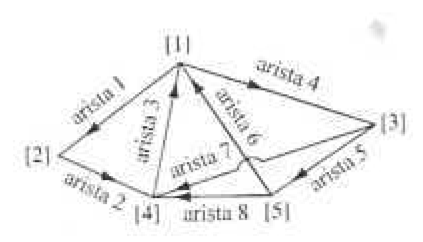


b. Encuentre un ciclo cerrado (*ciclo no dirigido*) en la digráfica y observe qué aristas incluye. Verifique la dependencia o independencia de las columnas de A que corresponden a estas aristas. (Por ejemplo, siguiendo la arista 1, después el opuesto de la arista 7, luego la arista 4 y después el opuesto de la arista 5, se forma un ciclo. Forme la matriz **[A(:,1) A(:,7) A(:,4) A(:,5)]** y verifique la independencia.)

Encuentre tantos ciclos cerrados como pueda reconocer y pruebe la dependencia o independencia de las columnas correspondientes de A.

c. Considere un subconjunto de aristas que no contengan ciclos cerrados. Pruebe la dependencia o independencia de las columnas correspondientes de A.

d. Repita los inciso a) a c) para la siguiente digráfica.



e. Escriba una conclusión sobre la relación entre ciclos no dirigidos en una digráfica y la dependencia o independencia lineal de las columnas de la matriz de incidencia nodo-arista de la digráfica.

Nota. Este problema fue inspirado por una conferencia dada por Gilbert Strang en la University of New Hampshire, en junio de 1991.

4.6 BASES Y DIMENSIÓN

Se ha visto que en $\mathbb{R}^2$ es conveniente escribir vectores como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. En $\mathbb{R}^3$ se escribieron los vectores en términos de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ahora se generalizará esta idea.

DEFINICIÓN 1 **Base** Un conjunto finito de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una **base** para un espacio vectorial V si

i. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente.

ii. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V.

Ya se han visto algunos ejemplos de bases. En el teorema 4.5.7, por ejemplo, se vio que cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$. Así,

Todo conjunto de n vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ es una base en $\mathbb{R}^n$.

En $\mathbb{R}^n$ se define

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base canónica

Entonces, como los vectores $\mathbf{e}_i$ son las columnas de una matriz identidad (que tiene determinante 1), $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente y, por lo tanto, constituye una base en $\mathbb{R}^n$. Esta base especial se llama **base canónica** en $\mathbb{R}^n$. Ahora se encontrarán bases para algunos otros espacios.

EJEMPLO 1 **Base canónica para P_n** Por el ejemplo 4.5.9, página 327, los polinomios $1, x, x^2, x^3$ son linealmente independientes en P_3. Por el ejemplo 4.4.3, página 306, estos polinomios generan P_3. Así, $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base para P_3. En general, los monomios $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$ constituyen una base para P_n. Ésta se llama la **base canónica** para P_n. ◆

EJEMPLO 2 **Base canónica para M_{22}** Se vio en el ejemplo 4.4.6, página 307, que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ generan a M_{22}. Si $\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces es obvio que $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Así, estas cuatro matrices son linealmente independientes y forman una base para M_{22}. Ésta se llama **base canónica** para M_{22}. ◆

EJEMPLO 3 **Una base para un subespacio de $\mathbb{R}^3$** Encuentre una base para el conjunto de vectores que está en el plano

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + 3z = 0 \right\}$$

Solución Se vio en el ejemplo 4.2.6 que π es un espacio vectorial. Para encontrar una base, primero se observa que si x y z se escogen arbitrariamente y si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi$, entonces $y = 2x + 3z$. Así, los vectores en π tienen la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ 2x + 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lo cual muestra que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan a π. Como es evidente que estos dos vectores son linealmente independientes (porque uno no es múltiplo del otro), forman una base para π. ◆

Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ es una base para V, entonces cualquier otro vector $\mathbf{v} \in V$ se puede escribir como $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$. ¿Puede escribirse de otra manera como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_i$? La respuesta es *no*. (Vea la observación que sigue a la demostración del teorema 4.5.7, página 326, para el caso $V = \mathbb{R}^n$.)

TEOREMA 1 Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para V y si $\mathbf{v} \in V$, entonces existe un conjunto *único* de escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$.

Demostración Existe al menos un conjunto de dichos escalares porque $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V. Suponga entonces que $\mathbf{v}$ se puede escribir de dos maneras como una combinación lineal de los vectores de la base.

Es decir, suponga que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n$$

Entonces, restando se obtiene la ecuación

$$(c_1 - d_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - d_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Pero como los $\mathbf{v}_i$ son linealmente independientes, esta ecuación se cumple sólo si $c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = \cdots = c_n - d_n = 0$. Así, $c_1 = d_1, c_2 = d_2, \ldots, c_n = d_n$ y el teorema queda demostrado. ◆

Se ha visto que un espacio vectorial tiene muchas bases. Una pregunta surge de manera natural: ¿contienen todas las bases el mismo número de vectores? En $\mathbb{R}^3$ la respuesta es, por supuesto, sí. Para ver esto, se observa que cualesquiera tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ forman una base. Pero menos vectores no pueden formar una base ya que, como se vio en la sección 4.4, el espacio generado por dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ es un plano —y un plano no es todo $\mathbb{R}^3$. De manera similar, un conjunto de cuatro vectores o más en $\mathbb{R}^3$ no puede ser linealmente independiente, pues si los tres primeros vectores en el conjunto son linealmente independientes, entonces forman una base y, por lo tanto, todos los demás vectores en el conjunto se puede expresar como una combinación lineal de los primeros tres. Entonces, todas las bases en $\mathbb{R}^3$ contienen tres vectores. El siguiente teorema nos dice que la respuesta a la pregunta anterior es *sí* para todos los espacios vectoriales.

TEOREMA 2 Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ son bases en un espacio vectorial V, entonces $m = n$; es decir, cualesquiera dos bases en un espacio vectorial V tienen el mismo número de vectores.

Demostración† Sea $S_1 = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ y $S_2 = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ dos bases para V. Debe demostrarse que $m = n$. Esto se prueba mostrando que si $m > n$, entonces S_1 es un conjunto linealmente dependiente, lo que contradice la hipótesis de que S_1 es una base. Esto demostrará que $m \le n$. La misma prueba demostrará que $n \le m$, y esto prueba el teorema. Así, basta demostrar que si $m > n$, entonces S_1 es dependiente. Como S_2 constituye una base, todo $\mathbf{u}_i$ se puede expresar como una combinación lineal de las $\mathbf{v}_j$. Se tiene

$$\begin{array}{l} \mathbf{u}_1 = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{v}_n \\ \mathbf{u}_2 = a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{v}_n \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \mathbf{u}_m = a_{m1}\mathbf{v}_1 + a_{m2}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{v}_n \end{array} \tag{1}$$

Para demostrar que S_1 es dependiente, deben encontrarse escalares $c_1, c_2, \ldots, c_m$ no todos cero, tales que

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0} \tag{2}$$

† Esta prueba se da para espacios vectoriales con bases que contienen un número finito de vectores. También se manejan los escalares como si fueran números reales; pero la prueba funciona también en el caso complejo.

Sustituyendo (1) en (2) se obtiene

$$c_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{v}_n) + c_2(a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{v}_n) + \cdots + c_m(a_{m1}\mathbf{v}_1 + a_{m2}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{v}_n) = \mathbf{0} \qquad (3)$$

La ecuación (3) se puede rescribir como

$$(a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \cdots + a_{m1}c_m)\mathbf{v}_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{m2}c_m)\mathbf{v}_2 + \cdots + (a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \cdots + a_{mn}c_m)\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \qquad (4)$$

Pero como $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes, se debe tener

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \cdots + a_{m1}c_m &= 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{m2}c_m &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \cdots + a_{mn}c_m &= 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

El sistema (5) es un sistema homogéneo de n ecuaciones con las m incógnitas $c_1, c_2, \ldots, c_m$, y como $m > n$, el teorema 1.4.1, página 41, dice que el sistema tiene un número infinito de soluciones. Así, existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_m$, no todos cero, tales que (2) se satisface y, por lo tanto, S_1 es un conjunto linealmente dependiente. Esta contradicción prueba que $m \leq n$; si se cambian los papeles de S_1 y S_2, se demuestra que $n \leq m$ y la prueba queda completa. ✦

Por este teorema, se puede definir uno de los concepto centrales en el álgebra lineal.

DEFINICIÓN 2 **Dimensión** Si el espacio vectorial V tiene una base finita, entonces la **dimensión de V es el número de vectores en todas las bases** y V se llama **espacio vectorial de dimensión finita**. De otra manera, V se llama **espacio vectorial de dimensión infinita**. Si $V = \{\mathbf{0}\}$, entonces se dice que V tiene **dimensión cero**.

Notación. La dimensión de V se denota por dim V.

Observación. No se ha demostrado que todo espacio vectorial tiene una base. Esta prueba difícil aparece en la sección 4.12. Pero no se necesita este hecho para que la definición 2 tenga sentido, ya que *si* V tiene una base finita, entonces V es de dimensión finita. De otra manera, V tiene dimensión infinita. Así, con el fin de demostrar que V tiene dimensión infinita, sólo es necesario demostrar que V no tiene una base finita. Esto se puede hacer probando que V contiene un número infinito de vectores linealmente independientes (vea el ejemplo 7).

EJEMPLO 4 **La dimensión de $\mathbb{R}^n$** Como n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ constituyen una base, se ve que

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$ ✦

EJEMPLO 5 **La dimensión de P_n** Por el ejemplo 1 y el problema 4.5.47, página 331, los polinomios $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ constituyen una base en P_n. Entonces dim $P_n = n + 1$. ✦

EJEMPLO 6 **La dimension de M_{mn}** En M_{mn} sea A_{ij} la matriz de $m \times n$ con un uno en la posición ij y cero en otra parte. Es sencillo demostrar que las matrices A_{ij} para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$ forman una base para M_{mn}. Así, dim $M_{mn} = mn$. ✦

EJEMPLO 7 ***P* tiene dimensión infinita** En el ejemplo 4.4.7, página 307, se vio que ningún conjunto finito de polinomios genera a P. Entonces P no tiene una base finita y, por lo tanto, es un espacio vectorial de dimensión infinita. ✦

Existe un gran número de teoremas sobre la dimensión de un espacio vectorial.

TEOREMA 3 Suponga que dim $V = n$. Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ es un conjunto m de vectores linealmente independientes en V, entonces $m \leq n$.

Demostración Sea $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ una base para V. Si $m > n$, entonces, igual que en la prueba del teorema 2, se pueden encontrar constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$ no todas cero, tales que la ecuación (2) se satisface. Esto contradice la independencia lineal de los vectores $\mathbf{u}_i$. Así, $m \leq n$. ✦

TEOREMA 4 Sea H un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V. Entonces H tiene dimensión finita y

$$\boxed{\dim H \leq \dim V} \tag{6}$$

Demostración Sea dim $V = n$. Cualquier conjunto de vectores linealmente independientes en H es también linealmente independiente en V. Por el teorema 3, cualquier conjunto linealmente independiente en H puede contener a lo más n vectores. Si $H = \{\mathbf{0}\}$, entonces dim $H = 0$. Si $H \neq \{\mathbf{0}\}$, sea $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ un vector en H y $H_1 = \text{gen}\ \{\mathbf{v}_1\}$. Si $H_1 = H$, dim $H = 1$ y la prueba queda completa. Si no, elija a $\mathbf{v}_2 \in H$ tal que $\mathbf{v}_2 \notin H_1$ y sea $H_2 = \text{gen}\ \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, y así sucesivamente. Continuamos hasta encontrar vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ tales que $H = \text{gen}\ \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. El proceso tiene que terminar porque se pueden encontrar a lo más n vectores linealmente independientes en H. Entonces $H = k \leq n$. ✦

El teorema 4 tiene algunas consecuencias interesantes. Se darán dos de ellas.

EJEMPLO 8 Cálculo **$C[0, 1]$ y $C^1[0, 1]$ tienen dimensión infinita** Sea $P[0, 1]$ el conjunto de polinomios definido en el intervalo $[0, 1]$. Entonces $P[0, 1] \subset C[0, 1]$. Si la dimensión de $C[0, 1]$ fuera finita, entonces $P[0, 1]$ también tendría dimensión finita. Pero según el ejemplo 7, no es así. Por lo tanto $C[0, 1]$ tiene dimensión infinita. De manera similar, como $P[0, 1] \subset C^1[0, 1]$ (ya que todo polinomio es diferenciable), también se tiene que la dimensión de $C^1[0, 1]$ es infinita. ✦

En general

> *Cualquier espacio vectorial que contiene un subespacio de dimensión infinita es de dimensión infinita.*

EJEMPLO 9 **Los subespacios de $\mathbb{R}^3$** Se puede usar el teorema 4 para encontrar *todos* los subespacios de $\mathbb{R}^3$. Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Existen cuatro posibilidades; $H = \{\mathbf{0}\}$, dim $H = 1$, dim $H = 2$ y dim $H = 3$. Si dim $H = 3$, entonces H contiene una base de tres vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ en $\mathbb{R}^3$. Pero entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ también forman una base para $\mathbb{R}^3$, y así, $H = \text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \mathbb{R}^3$. Por lo tanto, la única manera de obtener un subespacio *propio* de $\mathbb{R}^3$ es teniendo dim $H = 1$ o dim $H = 2$. Si dim $H = 1$, entonces H tiene una base que consiste en un vector $\mathbf{v} = (a, b, c)$. Sea $\mathbf{x}$ en H. Entonces $\mathbf{x} = t(a, b, c)$ para algún número real t [puesto que (a, b, c) genera a H]. Si $\mathbf{x} = (x, y, z)$, esto significa que $x = at$, $y = bt$, $z = ct$. Pero ésta es la ecuación de una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen con la dirección del vector (a, b, c).

Ahora suponga que dim $H = 2$ y sea $\mathbf{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $\mathbf{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ una base para H. Si $\mathbf{x} = (x, y, z) \in H$, entonces existen números reales s y t tales que $\mathbf{x} = s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$ o $(x, y, z) = s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$. Entonces

$$\begin{aligned} x &= sa_1 + ta_2 \\ y &= sb_1 + tb_2 \\ z &= sc_1 + tc_2 \end{aligned} \tag{7}$$

Sea $\mathbf{v}_3 = (\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Entonces del teorema 3.4.2, página 263, parte *vi*), se tiene $\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ y $\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Ahora calculamos

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z &= \alpha(sa_1 + ta_2) + \beta(sb_1 + tb_2) + \gamma(sc_1 + tc_2) \\ &= (\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1)s + (\alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2)t \\ &= (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1)s + (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2)t = 0 \end{aligned}$$

Así, si $(x, y, z) \in H$, entonces $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, lo que muestra que H es un plano que pasa por el origen con vector normal $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Por lo tanto se ha demostrado que

> *Los únicos subespacios propios de $\mathbb{R}^3$ son los conjuntos de vectores que están en una recta o un plano que pasa por el origen.*

✦

EJEMPLO 10 **Espacio de solución y espacio nulo** Sea A una matriz de $m \times n$ y sea $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Sean $\mathbf{x}_1 \in S$ y $\mathbf{x}_2 \in S$; entonces $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $A(\alpha\mathbf{x}_1) = \alpha(A\mathbf{x}_1) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$, de manera que S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y dim $S \le n$. S se llama **espacio de solución** del sisetma homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. También se llama **espacio nulo** de la matriz A. ◆

EJEMPLO 11 **Una base para el espacio de solución de un sistema homogéneo** Encuentre una base (y la dimensión) para el espacio de solución S del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Solución Aquí $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Como A es una matriz de 2×3, S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Reduciendo por renglones, se encuentra, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces $y = z$ y $x = -z$ de manera que todas las soluciones son de la forma $\begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix}$. Así, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una base para S y dim $S = 1$. Observe que S es el conjunto de vectores que están en la recta $x = -t$, $y = t$, $z = t$. ◆

EJEMPLO 12 **Una base para el espacio de solución de un sistema homogéneo** Encuentre una base para el espacio de solución S del sistema

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0 \\ 4x - 2y + 6z &= 0 \\ -6x + 3y - 9z &= 0 \end{aligned}$$

Solución Reduciendo renglones se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

lo que da una sola ecuación: $2x - y + 3z = 0$. S es un plano y, por el ejemplo 3 una base está dada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, y dim $S = 2$. ◆

Antes de dar por terminada esta sección, se demostrará un resultado útil para encontrar una base para un espacio vectorial arbitrario. Se ha visto que n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ constituyen una base para $\mathbb{R}^n$. Este hecho se cumple para *todo* espacio vectorial de dimensión finita.

TEOREMA 5 Cualesquiera n vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V de dimensión n constituyen una base para V.

Demostración Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores. Si generan el espacio V, entonces constituyen una base. Si no lo hacen, entonces existe un vector $\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} \notin \text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Esto significa que los $n+1$ vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}$ son linealmente independientes. Para ver esto, observe que si

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n + c_{n+1}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{8}$$

entonces $c_{n+1} = 0$, porque si no podríamos escribir $\mathbf{u}$ como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ dividiendo la ecuación (8) entre c_{n+1} y poniendo todos los términos, excepto $\mathbf{u}$, en el lado derecho. Pero si $c_{n+1} = 0$, entonces (8) es

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Lo que quiere decir que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ ya que los $\mathbf{v}_i$ son linealmente independientes. Ahora sea $W = \text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}\}$. Como todos los vectores entre las llaves están en V, W es un subespacio de V. Como $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}$ son linealmente independientes, forman una base para W., y $\dim W = n + 1$. Pero por el teorema 4, $\dim W \leq n$. Esta contradicción muestra que *no* existe el vector $\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} \notin \text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Así, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ genera a V y, por lo tanto, constituye una base para V. ◆

PROBLEMAS 4.6

Autoevaluación

Falso-verdadero

I. Cualesquiera tres vectores en $\mathbb{R}^3$ forman una base para $\mathbb{R}^3$.

II. Cualesquiera tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ forman una base para $\mathbb{R}^3$.

III. Una base en un espacio vectorial es única.

IV. Sea H un subespacio propio de $\mathbb{R}^4$. Es posible encontrar cuatro vectores linealmente independientes en H.

V. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x + 11y - 17z = 0 \right\}$. Entonces $\dim H = 2$.

VI. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para el espacio vectorial V. Entonces *no* es posible encontrar un vector $\mathbf{v} \in V$ tal que $\mathbf{v} \notin \text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

VII. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para M_{22}.

Respuestas a la autoevaluación

I. F II. V III. F IV. F V. V VI. V VII. V

En los problemas 1 al 10 determine si el conjunto de vectores dado es una base para el espacio vectorial a que se refiere.

1. En P_2: $1 - x^2, x$

2. En P_2: $-3x, 1 + x^2, x^2 - 5$

3. En P_2: $x^2 - 1, x^2 - 2, x^2 - 3$

4. En P_3: $1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3$

5. En P_3: $3, x^3 - 4x + 6, x^2$

6. En M_{22}: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

7. En M_{22}: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, donde $abcd \neq 0$

8. En M_{22}: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y = 0\}; (1, -1)$

10. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y = 0\}; (1, -1), (-3, 3)$

11. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en el plano $2x - y - z = 0$.

12. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en el plano $3x - 2y + 6z = 0$.

13. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en la recta $x/2 = y/3 = z/4$.

14. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en la recta $x = 3t, y = -2t, z = t$.

15. Demuestre que los únicos subespacios propios en $\mathbb{R}^2$ son rectas que pasan por el origen.

16. En $\mathbb{R}^4$ sea $H = \{(x, y, z, w): ax + by + cz + dw = 0\}$, donde $abcd \neq 0$.

- **a.** Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.
- **b.** Encuentre una base para H.
- **c.** ¿Cuánto vale dim H?

***17.** En $\mathbb{R}^n$ un **hiperplano** que contiene a **0** es un subespacio de dimensión $n - 1$. Si H es un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ que contiene a **0**, demuestre que

$$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales fijos, no todos cero.

18. En $\mathbb{R}^5$ encuentre una base para el hiperplano

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5): 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0\}$$

En los problemas 19 al 23 encuentre una base para el espacio de solución del sistema homogéneo dado.

19. $\begin{aligned} x - y &= 0 \\ -2x + 2y &= 0 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ 3x + y &= 0 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ -2x + 2y - 3z &= 0 \\ 4x - 8y + 5z &= 0 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} 2x - 6y + 4z &= 0 \\ -x + 3y - 2z &= 0 \\ -3x + 9y - 6z &= 0 \end{aligned}$

24. Encuentre una base para D_3, el espacio vectorial de matrices diagonales de 3×3. ¿Cuál es la dimensión de D_3?

25. ¿Cuál es la dimensión de D_n, el espacio de matrices diagonales de $n \times n$?

26. Sea S_{nn} el espacio vectorial de matrices simétricas de $n \times n$. Demuestre que S_{nn} es un subespacio de M_{nn} y que dim $S_{nn} = [n(n + 1)]/2$.

27. Suponga que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V de dimensión n y $m < n$. Demuestre que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ se puede aumentar a una base para V. Esto es, existen vectores $\mathbf{v}_{m+1}, \mathbf{v}_{m+2}, \ldots, \mathbf{v}_n$ tales que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base. [*Sugerencia*: vea la demostración del teorema 5.]

28. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base en V. Sean $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{u}_n = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n$. Demuestre que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es también una base en V.

29. Demuestre que si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V, entonces dim $V \leq n$. [*Sugerencia:* utilice el resultado del problema 4.5.49.]

30. Sean H y K dos subespacios de V tales que $H \subseteq K$ y dim H = dim $K < \infty$. Demuestre que $H = K$.

31. Sean H y K dos subespacios de V y defina $H + K = \{\mathbf{h} + \mathbf{k}: \mathbf{h} \in H \text{ y } \mathbf{k} \in K\}$.
a. Demuestre que $H + K$ es un subespacio de V.
b. Si $H \cap K = \{\mathbf{0}\}$, demuestre que dim $(H + K)$ = dim H + dim K.

***32.** Si H es un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V, demuestre que existe un subespacio único K de V tal que a) $H \cap K = \{\mathbf{0}\}$ y b) $H + K = V$.

33. Demuestre que dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en $\mathbb{R}^2$ con puntos terminales en el origen son colineales si y sólo si dim gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = 1$.

34. Demuestre que los tres vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ en $\mathbb{R}^3$ con puntos terminales en el origen son coplanares si y sólo si dim gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \leq 2$.

35. Demuestre que cualesquiera n vectores que generan un espacio V de dimensión n forman una base para V. [*Sugerencia:* demuestre que si los n vectores no son linealmente independientes, entonces dim $V < n$.]

***36.** Demuestre que todo subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita tiene una base.

37. Encuentre dos bases para $\mathbb{R}^4$ que contengan a (1, 0, 1, 0) y (0, 1, 0, 1) y no tengan otros vectores en común.

38. ¿Para qué valores del número real a los vectores $(a, 1, 0)$, $(1, 0, a)$ y $(1 + a, 1, a)$ constituyen una base para $\mathbb{R}^3$?

MATLAB 4.6

Los problemas en esta sección se concentran en el trabajo con bases para *todo* $\mathbb{R}^n$ (o todo P_n o todo M_{nm}). Los problemas en la sección 4.7 se concentran en bases de subespacios.

1. a. Verifique que los conjuntos dados en el inciso b) forman una base para el espacio vectorial indicado. Explique cómo se satisface cada una de las propiedades de la definición de una base.

b. Genere un vector aleatorio en el espacio vectorial dado. Demuestre que es una combinación lineal de los vectores de la base con coeficientes únicos para la combinación lineal. Repita para otros dos vectores aleatorios.

i. $\mathbb{R}^3 \left\{ \begin{pmatrix} 8.25 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.01 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -6.5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

ii. $\mathbb{R}^5 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

iii. M_{22} $\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1.2 & 2.1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1.5 & 4\\ 4.3 & 5\end{pmatrix}\right\}$

(Vea el problema 10 de MATLAB 4.4.)

iv. P_4 $\{x^4 - x^3 + 2x + 1,\ \ x^4 + 3x^2 - x + 4,\ \ 2x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + 5,$
$x^4 + x^3 - 2x^2 + x,\ \ x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\}$

(Vea el problema 9 de MATLAB 4.4.)

2. Para los conjuntos de vectores en el problema 9b) de MATLAB 4.5, demuestre que esos conjuntos generan su $\mathbb{R}^n$ respectivo pero no forman una base. Para cada conjunto, genere un vector aleatorio **w** en su $\mathbb{R}^n$ correspondiente y verifique que **w** es una combinación lineal del conjunto de vectores pero que los coeficientes de la combinación lineal no son únicos. Repita para otros dos vectores **w**.

3. Para cada base en el problema 1 de MATLAB de esta sección:

a. Elimine un vector del conjunto y muestre que el nuevo conjunto no es una base, describiendo qué propiedad de las bases no se satisface. Repita (elimine otro vector).

b. Genere un vector aleatorio **w** en el espacio vectorial. Agregue **w** al conjunto de vectores. Muestre que el nuevo conjunto no es una base, describiendo qué propiedad no se satisface. Repita con otro **w**.

c. (*Lápiz y papel*) Escriba una demostración, basada en la forma escalonada reducida por renglones, de que una base en $\mathbb{R}^n$ debe contener exactamente n vectores y una demostración de que una base en P_n debe contener exactamente $n + 1$ vectores.

4. a. La dimensión de M_{32} es 6. Genere cinco matrices aleatorias en M_{32} y muestre que no forman una base para M_{32}, describiendo la propiedad de las bases que no se satisface. Genere siete matrices aleatorias en M_{32} y muestre que no forman una base para M_{32} describiendo la propiedad que no se satisface.

b. (*Lápiz y papel*) Escriba una demostración, basada en la forma escalonada por renglones reducidos, de que la dimensión de M_{nm} es nm, el producto de n y m.

5. Considere las matrices en el problema 2 de MATLAB 1.8 y las matrices cuyas columnas son los vectores en los conjuntos de vectores dados en el problema 1b) *i*) y *ii*) de esta sección.

a. Determine para cada matriz A (digamos que su tamaño es $n \times n$) si es invertible y si las columnas de A forman una base para $\mathbb{R}^n$.

b. Escriba una conclusión relacionando la propiedad de invertibilidad con la propiedad de que las columnas formen una base.

c. (*Lápiz y papel*) Pruebe su conclusión.

6. a. (*Lápiz y papel*) Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5\}$ es una base en $\mathbb{R}^5$. Suponga que $\mathbf{w}_1 = A\mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_2 = A\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{w}_5 = A\mathbf{v}_5$, para alguna matriz A de $n \times 5$. Conteste las preguntas siguientes para completar la descripción de cómo encontrar $A\mathbf{w}$ para cualquier **w** si nada más se sabe lo que A le hace a la base.

i. Dado cualquier **w** en $\mathbb{R}^5$, argumente por qué $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_5\mathbf{v}_5$, donde $c_1, \ldots, c_5$ son únicos.

ii. Muestre que $A\mathbf{w} = c_1\mathbf{w}_1 + \cdots + c_5\mathbf{w}_5$.

iii. Argumente por qué $A\mathbf{w} = [\mathbf{w}_1\ \ \mathbf{w}_2\ \ \mathbf{w}_3\ \ \mathbf{w}_4\ \ \mathbf{w}_5]\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\\ c_5\end{pmatrix}$

b. Sea $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5\}$ la base en $\mathbb{R}^5$ dada en el problema 1b) *ii)* de esta sección de MATLAB. Suponga que

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 36 \\ 25 \\ 13 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Encuentre $A\mathbf{w}$, donde

i. $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 9 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$

ii. **w = 2∗rand(5,1)–1**

c. Repita b) para

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.7 RANGO, NULIDAD, ESPACIO DE LOS RENGLONES Y ESPACIO DE LAS COLUMNAS DE UNA MATRIZ

En la sección 4.5 se introdujo la noción de independencia lineal. Se demostró que si A es una matriz invertible de $n \times n$, entonces las columnas y los renglones de A forman conjuntos de vectores linealmente independientes. Sin embargo, si A no es invertible (de manera que $\det A = 0$), o si A no es una matriz cuadrada, entonces estos resultados no dicen nada sobre el número de renglones o columnas linealmente independientes de A. Eso es lo que se estudiará en esta sección. También se mostrará cómo se puede obtener una base para el espacio generado de un conjunto de vectores mediante la reducción por renglones.

Sea A una matriz de $m \times n$ y sea

El espacio nulo de una matriz

$$N_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \tag{1}$$

Entonces, como se vio en el ejemplo 4.6.10, página 343, N_A es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN 1 **Espacio nulo y nulidad de una matriz** N_A se llama el **espacio nulo** de A y $\nu(A) =$ dim N_A se llama **nulidad** de A. Si N_A contiene sólo al vector cero, entonces $\nu(A) = 0$.

Nota. El espa[illegible]onoce como **kernel**.

EJEMPLO 1 **Espacio nulo y nulidad de una matriz de 2 × 3** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces, como se vio en el ejemplo 4.6.11, página 343, N_A está generado por $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $\nu(A) = 1$. ◆

EJEMPLO 2 **Espacio nulo y nulidad de una matriz de 3 × 3** Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$. Entonces por el ejemplo 4.6.12, página 343, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para N_A, y $\nu(A) = 2$. ◆

TEOREMA 1 Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si $\nu(A) = 0$.

Demostración Por el teorema de resumen [teorema 4.5.6, página 325, partes *i)* y *ii)*], A es invertible si y sólo si la única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Pero por la ecuación (1), esto significa que A es invertible si y sólo si $N_A = \{\mathbf{0}\}$. Así, A es invertible si y sólo si $\nu(A) = \dim N_A = 0$. ◆

DEFINICIÓN 2 **Imagen de una matriz** Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces la **imagen** de A, denotada por imagen A, está dada por

$$\text{Imagen } A = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ para alguna } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \quad (2)$$

TEOREMA 2 Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces imagen A es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Demostración Suponga que $\mathbf{y}_1$ y $\mathbf{y}_2$ están en imagen A. Entonces existen vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ en $\mathbb{R}^n$ tales que $\mathbf{y}_1 = A\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}_2$. Por lo tanto

$$A(\alpha\mathbf{x}_1) = \alpha A\mathbf{x}_1 = \alpha\mathbf{y}_1 \quad \text{y} \quad A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$$

por lo que $\alpha\mathbf{y}_1$ y $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ están en imagen A. Así, del teoerma 4.3.1, imagen A es un subespacio de $\mathbb{R}^m$. ◆

DEFINICIÓN 3 **Rango de una matriz** Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces el **rango** de A, denotado por $\rho(A)$, está dado por

$$\rho(A) = \text{dim imagen } A$$

Se darán dos definiciones y un teorema que facilitarán un poco el cálculo del rango.

DEFINICIÓN 4 **Espacio de los renglones y espacio de las columnas de una matriz** Si A es una matriz de $m \times n$, sean $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\}$ los renglones de A y $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ las columnas de A. Entonces se define

$$R_A = \textbf{espacio de los renglones} \text{ de } A = \text{gen } \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\} \quad (3)$$

y

$$C_A = \textbf{espacio de las columnas} \text{ de } A = \text{gen } \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\} \quad (4)$$

Nota. R_A es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y C_A es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Se ha introducido una gran cantidad de notación en sólo tres páginas.

Antes de dar un ejemplo, se demostrará que dos de estos cuatro espacios son los mismos.

TEOREMA 3 Para cualquier matriz A, C_A = imagen A. Es decir, la imagen de una matriz es igual al espacio de sus columnas.

Demostración Para demostrar que C_A = imagen A, se demuestra que imagen $A \subseteq C_A$ y $C_A \subseteq$ imagen A

i. Se quiere probar que **imagen** $A \subseteq C_A$. Suponga que $\mathbf{y} \in$ imagen A. Entonces existe un vector $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Pero como se observó en la sección 1.6, página 69, $A\mathbf{x}$ se puede expresar como una combinación lineal de las columnas de A. Por lo tanto, $\mathbf{y} \in C_A$, de manera que imagen $A \subseteq C_A$.

ii. Se quiere probar que $C_A \subseteq$ **imagen** A. Suponga que $\mathbf{y} \in C_A$. Entonces $\mathbf{y}$ se puede expresar como una combinación lineal de las columnas de A como en la ecuación (1.6.9), página 69. Sea $\mathbf{x}$ el vector columna de los coeficientes de esta combinación lineal. Entonces, igual que en la ecuación (1.6.9), $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, así, $\mathbf{y} \in$ imagen A, lo que prueba que $C_A \subseteq$ imagen A. ◆

EJEMPLO 3 **Cálculo de N_A, $\nu(A)$, imagen A, $\rho(A)$, R_A y C_A para una matriz de 2×3** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. A es una matriz de 2×3.

i. *El espacio nulo de* $A = N_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3: A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Como se vio en el ejemplo 1,
$$N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

ii. *La nulidad de* $A = \nu(A) = \dim N_A = 1$.

iii. Se sabe que *imagen* $A = C_A$. Las primeras dos columnas de A son vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$, y por lo tanto forman una base para $\mathbb{R}^2$. La imagen $A = C_A = \mathbb{R}^2$.

iv. $\rho(A) = \dim$ imagen $A = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

v. *El espacio de los renglones de* $A = R_A = \text{gen}\,\{(1, 2, -1), (2, -1, 3)\}$. Como estos dos vectores son linealmente independientes, se ve que R_A es un subespacio de dimensión dos de $\mathbb{R}^3$. Del ejemplo 4.6.9, página 342, se observa que R_A es un plano que pasa por el origen. ◆

En el ejemplo 3 *iv*) se observa que $\rho(A) = \dim R_A = 2$. Esto no es una coincidencia.

TEOREMA 4 Si A es una matriz de $m \times n$, entonces

$$\dim R_A = \dim C_A = \dim \text{imagen } A = \rho(A)$$

Demostración Como es usual, se denota por a_{ij} la componente ij de A. Debemos demostrar que $\dim R_A = \dim C_A$. Los renglones de A se denotan por $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$ y sea $k = \dim R_A$. Sea $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_k\}$ una base para R_A. Entonces cada renglón de A se puede expresar como una combinación lineal de los vectores en S, y se tiene, para algunas constantes α_{ij},

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \alpha_{11}\mathbf{s}_1 + \alpha_{12}\mathbf{s}_2 + \cdots + \alpha_{1k}\mathbf{s}_k \\ \mathbf{r}_2 &= \alpha_{21}\mathbf{s}_1 + \alpha_{22}\mathbf{s}_2 + \cdots + \alpha_{2k}\mathbf{s}_k \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_m &= \alpha_{m1}\mathbf{s}_1 + \alpha_{m2}\mathbf{s}_2 + \cdots + \alpha_{mk}\mathbf{s}_k \end{aligned} \quad (5)$$

Ahora la componente j de $\mathbf{r}_i$ es a_{ij}. Entonces si se igualan las componentes j de ambos lados de (5) y se hace $\mathbf{s}_i = (s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{in})$, se obtiene

$$\begin{aligned} a_{1j} &= \alpha_{11}s_{1j} + \alpha_{12}s_{2j} + \cdots + \alpha_{1k}s_{kj} \\ a_{2j} &= \alpha_{21}s_{1j} + \alpha_{22}s_{2j} + \cdots + \alpha_{2k}s_{kj} \\ &\vdots \\ a_{mj} &= \alpha_{m1}s_{1j} + \alpha_{m2}s_{2j} + \cdots + \alpha_{mk}s_{kj} \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = s_{1j}\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} + s_{2j}\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + s_{kj}\begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Sea $\vec{\alpha_i}$ el vector $\begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix}$. Entonces como el lado izquierdo de (6) es la columna j de A, se ve que cada columna de A se puede escribir como una combinación lineal de $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \ldots, \vec{\alpha_k}$, lo que significa que los vectores $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \ldots, \vec{\alpha_k}$ generan a C_A y

$$\dim C_A \leq k = \dim R_A \tag{7}$$

Pero la ecuación (7) se cumple para cualquier matriz A. En particular, se cumple para A^t. Pero $C_{A^t} = R_A$ y $R_{A^t} = C_A$. Como de (7) $\dim C_{A^t} \leq \dim R_{A^t}$, se tiene

$$\dim R_A \leq \dim C_A \tag{8}$$

Combinando (7) y (8) la prueba queda completa. ✦

EJEMPLO 4 **Cálculo de imagen A y $\rho(A)$ para una matriz de 3×3** Encuentre una base para imagen A y determine el rango de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$.

Solución Como $\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_3 = -3\mathbf{r}_1$, se ve que $\rho(A) = \dim R_A = 1$. Así, toda columna en C_A es una base para C_A = imagen A. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ es una base para imagen A. ✦

El siguiente teorema simplificará los cálculos del imagen, el rango y la nulidad.

TEOREMA 5 Si A es equivalente por renglones a B, entonces $R_A = R_B$, $\rho(A) = \rho(B)$ y $\nu(A) = \nu(B)$.

Demostración Recuerde que por la definición 1.8.3, página 107, A es equivalente por renglones a B si A se puede "reducir" a B mediante operaciones elementales con renglones. Suponga que C es la matriz obtenida al realizar operaciones elementales en A. Primero se muestra que $R_A = R_C$. Como B se obtiene realizando varias operaciones elementales con los renglones de A, el primer resultado, aplicado varias veces, implicará que $R_A = R_B$.

Caso 1: Intercambio de dos renglones de A. Entonces $R_A = R_C$ porque los renglones de A y C son los mismos (escritos en diferente orden).

Caso 2: Multiplicación del renglón i de A por $c \neq 0$. Si los renglones de A son $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_m\}$, entonces los renglones de C son $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, c\mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_m\}$. Es evidente que $c\mathbf{r}_i = c(\mathbf{r}_i)$ y $\mathbf{r}_i = (1/c)(c\mathbf{r}_i)$. Así, cada renglón de C es un múltiplo de un renglón de A y viceversa. Esto significa que cada renglón de C está en el espacio generado por los renglones de A y viceversa. Se tiene

$$R_A \subseteq R_C \text{ y } R_C \subseteq R_A, \qquad \text{por lo tanto } R_C = R_A$$

Caso 3: Multiplicación del renglón i de A por $c \neq 0$ y suma del mismo al renglón j. Ahora los renglones de C son $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_j + c\mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_m\}$. En este caso

$$\mathbf{r}_j = \underbrace{(\mathbf{r}_j + c\mathbf{r}_i)}_{\text{renglón } j \text{ de } C} - \underset{\uparrow \atop \text{renglón } i \text{ de } C}{c\mathbf{r}_i}$$

de manera que todos los renglones de A se puede expresar como una combinación lineal de los renglones de C y viceversa. Entonces como antes,

$$R_A \subseteq R_C \text{ y } R_C \subseteq R_A, \qquad \text{por lo tanto } R_C = R_A$$

Se ha demostrado que $R_A = R_B$. Por lo tanto $\rho(R_A) = \rho(R_B)$. Por último, el conjunto de soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ no cambia bajo las operaciones elementales. Así, $N_A = N_B$, y entonces $\nu(A) = \nu(B)$. ◆

El teorema 5 es muy importante. Dice, por ejemplo, que el rango y el espacio de los renglones de una matriz son lo mismo que el rango y el espacio de los renglones de la forma escalonada de la matriz. No es difícil probar el siguiente teorema (vea el problema 43).

TEOREMA 6 El rango de una matriz es igual al número de pivotes en su forma escalonada por renglones. ◆

EJEMPLO 5 **Cálculo de $\rho(A)$ y R_A para una matriz de 3×3** Determine el rango y el espacio de los renglones de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. La forma escalonada por renglones de A es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$. Como B tiene dos pivotes, $\rho(A) = \dim R_A = 2$. Una base para R_A consiste en los primeros dos renglones de B:

$$R_A = \text{gen } \{(1, -1, 3), (0, 1, -1)\}$$ ◆

El teorema 5 es útil cuando se quiere encontrar una base para el espacio generado por un conjunto de vectores.

EJEMPLO 6 **Determinación de una base para el espacio generado por cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$** Encuentre una base para el espacio generado por

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Solución Se expresan los vectores como renglones de una matriz A y después se reduce la matriz a la forma escalonada por renglones. La matriz que se obtiene tendrá el mismo espacio de renglones que A. La forma escalonada por renglones de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que tiene dos pivotes.

Entonces una base para gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$. Por ejemplo.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ ◆

Existe un camino relativamente sencillo para encontrar el espacio nulo de una matriz.

EJEMPLO 7 **Cálculo del espacio nulo de una matriz de 4 × 4** Encuentre el espacio nulo de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & -14 & 14 \\ 3 & 6 & -12 & 9 \end{pmatrix}$$

Solución La forma escalonada por renglones reducidos de A es

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -32 & 31 \\ 0 & 1 & 14 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en la prueba del teorema 5, las soluciones a $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ son las mismas que las soluciones a $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, entonces $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$ da como resultado

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 32x_3 + 31x_4 &= 0 \\ x_2 + 14x_3 - 14x_4 &= 0 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} x_1 &= 32x_3 - 31x_4 \\ x_2 &= -14x_3 + 14x_4 \end{aligned}$$

De manera que si $\mathbf{x} \in N_A$, entonces

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 32x_3 - 31x_4 \\ -14x_3 + 14x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 32 \\ -14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -31 \\ 14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

base para N_A

Esto es, $N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 32 \\ -14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -31 \\ 14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ ◆

El procedimiento usado en el ejemplo 7 siempre se puede usar para encontrar el espacio nulo de una matriz.

Se hace aquí una observación geométrica interesante:

> Todo vector en el espacio de los renglones de una matriz real es ortogonal a todo vector en su espacio nulo.

En notación abreviada esto se escribe como $R_A \perp N_A$. Para ver por qué, considere la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si A es una matriz de $m \times n$, entonces se tiene

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $\mathbf{r}_i$ denota el i-ésimo renglón de A, se ve de la ecuación anterior que $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{x} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, m$. Así, si $\mathbf{x} \in N_A$, entonces $\mathbf{r}_i \perp \mathbf{x}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$. Pero si $\mathbf{y} \in R_A$, entonces

$\mathbf{y} = c_1\mathbf{r}_1 + \cdots + c_m\mathbf{r}_m$ para algunas constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Entonces $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = (c_1\mathbf{r}_1 + c_2\mathbf{r}_2 + \cdots + c_m\mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{x} = c_1\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{x} + c_2\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{x} + \cdots + c_m\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{x} = 0$ lo que prueba la afirmación.

En el ejemplo 7, R_A = gen {(1, 0, −32, 31), (0, 1, 14, −14)} y N_A = gen $\left\{\begin{pmatrix} 32 \\ -14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -31 \\ 14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. El lector debe verificar que los vectores de la base para R_A en efecto son ortogonales a los vectores de la base para N_A.

El siguiente teorema da la relación entre el rango y la nulidad.

TEOREMA 7 Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces

$$\boxed{\rho(A) + \nu(A) = n}$$

Es decir, el rango de A más la nulidad de A es igual al número de columnas de A.

Demostración Se supone que $k = \rho(A)$ y que las primeras k columnas de A son linealmente independientes. Sea $\mathbf{c}_i$ $(i > k)$ cualquier otra columna de A. Como $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k$ forman una base para C_A, se tiene, para algunos escalares $a_1, a_2, \ldots, a_k$,

$$\mathbf{c}_i = a_1\mathbf{c}_1 + a_2\mathbf{c}_2 + \cdots + a_k\mathbf{c}_k$$

Así, sumando $-a_1\mathbf{c}_1, -a_2\mathbf{c}_2, \ldots, -a_k\mathbf{c}_k$ sucesivamente a la i-ésima columna de A, se obtiene una nueva matriz B de $m \times n$ con $\rho(B) = \rho(A)$ y $\nu(B) = \nu(A)$ con la columna i de B igual a $\mathbf{0}$.† Esto se hace a todas las demás columnas de A (excepto las primeras k) para obtener la matriz

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\rho(D) = \rho(A)$ y $\nu(D) = \nu(A)$. Mediante un rearreglo posible de los renglones de D, se puede suponer que los primeros k renglones son independientes. Después se hace lo mismo con los renglones de (esto es, sumar múltiplos de los primeros k renglones a los últimos $m - k$) para obtener una nueva matriz:

† Esto se deduce considerando A^t (las columnas de A son los renglones de A^t).

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\rho(F) = \rho(A)$ y $\nu(F) = \nu(A)$. Ahora es obvio que si $i > k$, entonces $F\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$,† de manera que $E_k = \{\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_{k+2}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente de $n - k$ vectores en N_F. Ahora se demostrará que E_k genera N_F. Sea $\mathbf{x} \in N_F$ un vector de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\mathbf{0} = F\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots & + a_{1k}x_k \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots & + a_{2k}x_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}x_1 + & a_{k2}x_2 + & \cdots & + a_{kk}x_k \\ & 0 & & \\ & \vdots & & \\ & 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz del sistema homogéneo de $k \times k$ dado es diferente de cero, ya que los renglones de esta matriz son linealmente independientes. Así, la única solución al sistema es $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$. Entonces $\mathbf{x}$ tiene la forma

$$(0, 0, \ldots, 0, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) = x_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + x_{k+2}\mathbf{e}_{k+2} + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

Esto significa que E_k genera N_F de manera que $\nu(F) = n - k = n - \rho(F)$. Esto completa la prueba. ◆

Nota. Se sabe que $\rho(A)$ es igual al número de pivotes en la forma escalonada por renglones de A y es igual al número de columnas de la forma escalonada por renglones de A que contienen pivotes. Entonces, del teorema 7, $\nu(A)$ = número de columnas de la forma escalonada por renglones de A que no contienen pivotes.

† Recuerde que $\mathbf{e}_i$ es el vector con un uno en la posición i y cero en otro lado.

EJEMPLO 8 **Ilustración de que $\rho(A) + \nu(A) = n$** Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ se calculó (en los ejemplos 1 y 3) que $\rho(A) = 2$ y $\nu(A) = 1$; esto ilustra que $\rho(A) + \nu(A) = n$ (=3). ◆

EJEMPLO 9 **Ilustración de que $\rho(A) + \nu(A) = n$** Para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $\nu(A)$.

Solución En el ejemplo 5 se encontró que $\rho(A) = 2$. Así $\nu(A) = 3 - 2 = 1$. El lector puede demostrar esto directamente resolviendo el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para encontrar que $N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. ◆

TEOREMA 8 Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si $\rho(A) = n$.

Demostración Por el teorema 1, A es invertible si y sólo si $\nu(A) = 0$. Pero por el teorema 7, $\rho(A) = n - \nu(A)$. Así, A es invertible si y sólo si $\rho(A) = n - 0 = n$. ◆

Ahora se demostrará la aplicación del concepto de rango, para determinar si un sistema de ecuaciones lineales tiene soluciones o es inconsistente. De nuevo, se considera el sistema de m ecuaciones en n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{9}$$

lo que se escribe como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Se usa el símbolo $(A, \mathbf{b})$ para denotar la matriz aumentada de $m \times (n + 1)$ obtenida (como en la sección 1.3) agregando el vector $\mathbf{b}$ a A.

TEOREMA 9 El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución si y sólo si $\mathbf{b} \in C_A$. Esto ocurrirá si y sólo si A y la matriz aumentada $(A, \mathbf{b})$ tienen el mismo rango.

Demostración Si $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ son las columnas de A, entonces podemos escribir el sistema (9) como

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{b} \tag{10}$$

El sistema (10) tendrá solución si y sólo si $\mathbf{b}$ se puede escribir como una combinación lineal de las columnas de A. Es decir, para tener una solución debemos tener $\mathbf{b} \in C_A$. Si $\mathbf{b} \in C_A$, entonces $(A, \mathbf{b})$ tiene el mismo número de columnas linealmente independientes que A así que A y $(A, \mathbf{b})$ tienen el mismo rango. Si $\mathbf{b} \notin C_A$, entonces $\rho(A, \mathbf{b}) = \rho(A) + 1$ y el sistema no tiene soluciones. Esto completa la prueba. ◆

EJEMPLO 10 **Uso del teorema 9 para determinar si un sistema tiene soluciones** Determine si el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + \ \ 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + \ \ 6x_3 &= 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 40 \end{aligned}$$

tiene soluciones.

Solución Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix}$. La forma escalonada por renglones de A es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\rho(A) = 2$. La forma escalonada por renglones de la matriz aumentada $(A, \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right)$ es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, que tiene tres pivotes, por lo que $\rho(A, \mathbf{b}) = 3$ y el sistema no tiene solución. ◆

EJEMPLO 11 **Uso del teorema 9 para determinar si un sistema tiene soluciones** Determine si el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -2 \\ 4x_1 - x_2 + \ \ x_3 &= 6 \end{aligned}$$

tiene soluciones.

Solución Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces det $A = 0$, de manera que $\rho(A) < 3$. Como la primera columna no es un múltiplo de la segunda, se ve que las primeras dos columnas son linealmente independientes; Así $\rho(A) = 2$. Para calcular $\rho(A, \mathbf{b})$ se reduce por renglones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \end{array}\right)$$

Se ve que $\rho(A, \mathbf{b}) = 2$ y existe un número infinito de soluciones para el sistema. (Si hubiera una solución única se tendría det $A \neq 0$.) ◆

Los resultados de esta sección permiten mejorar el teorema de resumen –visto por última vez en la sección 4.5, página 325.

TEOREMA 10 **Teorema de resumen (punto de vista 6)** Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes diez afirmaciones son equivalentes; es decir, cada una implica a la otras nueve. (si una se cumple, todas se cumplen.)

i. A es invertible.

ii. La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

iv. A es equivalente por renglones a la matriz identidad, I_n de $n \times n$.

v. A se puede expresar como el producto de matrices elementales.

vi. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii. Los renglones (y columnas) de A son linealmente independientes.

viii. $\det A \neq 0$.

ix. $\nu(A) = 0$.

x. $\rho(A) = n$.

Más aún, si una de ellas no se cumple, entonces para cada vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones. Tiene un número infinito de soluciones si y sólo si $\rho(A) = \rho(A, \mathbf{b})$). ✦

PROBLEMAS 4.7

Autoevaluación

I. El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ es _____.

a. 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4

II. La nulidad de la matriz en el problema I es _____.

a. 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4

III. Si una matriz de 5×7 tiene nulidad 2, entonces su rango es _____.

a. 5 **b.** 3 **c.** 2 **d.** 7

e. No se puede determinar sin más información.

IV. El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ es _____.

a. 1 **b.** 2 **c.** 3

V. La nulidad de la matriz en el problema IV es _____.

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** 3

VI. Si A es una matriz de 4×4 y $\det A = 0$, entonces el valor máximo posible para $\rho(A)$ es _____.

a. 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4

VII. En el problema IV dim C_A = _____.
a. 1 **b.** 2 **c.** 3

VIII. En el problema I dim R_A = _____.
a. 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4

Falso-verdadero

IX. En cualquier matriz de $m \times n$, $C_A = R_A$.

X. En cualquier matriz de $m \times n$, C_A = imagen A.

En los problemas 1 al 15 encuentre el rango y la nulidad de la matriz dada.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & -6 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 3 & -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

En los problemas 16 al 22 encuentre una base para la imagen y el espacio nulo de la matriz dada.

16. La matriz del problema 2

17. La matriz del problema 5

18. La matriz del problema 6

19. La matriz del problema 8

20. La matriz del problema 11

21. La matriz del problema 12

22. La matriz del problema 13

En los problemas 23 al 26 encuentre una base para el espacio generado por los conjuntos de vectores dados.

23. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Respuestas a la autoevaluación

I. c *II.* a *III.* a *IV.* a *V.* b *VI.* c *VII.* a *VIII.* c *IX.* F *X.* V

24. (1, −2, 3), (2, −1, 4), (3, −3, 3), (2, 1, 0)

25. (1, −1, 1, −1), (2, 0, 0, 1), (4, −2, 2, 1), (7, −3, 3, −1)

26. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\1\end{pmatrix}$

En los problemas 27 al 30 utilice el teorema 9 para determinar si el sistema dado tiene alguna solución.

27. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 18 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

31. Demuestre que el rango de una matriz diagonal es igual al número de componentes diferentes de cero en la diagonal.

32. Sea A una matriz triangular superior de $n \times n$ con ceros en la diagonal. Demuestre que $\rho(A) < n$.

33. Demuestre que para cualquier matriz A, $\rho(A) = \rho(A^t)$.

34. Demuestre que si A es una matriz de $m \times n$ y $m < n$, entonces **a)** $\rho(A) \leq m$ y **b)** $\nu(A) \geq n - m$.

35. Sea A una matriz de $m \times n$ y sean B y C matrices invertibles de $m \times m$ y $n \times n$, respectivamente. Pruebe que $\rho(A) = \rho(BA) = \rho(AC)$. Es decir, si se multiplica una matriz por una matriz invertible, el rango no cambia.

36. Sean A y B matrices de $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente. Demuestre que $\rho(AB) \leq$ mín $(\rho(A), \rho(B))$.

37. Sea A una matriz de 5×7 con rango 5. Demuestre que el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución para cada 5-vector $\mathbf{b}$.

***38.** Sean A y B matrices de $m \times n$. Demuestre que si $\rho(A) = \rho(B)$, entonces existen matrices invertibles C y D tales que $B = CAD$.

39. Si $B = CAD$, donde C y D son invertibles, demuestre que $\rho(A) = \rho(B)$.

40. Suponga que cualesquiera k renglones de A son linealmente independientes mientras que cualesquiera $k + 1$ renglones de A son linealmente dependientes. Demuestre que $\rho(A) = k$.

41. Si A es una matriz de $n \times n$, demuestre que $\rho(A) < n$ si y sólo si existe un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

42. Sea A una matriz de $m \times n$. Suponga que para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ existe una $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Demuestre que $\rho(A) = m$.

43. Pruebe que el rango de una matriz es igual al número de pivotes en su forma escalonada por renglones. [*Sugerencia:* Demuestre que si la forma escalonada por renglones tiene k pivotes, entonces esa forma tiene exactamente k renglones linealmente independientes.]

MANEJO DE CALCULADORA

TI-85

Existe una forma sencilla para determinar el rango, la imagen y el espacio de los renglones de una matriz en la TI-85; encuentre la forma escalonada por renglones o la forma escalonada por renglones reducidos de la matriz. Por ejemplo, suponga que se introduce la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & -6 \\ 3 & 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces, como en la página 28, oprima las siguientes teclas:

[2nd] [MATRX] [F4] (ops) [F5] (rref) [ALPHA] [A] [ENTER]

El resultado es

rref A

[[1 0 1 −2]
[0 1 1 1]
[0 0 0 0]]

Es claro que $\rho(A) = 2$, $R_A = \text{gen}\,\{(1, 0, 1, -2), (0, 1, 1, 1)\}$; como $\rho(A) = 2$, A tiene dos columnas linealmente independientes, por lo que

$$C_A = \text{imagen } A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}, \text{ y } \nu(A) = 4 - 2 = 2$$

En los problemas 44 al 47 utilice una calculadora para encontrar el rango, la imagen, el espacio generado y la nulidad de la matriz dada.

44. $\begin{pmatrix} 0.37 & 0.48 & -0.70 & -1.16 \\ 0.46 & -0.39 & 2.09 & 0.83 \\ 0.52 & 0.87 & -1.57 & 1.04 \\ 0.67 & 0.35 & 0.29 & -0.33 \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} 187 & -46 & 512 & 653 & 512 \\ -35 & 51 & -223 & -207 & -325 \\ 257 & -148 & 958 & 1067 & 1162 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} 37 & 81 & -29 & 58 & 33 & -19 & 102 \\ -48 & 91 & 306 & 38 & 205 & 0 & -58 \\ 53 & 215 & -47 & -11 & -38 & 423 & 99 \\ -85 & 10 & 335 & -20 & 172 & 19 & -160 \\ -80 & 316 & 594 & 7 & 339 & 442 & -119 \\ -71 & 46 & -416 & -83 & 201 & -88 & 144 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} .0284 & -.0311 & -.0207 & .0431 & .0615 \\ -.0511 & -.1216 & -.1811 & .0904 & .0310 \\ -.0965 & -.4270 & -.5847 & .3574 & .2160 \\ .0795 & .0905 & .1604 & -.4730 & .0305 \\ -.0110 & -.3365 & -.4243 & .3101 & .5210 \end{pmatrix}$

MATLAB 4.7

1. Para cada matriz dada:
   a. Encuentre una base para el espacio nulo siguiendo el ejemplo 7. Esto incluye resolver el sistema homogéneo de ecuaciones adecuado.
   b. Verifique que el conjunto de vectores obtenido para cada problema es un conjunto independiente.
   c. (*Lápiz y papel*) Si el conjunto de vectores ha de ser una base para el espacio nulo, también debe demostrarse que cada vector en el espacio nulo se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de la base. Demuestre que cada vector en el espacio nulo, es decir, cada solución al sistema homogéneo resuelto en el inciso a), se puede escribir como una combinación lineal de los vectores encontrados en a).
   d. Para cada problema, encuentre las dimensiones del espacio nulo. Dé una explicación. ¿Cómo se relaciona la dimensión con el número arbitrario de variables que surgen en la solución del sistema homogéneo resuelto en a)?
   i.–vi. Problemas 7, 8 y 10 a 13 de la sección 4.7.

   vii. $\begin{pmatrix} -6 & -2 & -18 & -2 & -10 \\ -9 & 0 & -18 & 4 & -5 \\ 4 & 7 & 29 & 2 & 13 \end{pmatrix}$

2. **a.** **i.** Para el problema 13 de esta sección, encuentre la base para el espacio nulo siguiendo el ejemplo 7.
   ii. Sea **R = rref(A)**. Verifique que la base consiste en el único vector **B = [–R(1, 4); –R(2,4);–R(3,4);1]**.
   iii. Verifique que **A*B** = 0. ¿Por qué esperaría esto?

   b. **i.** Para la matriz $A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -18 & -2 & -10 \\ -9 & 0 & -18 & 4 & -5 \\ 4 & 7 & 29 & 2 & 13 \end{pmatrix}$ encuentre la base para el espacio nulo.
   ii. Sea **R = rref(A)** y sea

   B = [[–R(1,3);–R(2,3);1;0;0] [–R(1,5);–R(2,5);0;–R(3,5);1]]

   Verifique que las columnas de B sean los vectores de la base que encontró en el inciso b*i*).
   iii. Verifique que **A*B** = 0 y explique por qué debe ser así.

   c. Para las siguientes matrices A, encuentre **R = rref(A)** y la base para el espacio nulo formando una matriz B como se ilustra en los ejemplos de los incisos a) y b). Verifique que **A*B** = 0. (Para ayudar a reconocer el procedimiento para encontrar B: por ejemplo, en b), las columnas 3 y 5 de R no tienen pivotes, lo que indica que x_3 y x_5 eran variables arbitrarias. Las columnas 3 y 5 de R *no* son vectores en el espacio nulo, pero se puede encontrar una base para el espacio nulo usando adecuadamente los números en las columnas 3 y 5. Observe que la tercera y quinta posiciones en los vectores de la base son 1 o 0.)

   i. $A = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 8 & -5 & -1 \\ 5 & 0 & -5 & -5 & -3 \\ -7 & 0 & 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

   ii. **A = rand(4,6);A(:,4) = 1/3*A(:,2) – 2/7*A(:,3)**

3. **a.** MATLAB tiene un comando **null(A)** que producirá una base para el espacio nulo de A. (Produce una base ortonormal. Vea en la sección 4.9 una definición de ortonormal.)

i. Para cada matriz A en el problema 2 de esta sección de MATLAB, encuentre **N** = **null(A)**. Encuentre B, la matriz cuyas columnas forman una base para el espacio nulo usando el procedimiento del ejemplo 7.

ii. ¿Cuántos vectores hay en cada base? ¿Qué propiedad confirma esto?

iii. Considerando **rref([B N])** y **rref([N B])**, verifique que cada vector en la base para el espacio nulo determinado por el comando **null** es una combinación lineal de los vectores de la base encontrados en las columnas de B, y que cada vector columna en B es una combinación lineal de los vectores de la base encontrado con el comando **null**. Explique su razonamiento y el proceso. Explique por qué esta afirmación debe ser cierta.

b. El algoritmo usado por el comando **null** de MATLAB es numéricamente más estable que el proceso que incluye **rref**; es decir, **null** es mejor en cuanto a minimizar los errores de redondeo. Para la matriz A siguiente, encuentre **N** = **null(A)** y encuentre **B** como en el inciso a). Encuentre **A*B** y **A*N** y analice la forma en que esto proporciona alguna evidencia para la afirmación hecha al principio del inciso a).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 & 9 \\ -3 & 6 & 6 & 3.56 & 3 \\ 4.2 & -8.4 & -10 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Aplicación geométrica del espacio nulo

a. *(Lápiz y papel)* Argumente por qué una base para el espacio nulo de una matriz A de $m \times n$ será una base para el subespacio de todos los vectores en $\mathbb{R}^n$ perpendiculares (ortogonales) a los *renglones* de A.

b. Encuentre una base para el plano formado por todos los vectores perpendiculares a $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c. Encuentre una base para la recta perpendicular al plano generado por $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$.

Compare su respuesta con el producto cruz de dos vectores.

d. Encuentre una base para el subespacio de todos los vectores perpendiculares a

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

5. Aplicación del espacio nulo a sistemas de ecuaciones Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 & -5 & 4 & -4 \\ 9 & 2 & 4 & -10 & 9 & 8 \\ 5 & 7 & -7 & -2 & -5 & 3 \\ 1 & -7 & -8 & -9 & -6 & -7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 46 \\ 29 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a. Demuestre que **x** es una solución al sistema [A **b**]. (Utilice la multiplicación de matrices.)

b. Encuentre una base para el espacio nulo de A, formando una matriz cuyas columnas sean los vectores de la base.

c. Genere un vector aleatorio **w** que sea una combinación lineal de los vectores de la base encontrados en el inciso b). (Use la multiplicación de matrices.) Demuestre que **z** = **x** + **w** es una solución al sistema [A **b**]. Repita para otro vector **w**.

6. Para los siguientes conjuntos de vectores:

a. Sea A la matriz cuyos *renglones* son los vectores. Encuentre **rref(A)**. Utilice el comando ":" para encontrar la matriz C que consiste sólo de los renglones diferentes de cero de **rref(A)**. Sea **B = C**'. Explique por qué las columnas de B son una base para el espacio generado por los vectores. (Vea el ejemplo 6.)

b. Verifique que la base encontrada es linealmente independiente.

c. Verifique que cada vector en el conjunto original es una combinación lineal única de los vectores de la base. Describa cualquier patrón que descubra en los coeficientes de las combinaciones lineales.

i. $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\4\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

ii. $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\3\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\7\\2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\1\\4\\1\\5\end{pmatrix}\right\}$

iii. $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\-5\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\8\\-2\\3\\3\end{pmatrix}\right\}$

7. a. (*Lápiz y papel*) Suponga que quiere encontrar la base para la imagen (espacio de las columnas) de una matriz real A. Explique cómo puede usar **rref(A')** para hacer esto.

b. Para las matrices siguientes, encuentre una base para la imagen, formando una matriz cuyas columnas sean los vectores básicos. Verifique que cada columna de la matriz original es una combinación lineal única de los vectores de la base.

i–iv. Las matrices de los problemas 7 y 11 a 13 de esta sección.

v. **A = round(10*(2*rand(5)–1));A(:,2) = .5*A(:,1);**
A(:,4) = A(:,1)– 1/3*A(:,3)

8. a. Para cada matriz del problema 7 de esta sección de MATLAB, encuentre **rref(A)** y **rref(A')**.

b. Encuentre una base para el espacio de las columnas de A y por lo tanto la dimensión de ese espacio.

c. Encuentre una base para el espacio de los renglones de A y por lo tanto la dimensión de ese espacio.

d. Escriba una conclusión relacionando la dimensión del espacio de las columnas de A con la dimensión del espacio de los renglones de A.

e. ¿Qué tienen en común **rref(A)** y **rref(A')** y cómo se relaciona esto con el inciso d)?

9. Este problema explica otra forma de encontrar una base para un espacio generado por vectores de manera que la base consista en un subconjunto del conjunto original de vectores.

a. Recuerde (o resuelva) los problemas 3 y 7 de MATLAB 4.4. Si A es la matriz cuyas columnas son los vectores de un conjunto dado, concluya que las columnas de A correspondientes a las columnas sin pivote, en la forma escalonada reducida por renglones, no se necesitan para formar el espacio generado por el conjunto original de vectores.

b. Para los conjuntos de vectores en el problema 6 de esta sección de MATLAB, sea A la matriz cuyas *columnas* son los vectores en el conjunto dado.

i. Usando **rref(A)** para decidir qué vectores del conjunto original se pueden eliminar (no son necesarios), forme una matriz B que sea una submatriz de la A original [NOT **rref(A)**] que consista en el número mínimo de vectores del conjunto original necesarios para formar el espacio generado.

ii. Verifique que el subconjunto elegido (las columnas de la submatriz) sea linealmente independiente.

iii. Verifique que el número de vectores es el mismo que el número de vectores en la base determinada en el problema 6 de esta sección de MATLAB.

iv. Verifique que cada vector en la base encontrada en el problema 6 es una combinación lineal única de la base encontrada en este problema y que cada vector de esta base es una combinación lineal única de la base del problema 6. [*Sugerencia:* si C es la matriz cuyas columnas son los vectores de la base encontrados en el problema 6, observe **rref([B C])** y **rref([C B])**.]

c. Siga las instrucciones del inciso b) para el espacio de las columnas de las matrices en el problema 7 de esta sección de MATLAB.

10. Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$. Suponga que se quiere agregar algunos vectores al conjunto para crear una base para todo $\mathbb{R}^n$ que contenga al conjunto original. Para cada conjunto de vectores dado:

a. Sea A la matriz tal que la columna i de A es igual a $\mathbf{v}_i$. Forma la matriz $B = [A\ \ I]$, donde I es la matriz identidad de $n \times n$. Verifique que las columnas de B generan a todo $\mathbb{R}^n$.

b. Siga el procedimiento descrito en el problema 9 de esta sección de MATLAB para encontrar una base para el espacio de las columnas de B. Verifique que la base obtenida es una base para $\mathbb{R}^n$ y contiene al conjunto original de vectores.

i. Genere tres vectores aleatorios $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ en $\mathbb{R}^5$ usando MATLAB. (Primero verifique que sean linealmente independientes.)

ii. En $\mathbb{R}^4$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c. (*Lápiz y papel*) Explique por qué este procedimiento siempre dará una base para $\mathbb{R}^n$ que contiene el conjunto original de vectores linealmente independientes.

11. El comando de MATLAB **orth(A)** producirá una base para la imagen (espacio de las columnas) de la matriz A. (Produce una base ortogonal.) Para cada matriz del problema 7 de esta sección de MATLAB, utilice **orth(A)** para encontrar una base para el espacio de las columnas de A. Verifique que esta base contiene el mismo número de vectores que la base encontrada en el problema 7 y demuestre que todos los vectores de la base encontrada usando **orth** son una combinación lineal de la base encontrada en el problema 7. Demuestre además que los vectores de la base del problema 7 son una combinación lineal de la base encontrada con **orth**.

12. Encuentre una base para el espacio generado por los siguientes conjuntos:

a. En P_3: $\{-x^3 + 4x + 3, -x^3 - 1, x^2 - 2x, 3x^2 + x + 4\}$ [Vea el problema 4.4.9 de MATLAB.]

b. En M_{22}: $\left\{ \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -18 & -18 \\ 29 & -19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \right\}$

[Vea el problema 4.4.10 de MATLAB.]

13. a. Elija un valor para $n \geq 4$ y genere una matriz aleatoria A de $n \times n$ usando MATLAB. Encuentre **rref(A)** y **rank(A)**. (El comando **rank(A)** encuentra al rango de A.) Verifique que A es invertible.

b. Haga **B = A** y cambie una columna de B para que sea una combinación lineal de las columnas anteriores de B. Encuentre **rref(B)** y **rank(B)**. Verifique que B no es invertible.

c. Sea B la matriz del inciso b) después del cambio y cambie otra columna de B para que sea una combinación lineal de las columnas anteriores de B. Encuentre **rref(B)** y **rank(B)**. Verifique que B no es invertible.

d. Repita para otras cuatro matrices A. (Use diferentes valores de n.)

e. Con base a la evidencia reunida, obtenga una conclusión sobre la relación entre **rank(A)** y el número de pivotes en **rref(A)**.

f. Dé una conclusión sobre la relación entre **rank(A)**, el tamaño de A y la invertibilidad de A.

g. Forme una matriz de 5×5 con rango 2 y una matriz de 6×6 con rango 4.

14. a. Genere tres matrices aleatorias reales de $n \times m$ de tamaños distintos, con m diferente de n. Encuentre **rank(A)** y **rank(A')**.

b. Escoja un valor de n y genere tres matrices reales de $n \times n$, con diferente rango. (Vea el problema 13 de esta sección de MATLAB.) Encuentre **rank(A)** y **rank(A')**. Repita para otro valor de n.

c. Describa la relación entre **rank(A)** y **rank(A')**.

d. Describa la relación entre este problema y el problema 8 de esta sección.

15. Considere el sistema de ecuaciones en los problemas 1 a 3 de MATLAB 1.3. Para dos de las sistemas de cada problema, encuentre el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz aumentada. Formule una conclusión relacionando estos rangos y el hecho de que el sistema tenga o no una solución. Pruebe su conclusión con algún otro sistema en estos problemas. Demuestre su conclusión.

16. Exploración del rango de matrices especiales

a. Matrices cuadradas mágicas El comando **magic(n)** genera un cuadrado mágico de $n \times n$. (Un cuadrado mágico tiene la propiedad de que la suma de las columnas es igual a la suma de los renglones.) Genere tres matrices cuadradas mágicas para cada valor de $n = 3, \ldots, 9$ y encuentre sus rangos. ¿Cómo afecta el tamaño de la matriz al rango? Describa los patrones descubiertos.

Nota. Este problema está inspirado en una conferencia dada por Cleve Moler en la University of New Hampshire en 1991.

b. Examine el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ y de las siguientes dos matrices con este patrón. Describa el comportamiento del rango de estas matrices. Pruebe su conclusión. [*Sugerencia:* observe el renglón $j + 1$ – renglón j.]

c. Genere un vector aleatorio **u** de $n \times 1$ y un vector aleatorio **v** de $n \times 1$. Forme **A** = **u*v'**, una matriz aleatoria de $n \times n$. Encuentre el rango de A. Repita para otros tres juegos de **u** y **v**. Describa el rango de las matrices formadas de esta manera.

17. Rango y productos de matrices

a. Elija un valor para n y sea A una matriz invertible de $n \times n$. [*Sugerencia:* vea las matrices invertibles encontradas en problemas anteriores o genere una matriz aleatoria usando el comando **rand**. Verifique su invertibilidad.] Genere cuatro matrices de $n \times m$, algunas

cuadradas y otras no, con diferentes rangos. (Vea el problema 13 de esta sección de MATLAB para crear matrices con ciertos rangos.) Lleve un registro de cada rango. Para cada B (una de estas matrices), sea **C = A*B**. Encuentre **rank(C)**. Relacione rango (C) con rango (B). Complete la siguiente afirmación: si A es invertible y B tiene rango k, entonces AB tiene rango _____. Describa la relación entre este problema y el problema 10 de MATLAB 4.5.

b. Genere una matriz A de 6×6 con rango 4. Genere matrices aleatorias de $6 \times m$ con diferentes rangos, algunos mayores y otros menores que 4. Para cada B (una de estas cuatro matrices), encuentre **rank(A*B)** y relaciónelo con los rangos de A y B.

c. Repita el inciso b) con A, una matriz de 5×7 con rango 3 y matrices B de $7 \times m$.

d. Formule una conclusión relacionando rango (AB) con rango (A) y rango (B).

e. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Encuentre rango (A), rango (B) y rango (AB). Modifique la conclusión del inciso d). [*Sugerencia:* piense en desigualdades.]

PROBLEMA PROYECTO **18. Ciclos en digráficas** Las gráficas dirigidas, como las que siguen, se usan para describir situaciones físicas. Una de esas situaciones se refiere a circuitos eléctricos en donde la corriente fluye por las aristas. Al aplicar las leyes de Kirchhoff para determinar la corriente que pasa por cada arista, se pueden examinar las bajas de voltaje en los ciclos del diagrama. Sin embargo, no es necesario examinar todos los ciclos, ya que algunos ciclos se pueden formar a partir de otros. Así es necesario examinar una "base" para los ciclos cerrados, es decir, el mínimo número de ciclos que genera todos los demás.

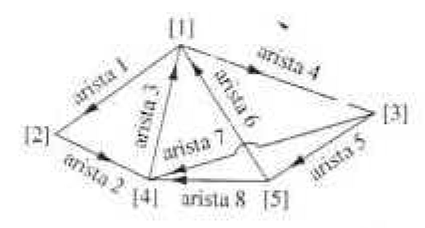
Los diagramas como el que sigue reciben el nombre de gráficas dirigidas, o **digráficas**. Un ciclo cerrado en una gráfica dirigida se llama **ciclo no dirigido**.

a. Cualquier digráfica tiene una matriz asociada llamada **matriz de incidencia nodo-arista**. Se define como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } j \text{ llega al nodo } i \\ -1 & \text{si la arista } j \text{ sale del nodo } i \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Es sencillo establecer (o introducir con MATLAB) una matriz de incidencia nodo-arista observando una arista a la vez. (Vea el problema 2 de MATLAB 1.5.)

Introduzca la matriz de incidencia A para la diagráfica siguiente. Observe que cada arista corresponde a una columna de A y que A será una matriz de $n \times m$, donde n es el número de nodos y m el número de aristas.



b. Un ciclo (ciclo cerrado) se puede representar por un vector de $m \times 1$ en donde cada elemento del vector corresponde al coeficiente de una arista. Por ejemplo, un ciclo en la digráfica anterior es iniciar en el nodo [3], luego arista 5, después por la arista 8 y

por el opuesto de la arista 7. Esto se puede expresar como arista 5 + arista 8 – arista 7, que se puede representar por el vector $m \times 1$: $(0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ -1\ 1)^t$.

i. Verifique que este vector está en el espacio nulo de A, la matriz de incidencia nodo-arista.

ii. Forme el vector correspondiente al ciclo que va del nodo [1] al nodo [2] al nodo [4] al nodo [3] y de regreso al nodo [1]. Verifique que este vector se encuentra en el espacio nulo de A.

c. Verifique que $\mathbf{x} = (1\ 1\ 2\ 0\ 0\ -1\ 0\ 1)^t$ está en el espacio nulo de A. Demuestre que este vector corresponde al ciclo que comienza en el nodo [1] y sigue arista 1 + arista 2 + arista 3 – arista 6 + arista 8 + arista 3.

d. Encuentre una base para el espacio nulo de A.

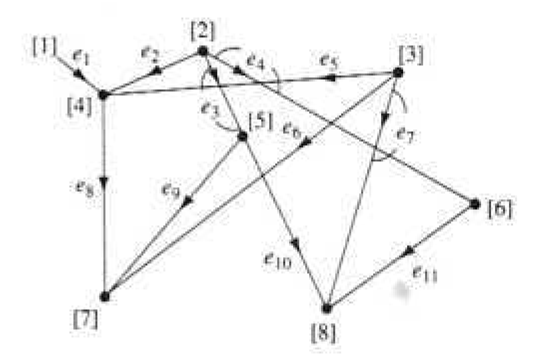
e. Para cada vector en la base, identifique el ciclo que corresponde al vector escribiendo las aristas en el orden que siguen. Dibújelo etiquetando las aristas y nodos.

f. Forme una combinación lineal de estos vectores básicos (del espacio nulo de A) usando coeficientes de 1 y -1. Identifique el ciclo que describe esta combinación lineal escribiendo las aristas en el orden que siguen, como se hizo en el inciso c). (Dibuje el ciclo). Repita para otra combinación lineal.

g. Identifique un ciclo en la digráfica que no esté en la base del espacio nulo o uno de los ciclos descritos en el inciso f). Escriba el vector correspondiente en el espacio nulo de A. Encuentre los coeficientes necesarios para expresar el vector como una combinación lineal de los vectores de la base para el espacio nulo. Dibuje (o describa de alguna manera) su ciclo y los ciclos básicos incluidos en la combinación lineal y muestre que su ciclo está formado por estos ciclos básicos.

Repita para otro ciclo.

h. Para el siguiente diagrama, introduzca la matriz de incidencia nodo-arista y repita los incisos d) a g) para esta digráfica. La etiqueta e_i se refiere a la arista i.



Nota. Este problema fue inspirado en una conferencia dada por Gilbert Strang en la University of New Hampshire en junio de 1991.

PROBLEMA PROYECTO

19. Subespacio suma y subespacio intersección Sean V y W subespacios de $\mathbb{R}^n$. El subespacio intersección se define como

$$U = V \cap W = \{\mathbf{z} \text{ en } \mathbb{R}^n \mid \mathbf{z} \text{ está en } V \text{ y } \mathbf{z} \text{ está en } W\}.$$

El subespacio suma se define como

$$S = V + W = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \text{ para alguna } \mathbf{v} \text{ en } V \text{ y alguna } \mathbf{w} \text{ en } W\}.$$

Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es una base para V y $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ es una base para W.

a. (*Lápiz y papel*) Verifique que U y S son subespacios.

b. (*Lápiz y papel*) Verifique que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ genera a S, el subespacio suma.

c. Para cada par de bases de V y W dadas, encuentre una base para $S = V + W$ y encuentre la dimensión de S. Verifique algunas respuestas generando un vector aleatorio en S (genere vectores aleatorios en V y W y súmelos) y demostrando que el vector es una combinación lineal de los vectores de la base que encontró.

i. Base para $V = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ Para $W = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\2\\3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

ii. Base para $V = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

Para $W = \left\{\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\5\\4\\2\\-8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\13\\18\\20\\-1\\-19\end{pmatrix}\right\}$

iii. Base para $V = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$

Base para $W = \left\{\begin{pmatrix}4\\3\\5\\4\\2\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\4\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-8\\0\\8\\8\\9\end{pmatrix}\right\}$

d. (*Lápiz y papel*) Sea $\overline{V}$ la matriz $[\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_k]$ y sea $\overline{W}$ la matriz $[\mathbf{w}_1, \ldots \mathbf{w}_m]$. Sea A la matriz $[\overline{V}\ \overline{W}]$. Suponga que $\mathbf{p}$ es un vector de $(k + m) \times 1$, *en el espacio nulo de* A. Sea $\mathbf{p} = \begin{pmatrix}\mathbf{a}\\\mathbf{b}\end{pmatrix}$, donde $\mathbf{a}$ es de $k \times 1$ y $\mathbf{b}$ es de $m \times 1$.

Demuestre que $\overline{V}\mathbf{a} = -\overline{W}\mathbf{b}$. Haciendo $\mathbf{z} = \overline{V}\mathbf{a}$, explique por qué se puede concluir que $\mathbf{z}$ está en $V \cap W$, la intersección de V y W.

e. (*Lápiz y papel*) Inversamente, suponga que $\mathbf{z}$ está en U, la intersección de V y W. Explique por qué $\mathbf{z} = \overline{V}\mathbf{x}$ para alguna $\mathbf{x}$ y $\mathbf{z} = \overline{W}\mathbf{y}$ para alguna $\mathbf{y}$. Argumente por qué el vector $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix}$ está en el espacio nulo de A.

f. (*Lápiz y papel*) Explique por qué se puede concluir que U, la intersección, es igual a

$$\{\overline{V}\mathbf{a} \mid \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \text{ está en el espacio nulo de } A\}$$

Concluya que si $\{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_q\}$ está en la base del espacio nulo de A y cada $\mathbf{s}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{b}_i \end{pmatrix}$ donde $\mathbf{a}_i$ es de $k \times 1$ y $\mathbf{b}_i$ es de $m \times 1$, entonces $\{\overline{V}\mathbf{a}_1, \ldots, \overline{V}\mathbf{a}_q\}$ genera a U.

g. Usando la información del inciso f), encuentre una base para $U = V \cap W$ para los pares de bases para V y W dados en el inciso c). Para cada par, encuentre la dimensión de U.

Verifique algunas respuestas. Verifique que el conjunto de vectores que encontró es linealmente independiente y muestre que una combinación lineal de vectores en el conjunto está en V y en W.

h. De su trabajo anterior, dé una conclusión relacionando las dimensiones de V, W, U y S.

4.8 CAMBIO DE BASE

En $\mathbb{R}^2$ se expresaron vectores en términos de la base canónica $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. En $\mathbb{R}^n$ se definió la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. En P_n se definió la base estándar como $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Estas bases se usan ampliamente por lo sencillo que es trabajar con ellas. Pero en ocasiones ocurre que es más conveniente alguna otra base. Existe un número infinito de bases para escoger, ya que en un espacio vectorial de dimensión n *cualesquiera n* vectores linealmente independientes forman una base. En esta sección se verá cómo cambiar de una base a otra mediante el cálculo de cierta matriz.

Comenzamos con un ejemplo sencillo. Sean $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces, $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es la base canónica en $\mathbb{R}^2$. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Como $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes (porque $\mathbf{v}_1$ no es un múltiplo de $\mathbf{v}_2$), $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una segunda base en $\mathbb{R}^2$. Sea $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ un vector en $\mathbb{R}^2$. Esta notación significa que

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2$$

Es decir, $\mathbf{x}$ está expresado en términos de los vectores de la base B_1. Para hacer hincapié en este hecho, se escribe

$$(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Como B_2 es otra base en $\mathbb{R}^2$, existen escalares c_1 y c_2 tales que

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \tag{1}$$

Una vez que se encuentran estos escalares, se puede escribir

$$(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

para indicar que $\mathbf{x}$ está ahora expresado en términos de los vectores en B_2. Para encontrar los números c_1 y c_2, se escribe la base anterior ($\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$) en términos de la nueva base ($\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$). Es sencillo verificar que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \tfrac{3}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \tfrac{2}{5}\mathbf{v}_1 - \tfrac{3}{5}\mathbf{v}_2 \tag{2}$$

y

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5}\mathbf{v}_1 + \tfrac{1}{5}\mathbf{v}_2 \tag{3}$$

es decir,

$$(\mathbf{u}_1)_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (\mathbf{u}_2)_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Entonces

de (2) y (3)

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 = x_1(\tfrac{2}{5}\mathbf{v}_1 - \tfrac{3}{5}\mathbf{v}_2) + x_2(\tfrac{1}{5}\mathbf{v}_1 + \tfrac{1}{5}\mathbf{v}_2) \\ &= (\tfrac{2}{5}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2)\mathbf{v}_1 + (-\tfrac{3}{5}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2)\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Así, de (1)

$$\begin{aligned} c_1 &= \tfrac{2}{5}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 \\ c_2 &= -\tfrac{3}{5}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 \end{aligned}$$

o

$$(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \\ -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, entonces

$$(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{13}{5} \end{pmatrix}$$

Verificación.

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{5}\mathbf{v}_1 - \tfrac{13}{5}\mathbf{v}_2 &= \tfrac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \tfrac{13}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{13}{5} \\ \frac{6}{5} - \frac{26}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

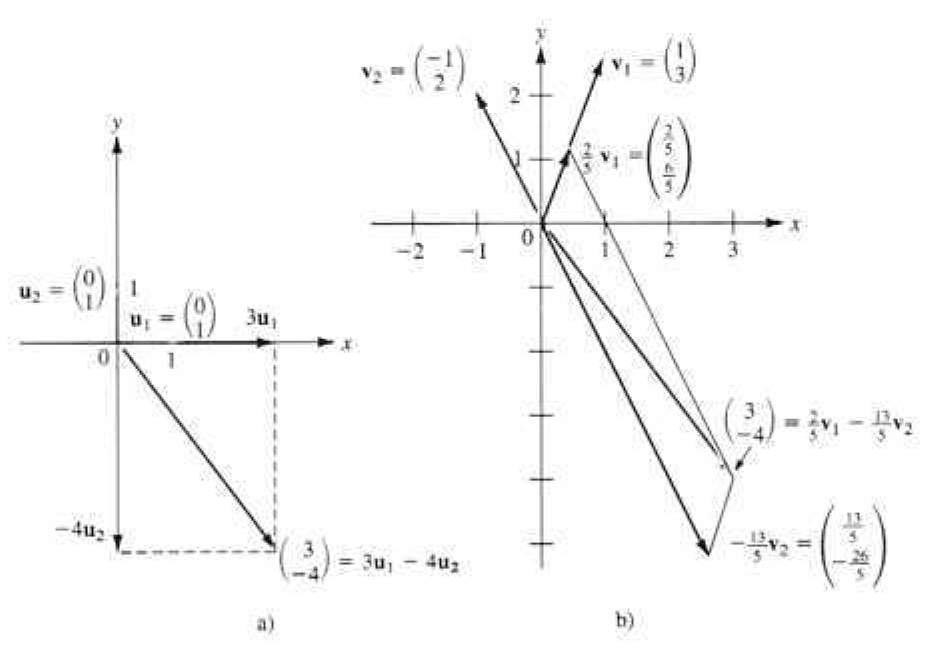


Figura 4.4 a) Expresión de $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en términos de la base canónica $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
b) Expresión de $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en términos de la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

La matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ se llama **matriz de transición** de B_1 a B_2, y se ha demostrado que

$$(\mathbf{x})_{B_2} = A(\mathbf{x})_{B_1} \tag{4}$$

En la figura 4.4 se ilustran las dos bases $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Es sencillo generalizar este ejemplo, pero primero es necesario ampliar la notación. Sea $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ dos bases para un espacio vectorial real V de dimensión n. Sea $\mathbf{x} \in V$. Entonces $\mathbf{x}$ se puede escribir en términos de ambas bases:

$$\mathbf{x} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \cdots + b_n\mathbf{u}_n \tag{5}$$

y

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n \tag{6}$$

donde las b_i y c_i son números reales. De donde $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ denota la representación de $\mathbf{x}$ en términos de la base B_1. Esto no es ambiguo porque los coeficientes b_i en (5) son únicos, según el teorema 4.6.1, página 338. De igual manera, $(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ tiene un significado similar. Suponga que $\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$ y $\mathbf{w}_2 = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \cdots + b_n\mathbf{u}_n$. Entonces $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (a_1 + b_1)\mathbf{u}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (a_n + b_n)\mathbf{u}_n$, de manera que

$$(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)_{B_1} = (\mathbf{w}_1)_{B_1} + (\mathbf{w}_2)_{B_1}$$

Es decir, en la nueva notación se pueden sumar vectores igual que como se suman en $\mathbb{R}^n$. Los coeficientes de la "suma" de vectores son las sumas de los coeficientes de los dos vectores individuales. Más aún, es sencillo demostrar que

$$\alpha(\mathbf{w})_{B_1} = (\alpha\mathbf{w})_{B_1}$$

Ahora, como B_2 es una base, cada $\mathbf{u}_j$ en B_1 se puede escribir como una combinación lineal de las $\mathbf{v}_i$. Así, existe un conjunto único de escalares $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ tales que para $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\mathbf{u}_j = a_{1j}\mathbf{v}_1 + a_{2j}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{nj}\mathbf{v}_n \tag{7}$$

o sea

$$(\mathbf{u}_j)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \tag{8}$$

DEFINICIÓN 1 **Matriz de transición** La matriz A de $n \times n$ cuyas columnas están dadas por (8) se llama **matriz de transición** de la base B_1 a la base B_2. Esto es,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \qquad\quad \uparrow$$

$$(\mathbf{u}_1)_{B_2} \; (\mathbf{u}_2)_{B_2} \; (\mathbf{u}_3)_{B_2} \; \cdots \; (\mathbf{u}_n)_{B_2}$$

Nota. Si se cambia el orden en el que se escriben los vectores de la base, entonces también debe cambiarse el orden de las columnas en la matriz de transición.

TEOREMA 1 Sean B_1 y B_2 bases para un espacio vectorial V. Sea A la matriz de transición de B_1 a B_2. Entonces para todo $\mathbf{x} \in V$

$$\boxed{(\mathbf{x})_{B_2} = A(\mathbf{x})_{B_1}} \tag{10}$$

Demostración Se usa la representación de $\mathbf{x}$ dada en (5) y (6):

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &\overset{\text{de (5)}}{=} b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \cdots + b_n\mathbf{u}_n \\
&\overset{\text{de (7)}}{=} b_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{v}_n) + b_2(a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{v}_n) \\
&\quad + \cdots + b_n(a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{v}_n) \\
&= (a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n)\mathbf{v}_1 + (a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n)\mathbf{v}_2 + \cdots \\
&\quad + (a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \cdots + a_{nn}b_n)\mathbf{v}_n \\
&\overset{\text{de (6)}}{=} c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n
\end{aligned} \tag{11}$$

Así

$$(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \overset{\text{de (11)}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + & a_{12}b_2 + & \cdots & + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + & a_{22}b_2 + & \cdots & + a_{2n}b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_1 + & a_{n2}b_2 + & \cdots & + a_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A(\mathbf{x})_{B_1} \tag{12}$$

◆

Antes de dar más ejemplos, se probará un teorema que es muy útil para los cálculos.

TEOREMA 2 Si A es la matriz de transición de B_1 a B_2, entonces A^{-1} es la matriz de transición de B_2 a B_1.

Demostración Sea C la matriz de transición de B_2 a B_1. Entonces de (10) se tiene

$$(\mathbf{x})_{B_1} = C(\mathbf{x})_{B_2} \tag{13}$$

Pero $(\mathbf{x})_{B_2} = A(\mathbf{x})_{B_1}$ y sustituyendo esto en (13) se obtiene

$$(\mathbf{x})_{B_1} = CA(\mathbf{x})_{B_1} \tag{14}$$

Se deja como ejercicio (vea el problema 39) demostrar que (14) se cumple para todo $\mathbf{x}$ en V sólo si $CA = I$. Por lo tanto, del teorema 1.8.7, página 112, $C = A^{-1}$, y el teorema queda demostrado. ✦

Observación. Este teorema hace especialmente sencillo encontrar la matriz de transición a partir de una base canónica $B_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ en $\mathbb{R}^n$ a cualquier otra base en $\mathbb{R}^n$. Sea $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ cualquier otra base. Sea C la matriz cuyas columnas son los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Entonces C es la matriz de transición de B_2 a B_1 ya que cada vector $\mathbf{v}_i$ está expresado ya en términos de la base canónica. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, la matriz de transición de B_1 a B_2 es C^{-1}.

Procedimiento para encontrar la matriz de transición de la base canónica a la base $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

i. Se escribe la matriz C cuyas columnas son $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

ii. Se calcula C^{-1}. Ésta es la matriz de transición que se busca.

Nota. Como en la página 376, la matriz de transición es única respecto al orden en que se escriben los vectores de la base B_2.

EJEMPLO 1 **Expresión de vectores en $\mathbb{R}^3$ en términos de una nueva base** En $\mathbb{R}^3$ sea $B_1 = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ y sea $B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$. Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, escriba $\mathbf{x}$ en términos de los vectores en B_2.

Solución Primero se verifica que B_2 es una base. Esto es evidente ya que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$

Como $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, de inmediato se ve que la matriz de transición C, de B_2 a B_1 está dada por

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Así, por el teorema 2 la matriz de transición A de B_1 a B_2 es

$$A = C^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, entonces

$$(\mathbf{x})_{B_2} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Para verificar, observe que

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{7}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ◆

EJEMPLO 2 **Expresión de polinomios en P_2 en términos de una nueva base** En P_2 la base canónica es $B_1 = \{1, x, x^2\}$. Otra base es $B_2 = \{4x - 1, 2x^2 - x, 3x^2 + 3\}$. Si $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$, escriba p en términos de los polinomios en B_2.

Solución Primero verifique que B_2 es una base. Si $c_1(4x - 1) + c_2(2x^2 - x) + c_3(3x^2 + 3) = 0$ para toda x, entonces al rearreglar los términos se obtiene

$$(-c_1 + 3c_3)1 + (4c_1 - c_2)x + (2c_2 + 3c_3)x^2 = 0$$

Pero como $\{1, x, x^2\}$ es un conjunto linealmente independiente, se debe tener

$$\begin{aligned} -c_1 \quad\quad + 3c_3 &= 0 \\ 4c_1 - c_2 \quad\quad &= 0 \\ 2c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

El determinante de este sistema homogéneo es $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$, lo que significa que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ es la única solución. Ahora $(4x-1)_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(2x^2 - x)_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $(3 + 3x^2)_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Así,

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición de B_2 a B_1 de manera que

$$A = C^{-1} = \tfrac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición de B_1 a B_2. Como $(a_0 + a_1x + a_2x^2)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, se tiene

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2)_{B_2} = \tfrac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \tfrac{1}{27}[-3a_0 + 6a_1 + 3a_2] \\ \tfrac{1}{27}[-12a_0 - 3a_1 + 12a_2] \\ \tfrac{1}{27}[8a_0 + 2a_1 + a_2] \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si $p(x) = 5x^2 - 3x + 4$, entonces

$$(5x^2 - 3x + 4)_{B_2} = \tfrac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tfrac{15}{27} \\ \tfrac{21}{27} \\ \tfrac{31}{27} \end{pmatrix}$$

o

$$5x^2 - 3x + 4 \overset{\text{verifique esto}}{=} -\tfrac{15}{27}(4x-1) + \tfrac{21}{27}(2x^2 - x) + \tfrac{31}{27}(3x^2 + 3)$$ ◆

EJEMPLO 3 **Conversión de una base a otra en $\mathbb{R}^2$** Sean $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ dos bases en $\mathbb{R}^2$. Si $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, exprese $\mathbf{x}$ en términos de los vectores de B_2.

Solución Este problema es un poco más difícil porque ninguna de las dos bases es canónica. Deben expresarse los vectores de B_1 como una combinación lineal de los vectores en B_2. Esto es, deben encontrarse constantes $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}$ tales que

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Esto conduce a los siguiente sistemas:

$$\begin{aligned} 2a_{11} - 5a_{21} &= 3 \\ 4a_{11} + 3a_{21} &= 1 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} 2a_{12} - 5a_{22} &= 2 \\ 4a_{12} + 3a_{22} &= -1 \end{aligned}$$

Las soluciones son $a_{11} = \frac{7}{13}$, $a_{21} = -\frac{5}{13}$, $a_{12} = \frac{1}{26}$ y $a_{22} = -\frac{5}{13}$. Entonces

$$A = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}$$

y

$$(\mathbf{x})_{B_2} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{26}(14b_1 + b_2) \\ -\frac{10}{26}(b_1 + b_2) \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, sea $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ (en base canónica); entonces

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_1} = b_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

de manera que

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_2} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{41}{26} \\ -\frac{20}{26} \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \overset{\text{¡verifique!}}{=} \frac{41}{26}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{20}{26}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

◆

Usando la notación de esta sección se puede deducir una manera conveniente para determinar si un conjunto de vectores dado en cualquier espacio vectorial de dimensión finita es linealmente dependiente o independiente.

TEOREMA 3 Sea $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base del espacio vectorial V de dimensión n. Suponga que

$$(\mathbf{x}_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, (\mathbf{x}_2)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, (\mathbf{x}_n)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes si y sólo si $\det A \neq 0$.

Demostración Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ las columnas de A. Suponga que

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \tag{15}$$

Después usando la suma definida en la página 375, se puede escribir (15) como

$$(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n)_{B_1} = (\mathbf{0})_{B_1} \tag{16}$$

La ecuación (16) da dos representaciones del vector cero en V en términos de los vectores de la base B_1. Como la representación de un vector en términos de los vectores de la base es única (por el teorema 4.6.1, página 338) se concluye que

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \tag{17}$$

donde el cero de la derecha es el vector cero en $\mathbb{R}^n$. Pero esto prueba el teorema ya que la ecuación (17) incluye a las columnas de A, que son linealmente independientes si y sólo si $\det A \neq 0$. ◆

EJEMPLO 4 **Determinación de si tres polinomios en P_2 son linealmente dependientes o independientes** En P_2, determine si los polinomios $3 - x$, $2 + x^2$ y $4 + 5x - 2x^2$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución Usando la base $B_1 = \{1, x, x^2\}$ se tiene $(3 - x)_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(2 + x^2)_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y

$(4+5x-2x^2)_{B_1}=\begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix}$. Entonces $\det A=\begin{vmatrix}3&2&4\\-1&0&5\\0&1&-2\end{vmatrix}=-23\neq 0$, con lo que los polinomios son independientes. ◆

EJEMPLO 5 **Determinación de si cuatro matrices de 2 × 2 son linealmente dependientes o independientes** En M_{22} determine si las matrices $\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&3\\-1&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1&4\\4&9\end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución Usando la base estándar $B_1=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\right\}$ se obtiene

$$\det A=\begin{vmatrix}1&-1&2&1\\2&3&-1&4\\3&-1&0&4\\6&1&1&9\end{vmatrix}=0$$

de manera que las matrices son dependientes. Observe que $\det A=0$ porque el cuarto renglón es la suma de los tres primeros. Además observe que

$$-29\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}-7\begin{pmatrix}-1&3\\-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}+20\begin{pmatrix}1&4\\4&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

lo que ilustra que las cuatro matrices son linealmente dependientes. ◆

PROBLEMAS 4.8

Autoevaluación

I. La matriz de transición en $\mathbb{R}^2$ de la base $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ a la base $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}\right\}$ es _____.

a. $\begin{pmatrix}2&-3\\3&-4\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}-2&3\\-3&-4\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}-4&3\\-3&2\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}-4&-3\\3&2\end{pmatrix}$

II. La matriz de transición en $\mathbb{R}^2$ de la base $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}\right\}$ a la base $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ es _____.

a. $\begin{pmatrix}2&-3\\3&-4\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}2&3\\-3&-4\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}-4&3\\-3&2\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}-4&-3\\3&2\end{pmatrix}$

III. La matriz de transición en P_1 de la base $\{1, x\}$ a la base $\{2 + 3x, -4 + 5x\}$ es _____.

a. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ **c.** $\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ **d.** $\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

En los problemas 1 al 5 escriba $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ en términos de la base dada.

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, donde $ad - bc \neq 0$

En los problemas 6 al 10 escriba $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ en términos de la base dada.

6. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ e \\ f \end{pmatrix}$, donde $adf \neq 0$

En los problemas 11 al 13 escriba los polinomios $a_0 + a_1x + a_2x^2$ en P_2 en términos de la base dada.

11. $1, x - 1, x^2 - 1$ **12.** $6, 2 + 3x, 3 + 4x + 5x^2$ **13.** $x + 1, x - 1, x^2 - 1$

14. En M_{22} escriba la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ en términos de la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$.

15. En P_3 exprese el polinomio $2x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ en términos de la base polinomial $1, 1 + x, x + x^2, x^2 + x^3$.

16. En P_3 exprese el polinomio $4x^2 - x + 5$ en términos de la base polinomial $1, 1 - x, (1 - x)^2, (1 - x)^3$.

17. En $\mathbb{R}^2$ suponga que $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, donde $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. Escriba $\mathbf{x}$ en términos de la base $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Respuestas a la autoevaluación

I. c **II.** a **III.** [illegible]

18. En $\mathbb{R}^2$, $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, donde $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. Escriba **x** en términos de la base $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

19. En $\mathbb{R}^3$, $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, donde $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Escriba **x** en términos de la base $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$.

20. En P_2, $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, donde $B_1 = \{1 - x, 3x, x^2 - x - 1\}$. Escriba **x** en términos de $B_2 = \{3 - 2x, 1 + x, x + x^2\}$.

En los problemas 21 al 28 use el teorema 2 para determinar si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente.

21. En P_2: $2 + 3x + 5x^2, 1 - 2x + x^2, -1 + 6x^2$

22. En P_2: $-3 + x^2, 2 - x + 4x^2, 4 + 2x$

23. En P_2: $x + 4x^2, -2 + 2x, 2 + x + 12x^2$

24. En P_2: $-2 + 4x - 2x^2, 3 + x, 6 + 8x$

25. En P_3: $1 + x^2, -1 - 3x + 4x^2 + 5x^3, 2 + 5x - 6x^3, 4 + 6x + 3x^2 + 7x^3$

26. En M_{22}: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$

27. En M_{22}: $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

28. En M_{22}: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & e \\ f & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ j & k \end{pmatrix}$ donde $acfk \neq 0$

29. En P_n sean $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$, $n + 1$ polinomios tales que $p_i(0) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Demuestre que los polinomios son linealmente dependientes.

* Cálculo

30. En el problema 29, en lugar de $p_i(0) = 0$, suponga que $p_i^{(j)} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n + 1$ y para alguna j con $1 \leq j \leq n$, donde $p_i^{(j)}$ denota la j-ésima derivada de p_i. Demuestre que los polinomios son linealmente dependientes en P_n.

31. En M_{mn} sean $A_1, A_2, \ldots, A_{mn}$, mn matrices cuyas componentes en la posición 1,1 son cero. Demuestre que las matrices son linealmente dependientes.

***32.** Suponga que los ejes x y y en el plano se rotan en sentido positivo (al contrario de las manecillas del reloj) un ángulo θ (medido en radianes). Esto da nuevos ejes que se denotan por (x', y'). ¿Cuáles son las coordenadas x, y de los vectores de la base **i** y **j** rotados?

33. Demuestre que la matriz del "cambio de coordenadas" en el problema 32 está dada por $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

34. Si en los problemas 32 y 33, $\theta = \pi/6 = 30°$, escriba el vector $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ en términos de los nuevos ejes coordenados x' y y'.

35. Si $\theta = \pi/4 = 45°$, escriba $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ en términos de los nuevos ejes coordenados.

36. Si $\theta = 2\pi/3 = 120°$, escriba $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ en términos de los nuevos ejes coordenados.

37. Sea $C = (c_{ij})$ una matriz invertible de $n \times n$ y sea $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para el espacio vectorial V. Sea

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}_{B_1}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix}_{B_1}, \ldots, \mathbf{c}_n = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}_{B_1}$$

Demuestre que $B_2 = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ es una base para V.

38. Sean B_1 y B_2 dos bases para el espacio vectorial V de dimensión n y sea C la matriz de transición de B_1 a B_2. Demuestre que C^{-1} es la matriz de transición de B_2 a B_1.

39. Demuestre que $(\mathbf{x})_{B_1} = CA(\mathbf{x})_{B_1}$ para toda $\mathbf{x}$ en un espacio vectorial V si y sólo si $CA = I$. [*Sugerencia:* Sea $\mathbf{x}_i$ el vector i en B_1. Entonces $(\mathbf{x}_i)_{B_1}$ tiene un uno en la posición i y un cero en otra parte. ¿Qué puede decirse sobre $CA(\mathbf{x}_i)_{B_1}$?]

MATLAB 4.8

1. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, donde $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Observe que B es una base para $\mathbb{R}^2$. Para $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^2$, $(\mathbf{w})_B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ significa que $\mathbf{w} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$.

M **a.** Para los vectores $\mathbf{w}$ dados, escriba el sistema de ecuaciones para encontrar $(\mathbf{w})_B$, es decir, encuentre a y b y resuelva a mano. Verifique dando **lincomb(v1,v2,w)**. (Use el archivo *lincomb.m.*)

i. $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **ii.** $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. (*Lápiz y papel*) En general, explique por qué $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es una solución al sistema cuya matriz aumentada es $[\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2 \,|\, \mathbf{w}]$.

2. Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nos referiremos al vector i en B como $\mathbf{v}_i$.

a. Verifique que B es una base para $\mathbb{R}^4$.

b. (*Lápiz y papel*) Escriba el sistema de ecuaciones para encontrar $(\mathbf{w})_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, las coordenadas de **w** con respecto a B. Demuestre que $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4 \mid \mathbf{w}]$ es la matriz aumentada para el sistema.

c. Resuelva el sistema para $(\mathbf{w})_B$. Verifique que $\mathbf{w} = A(\mathbf{w})_B$, donde $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4]$.

d. Para las bases $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ y los vectores **w** dados, encuentre $(\mathbf{w})_B$ y verifique que $\mathbf{w} = A(\mathbf{w})_B$, donde $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4]$.

i. $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ .5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \\ 2.5 \end{pmatrix} \right\}$

w = round(10*(2*rand(4,1)–1))

ii. Para B, genere cuatro vectores aleatorios de 4 × 1. (Verifique que forman una base.) Para **w**, genere un vector aleatorio de 4 × 1.

3. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ como en el problema 2a) de esta sección de MATLAB. Sea

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a. (*Lápiz y papel*) Argumente por qué si encuentra **rref** de la matriz $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4\ \mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \mathbf{w}_3\ \mathbf{w}_4] = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4$ **eye(4)**], entonces la 5ª columna de **rref** es $(\mathbf{w}_1)_B$, la 6ª columna es $(\mathbf{w}_2)_B$, etcétera.

b. Encuentre $(\mathbf{w}_1)_B$, $(\mathbf{w}_2)_B$, $(\mathbf{w}_3)_B$ y $(\mathbf{w}_4)_B$. Forme C, la matriz cuya i-ésima columna es igual a $(\mathbf{w}_i)_B$. Verifique que C es igual a la inversa de $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4]$. Use las observaciones del inciso a) para explicar por qué.

c. Sea $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Observe que $\mathbf{w} = 1\mathbf{w}_1 + (-2\mathbf{w}_2) + 3\mathbf{w}_3 + 4\mathbf{w}_4$.

i. Resuelva $[A \mid \mathbf{w}] = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4 \mid \mathbf{w}]$ para encontrar $(\mathbf{w})_B$.

ii. Verifique que $C\mathbf{w} = A^{-1}\mathbf{w} = (\mathbf{w})_B$. [Aquí, C es la matriz del inciso b).]

iii. (*Lápiz y papel*) C se llama matriz de transición, ¿de dónde a dónde? Usando el subinciso ii) y recordando lo que son las columnas de C, explique por qué

$$(\mathbf{w})_B = 1(\mathbf{w}_1)_B - 2(\mathbf{w}_2)_B + 3(\mathbf{w}_3)_B + 4(\mathbf{w}_4)_B$$

d. Repita el inciso c) para B y **w** en el problema 2d*i*) en esta sección de MATLAB.

4. a. Lea el problema 9 de MATLAB 4.4. Explique por qué ahí se encontraron las coordenadas de un polinomio en términos de la base canónica para polinomios.

b. Resuelva los problemas 14 a 16 de esta sección.

5. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3,\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$

Sea $C = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\9\\8\end{pmatrix}\right\}$

a. Verifique que B y C son bases para $\mathbb{R}^3$. Haga $W = [\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \mathbf{w}_3]$ y $V = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$.

b. (*Lápiz y papel*) Escriba los tres sistemas de ecuaciones necesarios para expresar cada vector en B como una combinación lineal de vectores en C. Explique por qué las soluciones a estos sistemas se pueden encontrar resolviendo el (los) sistema(s) con la matriz aumentada $[\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \mathbf{w}_3 \mid \mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$.

c. Resuelva el (los) sistema(s) para encontrar $(\mathbf{v}_1)_C$, $(\mathbf{v}_2)_C$ y $(\mathbf{v}_3)_C$ y forme la matriz $D = [(\mathbf{v}_1)_C\ (\mathbf{v}_2)_C\ (\mathbf{v}_3)_C]$.

d. Sea $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$. Encuentre $(\mathbf{x})_B$ y $(\mathbf{x})_C$. Verifique que $(\mathbf{x})_C = D(\mathbf{x})_B$.

Repita para un vector aleatorio $\mathbf{x}$ de 3×1.

e. Con W y V dados en el inciso a), encuentre $W^{-1}V$ y compárelo con D.

f. Repita los incisos a) a e) con

$$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\8\\9\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad C = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\.5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\4\\1.5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\4\\10\\2.5\end{pmatrix}\right\},$$

donde $\mathbf{x}$ es un vector aleatorio de 4×1.

g. (*Lápiz y papel*) Explique por qué $W^{-1}V = D$ en dos formas:

i. Basado en los procesos de solución de $[W|V]$ para encontrar D.

ii. Interpretando W^{-1} y V como matrices de transición que incluyen las bases canónicas.

6. Empleando lo aprendido en el problema 5 de esta sección de MATLAB:

a. Trabaje los problemas 18 al 20.

b. Genere una base aleatoria B para $\mathbb{R}^5$ y una base aleatoria C para $\mathbb{R}^5$. Encuentre la matriz de transición, T, de B a C. Verifique su respuesta generando un vector aleatorio $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^5$, encontrando $(\mathbf{x})_B$ y $(\mathbf{x})_C$ y mostrando que $T(\mathbf{x})_B = (\mathbf{x})_C$.

7. Sean B y C como se dieron en el problema 5a) de esta sección de MATLAB. Sea D la base:

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\8\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\7\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}.5\\1\\.5\end{pmatrix}\right\}$$

a. Encuentre T, la matriz de transición de B a C. Encuentre S, la matriz de transición de C a D. Encuentre K, la matriz de transición de B a D.

b. Dé una conclusión sobre la manera de encontrar K a partir de T y S. Pruebe su conclusión. Explique su razonamiento.

c. Repita los incisos a) y b) para tres bases aleatorias (B, C y D) para $\mathbb{R}^4$.

8. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$. Sea $A = \begin{pmatrix}5 & -6 & 4\\3 & -19 & 19\\3 & -24 & 24\end{pmatrix}$.

a. Verifique que $A\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2$ y $A\mathbf{v}_3 = 5\mathbf{v}_3$.

b. Suponga que $\mathbf{x} = -1\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3$. Observe que $(\mathbf{x})_B = \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$. Encuentre $\mathbf{z} = A\mathbf{x}$, después encuentre $(\mathbf{z})_B$ y verifique que $(\mathbf{z})_B = D(\mathbf{x})_B$, donde $D = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

c. Sea $\mathbf{x} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3$. Repita el inciso b) para otros tres juegos de a, b y c.

d. Sea $V = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$. Demuestre que $A = VDV^{-1}$.

e. Repita los incisos a) a d) para

$$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\9\\8\end{pmatrix}\right\} \qquad A = \begin{pmatrix}37 & -33 & 28\\48.5 & -44.5 & 38.5\\12 & -12 & 11\end{pmatrix}$$

Verifique que $A\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = 4\mathbf{v}_2$ y $A\mathbf{v}_3 = .5\mathbf{v}_3$ y utilice

$$D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & .5\end{pmatrix}$$

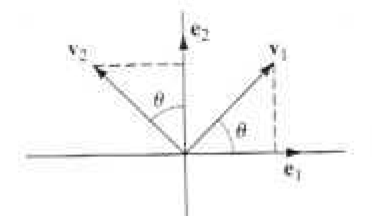
f. (*Lápiz y papel*) Suponga que $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base y $A\mathbf{v}_1 = r\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = s\mathbf{v}_2$ y $A\mathbf{v}_3 = t\mathbf{v}_3$. Suponga que $\mathbf{x} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3$. Pruebe que $(\mathbf{z})_B = D(\mathbf{x})_B$, donde $\mathbf{z} = A\mathbf{x}$ y $D = \begin{pmatrix}r & 0 & 0\\0 & s & 0\\0 & 0 & t\end{pmatrix}$.

Usando este hecho y pensando en términos de matrices de transición, explique por qué $A = VDV^{-1}$, donde $V = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$.

9. Cambio de base por rotación en $\mathbb{R}^2$ Sean $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ la base canónica para $\mathbb{R}^2$, donde $\mathbf{e}_1$ es un vector unitario a lo largo del eje x y $\mathbf{e}_2$ es un vector unitario a lo largo del eje y. Si se rotan los ejes un ángulo θ en sentido positivo alrededor del origen, entonces $\mathbf{e}_1$ rota a un vector $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{e}_2$ rota a un vector $\mathbf{v}_2$ tal que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$.

a. (*Lápiz y papel*) Demuestre que

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \text{sen}(\theta)\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}-\text{sen}(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}$$



b. Sea $V = [\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2]$. Entonces $\mathbf{v}_1 = V\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{v}_2 = V\mathbf{e}_2$. Exploraremos la geometría de $\mathbf{w} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$, es decir, la geometría de las combinaciones lineales en términos de la nueva base. Nos interesa la relación de las combinaciones lineales con la rotación.

Suponga que $\mathbf{x} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$. Entonces $\mathbf{w} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = V\mathbf{x}$ representa el vector $\mathbf{x}$ rotado en sentido positivo un ángulo θ alrededor del origen.

El programa de MATLAB que sigue ayuda a visualizar esta geometría. Grafica los vectores como segmentos de recta que comienzan en el origen. El vector $\mathbf{x}$ se grafica en rojo y el vector $\mathbf{w}$ en azul. Observe cómo $\mathbf{w}$ (el vector azul) es la rotación positiva θ de $\mathbf{v}$ (el vector rojo). Si está usando la versión 4.0 de MATLAB, dé el comando **plot** primero y después los dos comandos de **axis**. Vea la gráfica después de los comandos **axis**.

Precaución. La impresión de la gráfica producida directamente de la pantalla no mostrará longitudes iguales ni los ángulos rectos como tales.

```
a = 1;b = 2;                          (viendo v1 + 2v2)
x = [a;b];M = sqrt(x'*x);
th = pi/2;                            (suponiendo θ = π/2)
v1 = [cos(th);sin(th)]
v2 = [-sin(th);cos(th)]
V = [v1 v2]
w = V*x
axis('square')
axis([-M M -M M])
plot([0 x(1)], [0 x(2)], 'r', [0 w(1)], [0 w(2)], 'b')
grid
```

Repita las instrucciones anteriores, modificando los valores para a y b.

Repita las instrucciones anteriores para $\theta = -\pi/2$, $\pi/4$, $-\pi/4$, $2\pi/3$ y un ángulo arbitrario. Para cada ángulo, elija dos a y b. Cuando termine con esta parte dé el comando **axis** para borrar la escala en los ejes. Si usa MATLAB 4.0, dé **axis('auto')**.

c. Digamos que una base tiene **orientación dada por** θ si es una base obtenida rotando la base canónica en sentido positivo alrededor del origen un ángulo θ.

Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base con orientación dada por θ. Suponga que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ representan direcciones de sensores para un dispositivo de rastreo. El dispositivo registra la localización de un objeto como coordenadas con respecto a la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Si dos dispositivos tienen orientaciones diferentes, ¿cómo puede usar uno la información recabada por el otro? Esto incluye traducir las coordenadas en términos de una de las bases a coordenadas en términos de la otra base.

i. Suponga que $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base con orientación dada por $\pi/4$ y $C = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ es una base con orientación dada por $2\pi/3$. Encuentre la matriz de transición T de la base B a la base C. Encuentre la matriz de transición S de la base C a la base B. (*Nota.* Las líneas 3, 4 y 5 en el programa de MATLAB del inciso b) da un ejemplo de cómo encontrar una base con orientación $\pi/2$.)

ii. Suponga que el dispositivo con orientación dada por $\pi/4$ localiza un objeto con coordenadas [.5; 3]. Encuentre las coordenadas del objeto respecto al dispositivo con orientación $2\pi/3$. Explique su proceso. Verifique su resultado encontrando las coordenadas estándar del objeto usando las coordenadas [.5; 3] para la primera base B y encuentre las coordenadas estándar del objeto empleando las coordenadas encontradas para la segunda base C.

iii. Suponga que el dispositivo con orientación $2\pi/3$ localiza un objeto con coordenadas [2; −1.4]. Encuentre las coordenadas del objeto respecto al dispositivo con orientación $\pi/4$. [illegible] su respuesta igual que en el subinciso ii).

iv. El archivo *rotcoor.m* de MATLAB ayuda a visualizar el proceso anterior. El formato es **rotcoor(E,F,c)**, donde E y F son matrices de 2×2 cuyas columnas forman una base para $\mathbb{R}^2$ y **c** es una matriz de 2×1 que representa las coordenadas de un vector con respecto a la base dada por E. Se desplegarán dos imágenes en la pantalla: una muestra el vector como una combinación lineal de los vectores de la base dada por E y la otra muestra el vector como una combinación lineal de los vectores de la base dada por F. Cada vez después de usar **rotcoor**, asegúrese de dar el comando **clg** o **clf** si trabaja con MATLAB 4.0.

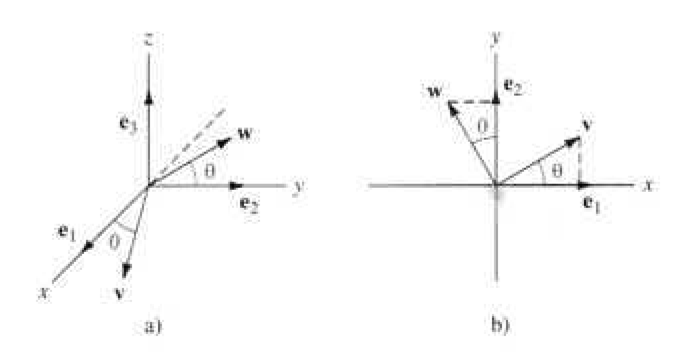
Use este archivo para visualizar los resultados de los subincisos ii) y iii). Verifique sus respuestas para esos subincisos usando la información en la pantalla. Por ejemplo, en ii), E será la base para la orientación de $\pi/4$, F la base para la orientación $2\pi/3$ y $\mathbf{c} = [.5; 3]$.

10. Cambio de base por rotaciones en $\mathbb{R}^3$; inclinar, desviar, rodar

a. (*Lápiz y papel*) En $\mathbb{R}^3$, se puede rotar en sentido positivo alrededor del eje x, del eje y o del eje z (los ejes x, y y z forman un sistema coordenado de la mano derecha). Sean $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ los vectores unitarios de la base canónica en las direcciones positivas de los ejes x, y y z, respectivamente.

i. Una rotación positiva un ángulo θ alrededor del eje z producirá una base $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{e}_3\}$, donde $\mathbf{v}$ es el vector obtenido al rotar $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{w}$ es el vector obtenido al rotar $\mathbf{e}_2$. Usando los diagramas siguientes como guía, demuestre que

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -\text{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$



a) b)

Sea $Y = [\mathbf{v} \;\; \mathbf{w} \;\; \mathbf{e}_3]$. Interprete Y como una matriz de transición.

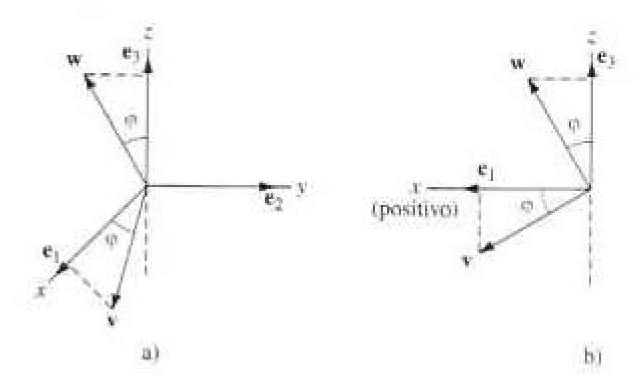
ii. Una rotación positiva un ángulo α alrededor del eje x producirá una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, donde $\mathbf{v}$ es el vector obtenido al rotar $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{w}$ es el vector obtenido al rotar $\mathbf{e}_3$. Usando los diagramas siguientes como guía, demuestre que

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\text{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Sea $R = [\mathbf{e}_1 \;\; \mathbf{v} \;\; \mathbf{w}]$. Interprete R como una matriz de transición.

iii. Una rotación positiva un ángulo φ alrededor del eje y producirá una base $\{\mathbf{v}, \mathbf{e}_2, \mathbf{w}\}$, donde $\mathbf{v}$ es el vector obtenido al rotar $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{w}$ es el vector obtenido al rotar $\mathbf{e}_3$. Usando los diagramas siguientes como guía, demuestre que

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ -\operatorname{sen}(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$



Sea $P = [\mathbf{v} \;\; \mathbf{e}_2 \;\; \mathbf{w}]$. Interprete P como una matriz de transición.

b. (*Lápiz y papel*) Suponga que Y es una matriz como la obtenida en el inciso *ai*) para un ángulo θ, R es una matriz como la obtenida en el inciso a*ii*) para un ángulo α, y P es una matriz como la obtenida en el inciso a*iii*) para un ángulo φ.

Las matrices Y, R y P para cualesquiera tres ángulos tienen interpretaciones geométricas similares a la de una matriz de rotación en $\mathbb{R}^2$. Sea M cualquiera de estas matrices de rotación. Sea $\mathbf{u} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$. Entonces $\mathbf{r} = M\mathbf{u}$ dará las coordenadas estándar del vector obtenido al rotar el vector $\mathbf{u}$.

Usando esta interpretación geométrica, explique por qué la matriz YR representa una rotación positiva un ángulo α alrededor del eje x seguida de la rotación positiva un ángulo θ alrededor del eje z.

¿Qué matriz representará una rotación positiva un ángulo θ alrededor del eje z seguida de una rotación positiva un ángulo α alrededor del eje x? ¿Puede esperarse que esta matriz dé el mismo resultado que la matriz del párrafo anterior? ¿Por qué?

c. Las rotaciones de las que se ha hablado son útiles para describir la **posición** de una nave espacial (o un avión). La posición es la orientación rotacional de la nave alrededor de su centro. Aquí se supone que la nave tiene un conjunto de ejes a través de su centro de masa tales que los ejes x y y forman un ángulo recto (como un eje que va de atrás hacia adelante de la nave y el otro de lado a lado) y el eje z es perpendicular a los ejes x y y para formar un sistema de la mano derecha.

Se pueden hacer correcciones a la posición realizando rotaciones, como las descritas en el inciso a). Sin una forma de control de posición un satélite comienza a girar. Una rotación alrededor del eje z se llama maniobra de **desviación**, una rotación alrededor del eje x se llama maniobra de **giro**, y una rotación alrededor del eje y se llama maniobra de **inclinación**.

Suponga que el conjunto de ejes de la nave está alineado inicialmente con un sistema de referencia fijo (ejes que representan una base canónica). La posición de la nave puede darse mediante una matriz cuyas columnas son vectores unitarios en las direcciones de los ejes asociados con la nave.

i. Encuentre la matriz que representa la posición de la nave después de realizar una maniobra de inclinación con un ángulo $\pi/4$, seguida de una maniobra de giro con un ángulo de $-\pi/3$, y después una maniobra de desviación con un ángulo de $\pi/2$.

ii. Realice las mismas maniobras en diferente orden y compare las posiciones. (Describa el orden de la maniobras.)

iii. Repita para otro conjunto de ángulos para cada tipo de maniobra, es decir, encuentre las posiciones derivadas de realizar las maniobras en dos órdenes distintos (describiendo los órdenes) y compare esas posiciones.

d. Suponga que dos satélites con diferentes posiciones deben transferir información entre sí. Cada satélite registra la información en términos de su sistema de coordenadas; es decir, registra la información como coordenadas referidas a la base de los vectores unitarios que definen su sistema de ejes. Además del ajuste por localización (que es simplemente una traslación), la transferencia de información requiere el uso de una matriz de transición de las coordenadas de un satélite a la coordenadas del otro.

i. Considere que la orientación de una nave es la dada en el inciso *ci*) y la orientación de la otra es la dada en el inciso *cii*). Suponga que la primera nave registra la localización de un objeto como **p = [.2;.3;–1]**. Traduzca esta información al sistema de coordenadas de la segunda nave. Verifique el resultado encontrando las coordenadas estándar del objeto con la lectura de la primera nave y después encontrando las coordenadas estándar del objeto con la lectura ajustada de la segunda nave.

ii. Repita para dos naves cuyas orientaciones se generaron en el inciso *ciii*).

e. **Opcional** Suponga que su nave tiene una matriz de posición dada por **A = orth(rand(3))**. Experimente con las maniobras de inclinación, desviación y giro para realinear la nave con el sistema de referencia fijo (base canónica).

PROBLEMA PROYECTO

11. Combine los problemas 9 y 10 de esta sección de MATLAB.

4.9 BASES ORTONORMALES Y PROYECCIONES EN $\mathbb{R}^n$

En $\mathbb{R}^n$ se vio que n vectores linealmente independientes constituyen una base. La de uso más común es la base canónica $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Estos vectores tienen dos propiedades:

i. $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \qquad \text{si } i \neq j$

ii. $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$

DEFINICIÓN 1 **Conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$** Se dice que un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ en $\mathbb{R}^n$ es un **conjunto ortonormal si**

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0 \qquad \text{si } i \neq j \tag{1}$$

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1 \tag{2}$$

Si sólo se satisface la ecuación (1), se dice que el conjunto es **ortogonal**.

Como se trabajará ampliamente con el producto escalar en esta sección, recordaremos algunos hechos básicos (vea el teorema 1.6.1, página 63). Sin mencionarlos de nuevo en forma explícita, se usarán en el resto de esta sección.

Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ están en $\mathbb{R}^n$ y α es un número real, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \tag{3}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \tag{4}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \tag{5}$$

$$(\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \tag{6}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \tag{7}$$

Ahora se dará otra definición útil.

DEFINICIÓN 2 **Longitud o norma de un vector** Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces la **longitud** o **norma** de $\mathbf{v}$, denotada por $|\mathbf{v}|$, está dada por

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \tag{8}$$

Nota. Si $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Esto significa que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0 \text{ y } \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad \text{si y sólo si } \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{9}$$

Así, se puede obtener la raíz cuadrada en (8), y se tiene

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} \geq 0 \qquad \text{para toda } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \tag{10}$$

$$|\mathbf{v}| = 0 \qquad \text{si y sólo si } \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{11}$$

EJEMPLO 1 **La norma de un vector en $\mathbb{R}^2$** Sea $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ cumple con la definición usual de longitud de un vector en el plano (vea la ecuación 3.1.1, página 394). ◆

EJEMPLO 2 **La norma de un vector en $\mathbb{R}^3$** Si $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ como en la sección 3.3. ◆

EJEMPLO 3 La norma de un vector en $\mathbb{R}^5$ Si $\mathbf{v} = (2, -1, 3, 4, -6) \in \mathbb{R}^5$, entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{4 + 1 + 9 + 16 + 36} = \sqrt{66}$. ◆

Ahora puede establecerse otra vez la definición 1:

> Un conjunto de vectores es ortonormal si cualquier par de ellos es ortogonal y cada uno tiene longitud 1.

Los conjuntos de vectores ortonormales son bastante sencillos de manejar. Se verá un ejemplo de esta característica en el capítulo 5. Ahora se probará que cualquier conjunto finito de vectores ortogonales diferentes de cero es linealmente independiente.

TEOREMA 1 Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un conjunto ortogonal de vectores diferentes de cero, entonces S es linealmente independiente.

Demostración Suponga que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Entonces para cualquier $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{0}\cdot\mathbf{v}_i &= (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_i\mathbf{v}_i + \cdots + c_k\mathbf{v}_k)\cdot\mathbf{v}_i \\ &= c_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_i) + c_2(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_i) + \cdots + c_i(\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i) + \cdots + c_k(\mathbf{v}_k\cdot\mathbf{v}_i) \\ &= c_1 0 + c_2 0 + \cdots + c_i|\mathbf{v}_i|^2 + \cdots + c_k 0 = c_i|\mathbf{v}_i|^2 \end{aligned}$$

Como $\mathbf{v}_i \neq 0$ por hipótesis, $|\mathbf{v}_i|^2 > 0$, y se tiene $c_i = 0$. Esto es cierto para $i = 1, 2, \ldots, k$ lo que completa la prueba. ◆

Ahora se verá cómo *cualquier* base en $\mathbb{R}^n$ se puede "convertir" en una base ortonormal. El método descrito en seguida se llama **proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt**.†

TEOREMA 2 **Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt** Sea H un subespacio de dimensión m de $\mathbb{R}^n$. Entonces H tiene una base ortonormal.‡

Demostración Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ una base de H. Se probará el teorema construyendo una base ortonormal a partir de los vectores en S. Antes de dar los pasos para esta construcción, se observa el hecho sencillo de que un conjunto de vectores linealmente independiente *no* contiene al vector cero (vea el problema 21).

Paso 1. Elección del primer vector unitario Sea

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \tag{12}$$

Entonces

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = \left(\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}\right) = \left(\frac{1}{|\mathbf{v}_1|^2}\right)(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) = 1$$

de manera que $|\mathbf{u}_1| = 1$.

Paso 2. Elección de un segundo vector ortogonal a $\mathbf{u}_1$ En la sección 3.2 (teorema 5, página 244) se vio que, en $\mathbb{R}^2$, el vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$. En este caso $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$ es la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$. Esto se ilustra en la figura 4.5.

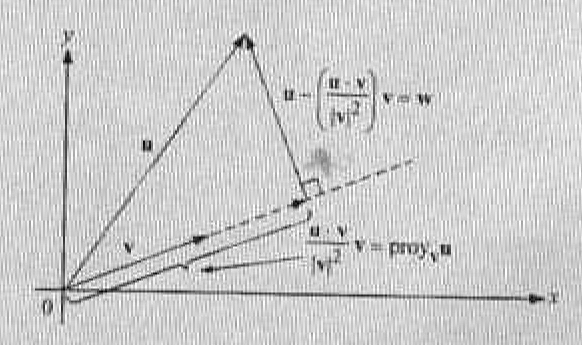


Figura 4.5 El vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$

† Jorgen Pederson Gram (1850-1916) fue un actuario danés que estuvo muy interesado en la ciencia de la medida. Erhardt Schmidt (1876-1959) fue un matemático alemán.

‡ Observe que H puede ser $\mathbb{R}^n$ en este teorema. Es decir, $\mathbb{R}^n$ mismo tiene una base ortonormal.

Resulta que el vector **w** dado es ortogonal a **v** cuando **w** y **v** están en $\mathbb{R}^n$ para cualquier $n \geq 2$. Observe que como $\mathbf{u}_1$ es un vector unitario, $\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}_1|^2}\mathbf{u}_1 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1$ para cualquier vector **v**.

Sea

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 \tag{13}$$

entonces

$$\mathbf{v}_2' \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)1 = 0$$

de manera que $\mathbf{v}_2'$ es ortogonal a $\mathbf{u}_1$. Más aún, por el teorema 1, $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{v}_2'$ son linealmente independientes. $\mathbf{v}_2' \neq \mathbf{0}$ porque de otra manera $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \frac{(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)}{|\mathbf{v}_1|}\mathbf{v}_1$, lo que contradice la independencia de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

Paso 3. Elección de un segundo vector unitario Sea

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{|\mathbf{v}_2'|} \tag{14}$$

entonces es evidente que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es un conjunto ortonormal.

Suponga que se han construido los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ $(k < m)$ y que forman un conjunto ortonormal. Se mostrará cómo construir $\mathbf{u}_{k+1}$.

Paso 4. Continuación del proceso Sea

$$\mathbf{v}_{k+1}' = \mathbf{v}_{k+1} - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 - \cdots - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k \tag{15}$$

entonces para $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{k+1}' \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i &- (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_i) - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_i) \\ &- \cdots - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i)(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i) - \cdots - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_k)(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_i)\end{aligned}$$

Pero $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_i = 0$ si $j \neq i$ y $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1$. Por lo tanto,

$$\mathbf{v}_{k+1}' \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i - \mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_i = 0$$

Así $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}'\}$ es un conjunto linealmente independiente, ortogonal y $\mathbf{v}_{k+1}' \neq \mathbf{0}$.

Paso 5. Sea $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{v}_{k+1}'/|\mathbf{v}_{k+1}'|$. Entonces es claro que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}\}$ es un conjunto ortonormal y se puede continuar de esta manera hasta que $k + 1 = m$ con lo que se completa la prueba.

Nota. Como cada $\mathbf{u}_i$ es una combinación lineal de vectores $\mathbf{v}_i$, gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ es un subespacio de gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y como cada espacio tiene dimensión k, los espacios son iguales. ◆

EJEMPLO 4 **Construcción de una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$** Construya una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ comenzando con la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Solución Se tiene $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{2}$, entonces $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como $|\mathbf{v}_2'| = \sqrt{3/2}$, $\mathbf{u}_2 = \sqrt{2/3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$. Continuando, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3' &= \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por último, $|\mathbf{v}_3'| = \sqrt{12/9} = 2/\sqrt{3}$ de manera que $\mathbf{u}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Así, una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$. Este resultado debe verificarse. ✦

EJEMPLO 5 **Una base ortonormal para un subespacio de $\mathbb{R}^3$** Encuentre una base ortonormal para el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ que está sobre el plano $\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + 3z = 0 \right\}$.

Solución Como se vio en el ejemplo 4.6.3, página 338, una base para este subespacio de dos dimensiones es $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{5}$ y $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1/|\mathbf{v}_1| = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Continuando, se define

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2' &= \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1\\ &= \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\\frac{12}{5}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\\frac{3}{5}\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Por último, $|\mathbf{v}_2'| = \sqrt{70/25} = \sqrt{70}/5$ de manera que $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2'/|\mathbf{v}_2'| = \frac{5}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\\frac{3}{5}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6/\sqrt{70}\\3/\sqrt{70}\\5/\sqrt{70}\end{pmatrix}$.

Así, una base ortonormal es $\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6/\sqrt{70}\\3/\sqrt{70}\\5/\sqrt{70}\end{pmatrix}\right\}$. Para verificar esta respuesta, se observa que 1) los vectores son ortogonales, 2) cada uno tiene longitud 1 y 3) cada uno satisface $2x - y + 3z = 0$.

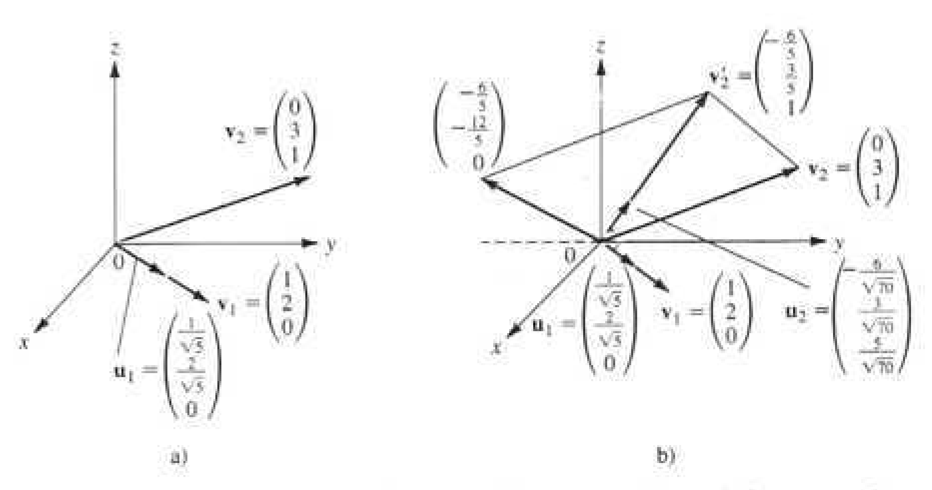


Figura 4.6 Los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ forman una base ortogonal para el plano generado por los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$

En la figura 4.6*a* se dibujaron los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{u}_1$. En la figura 4.6*b* se dibujaron los vectores $-\begin{pmatrix}\frac{6}{5}\\\frac{12}{5}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\-\frac{12}{5}\\0\end{pmatrix}$ y se sumó a $\mathbf{v}_2$ usando la regla del paralelogramo para obtener $\mathbf{v}_2' = \begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\\frac{3}{5}\\1\end{pmatrix}$. Por último, $\mathbf{u}_2$ es un vector unitario a lo largo de $\mathbf{v}_2'$.

◆

Ahora se definirá un nuevo tipo de matriz que será muy útil en los capítulos que siguen.

DEFINICIÓN 3 **Matriz ortogonal** Una matriz Q de $n \times n$ se llama **ortogonal** si Q es invertible y

$$\boxed{Q^{-1} = Q^t} \qquad (16)$$

Observe que si $Q^{-1} = Q^t$, entonces $Q^tQ = I$.

No es difícil construir matrices ortogonales, según el siguiente teorema.

TEOREMA 3 La matriz Q de $n \times n$ es ortogonal si y sólo si las columnas de Q forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$.

Demostración Sea

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$Q^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sea $B = (b_{ij}) = Q^tQ$. Entonces

$$b_{ij} = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j \qquad (17)$$

donde $\mathbf{c}_i$ denota la i-ésima columna de Q. Si las columnas de Q son ortonormales, entonces

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \qquad (18)$$

Es decir, $B = I$. Inversamente, si $Q^t = Q^{-1}$, entonces $B = I$ de manera que (18) se cumple y (17) muestra que las columnas de Q son ortonormales. Esto completa la prueba. ✦

EJEMPLO 6 **Una matriz ortogonal** Del ejemplo 4, los vectores $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ forman una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$. Así, la matriz $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ es una matriz

ortogonal. Para verificar esto se observa que

$$Q^tQ=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ ◆

En la prueba del teorema 2 se definió $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1$. Pero como se ha visto, $(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \text{proy}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v}_2$ (ya que $|\mathbf{u}_1|^2 = 1$). Ahora se ampliará este concepto de proyección sobre un vector a proyección sobre un subespacio.

DEFINICIÓN 4 **Proyección ortogonal** Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$. Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces la **proyección ortogonal** de $\mathbf{v}$ sobre H, denotada por $\text{proy}_H \mathbf{v}$, está dada por

$$\text{proy}_H \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k \quad \textbf{(19)}$$

Observe que $\text{proy}_H \mathbf{v} \in H$.

EJEMPLO 7 **Proyección ortogonal de un vector sobre un plano** Encuentre $\text{proy}_\pi \mathbf{v}$, donde π es el plano $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}: 2x - y + 3z = 0\right\}$ y $\mathbf{v}$ es el vector $\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$.

Solución Del ejemplo 5, una base ortonormal para π es $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}$ y $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}-6/\sqrt{70}\\3/\sqrt{70}\\5/\sqrt{70}\end{pmatrix}$. Entonces

$$\text{proy}_\pi \mathbf{v} = \left[\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6/\sqrt{70}\\3/\sqrt{70}\\5/\sqrt{70}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}-6/\sqrt{70}\\3/\sqrt{70}\\5/\sqrt{70}\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}-6/\sqrt{70}\\3/\sqrt{70}\\5/\sqrt{70}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\-\frac{2}{5}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{24}{70}\\-\frac{12}{70}\\-\frac{20}{70}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\-\frac{4}{7}\\-\frac{2}{7}\end{pmatrix}$$ ◆

La notación de la proyección proporciona una forma conveniente para escribir un vector en $\mathbb{R}^n$ en términos de una base ortonormal.

TEOREMA 4 Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ sea una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\boxed{\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n} \quad (20)$$

Esto es, $\mathbf{v} = \text{proy}_{\mathbb{R}^n}\mathbf{v}$.

Demostración Como B es una base, se puede escribir $\mathbf{v}$ de manera única como $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$. Entonces

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_i = c_1(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_i) + c_2(\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_i) + \cdots + c_i(\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_i) + \cdots + c_n(\mathbf{u}_n\cdot\mathbf{u}_i) = c_i$$

ya que los vectores $\mathbf{u}_i$ son ortonormales. Como esto se cumple para $i = 1, 2, \ldots, n$, la demostración queda completa. ◆

EJEMPLO 8 **Expresión de un vector en términos de una base ortonormal** Escriba el vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ en términos de la base ortonormal $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$.

Solución

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$+ \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} + \frac{6}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$ ◆

Antes de continuar, es necesario que una proyección ortogonal esté bien definida. Esto quiere decir que la definición de $\text{proy}_H\mathbf{v}$ es independiente de la base ortonormal elegida en H. El siguiente teorema se hace cargo de este problema.

TEOREMA 5 Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$, suponga que H tiene dos bases ortonormales, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ y $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$. Sea $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k \\ = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_k)\mathbf{w}_k\end{aligned} \quad (21)$$

Demostración Elija vectores $\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+2}, \ldots, \mathbf{u}_n$ tales que $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ sea una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$ (esto se puede hacer igual que en la prueba del teorema 2).† Después $B_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+2}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es también una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$. Para ver esto, observe antes que ninguno de los vectores $\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+2}, \ldots, \mathbf{u}_n$ puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ porque ninguno de estos vectores está en H y $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ es una base para H. Así, B_2 es una base para $\mathbb{R}^n$ porque contiene n vectores linealmente independientes. La ortonormalidad de los vectores en B_2 se deduce de la manera en que se escogieron ($\mathbf{u}_{k+j}$ es ortogonal a todo vector en H para $j = 1, 2, \ldots, n-k$). Sea $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Entonces del teorema 4 [ecuación (20)]

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_{k+1})\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n \\ &= (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_k)\mathbf{w}_k + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_{k+1})\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n\end{aligned} \quad (22)$$

La ecuación (21) se deduce de la ecuación (22). ✦

DEFINICIÓN 5 **Complemento ortogonal** Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$. El **complemento ortogonal** de H, denotado por $H^\perp$, está dado por

$$\boxed{H^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}\cdot\mathbf{h} = 0 \quad \text{para toda } \mathbf{h} \in H\}}$$

TEOREMA 6 Si H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces

i. $H^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

ii. $H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

iii. $\dim H^\perp = n - \dim H$.

Demostración **i.** Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en $H^\perp$ y si $\mathbf{h} \in H$, entonces $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot\mathbf{h} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{h} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{h} = 0 + 0 = 0$ y $(\alpha\mathbf{x}\cdot\mathbf{h}) = \alpha(\mathbf{x}\cdot\mathbf{h}) = 0$, de manera que $H^\perp$ es un subespacio.

† Primero debemos encontrar vectores $\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \ldots, \mathbf{v}_n$ tales que $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ sea una base para $\mathbb{R}^2$. Esto se puede hacer como en la prueba del teorema 4.6.4, página 341; vea también el problema 4.6.27.

ii. Si $\mathbf{x} \in H \cap H^\perp$, entonces $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, de manera que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, lo que muestra que $H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

iii. Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ una base ortonormal para H. Por el resultado del problema 4.6.27, página 346, esto puede expandirse a una base B para $\mathbb{R}^n$: $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Usando el proceso de Gram-Schmidt, se puede convertir a B en una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$. Igual que en la prueba del teorema 2, la base que ya es ortonormal $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ no cambia en el proceso y se obtiene la base ortonormal $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. Para completar la prueba es necesario sólo demostrar que $\{\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base para $H^\perp$. Como los vectores $\mathbf{u}_i$ son independientes, debe mostrarse que generan a $H^\perp$. Sea $\mathbf{x} \in H^\perp$; entonces por el teorema 4

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_{k+1})\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n$$

Pero $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, ya que $\mathbf{x} \in H^\perp$ y $\mathbf{u}_i \in H$. Por lo tanto, $\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_{k+1})\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n$. Esto muestra que $\{\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base para $H^\perp$, lo que significa que $\dim H^\perp = n - k$. ◆

Los espacios H y $H^\perp$ permiten "descomponer" cualquier vector en $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 7 **Teorema de proyección** Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Entonces existe un par único de vectores $\mathbf{h}$ y $\mathbf{p}$ tales que $\mathbf{h} \in H$, $\mathbf{p} \in H^\perp$, y $\mathbf{v} = \mathbf{h} + \mathbf{p}$. En particular, $\mathbf{h} = \text{proy}_H\, \mathbf{v}$ y $\mathbf{p} = \text{proy}_{H^\perp}\, \mathbf{v}$ de manera que

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{h} + \mathbf{p} = \text{proy}_H\, \mathbf{v} + \text{proy}_{H^\perp}\, \mathbf{v}} \tag{23}$$

Demostración Sea $\mathbf{h} = \text{proy}_H\, \mathbf{v}$ y sea $\mathbf{p} = \mathbf{v} - \mathbf{h}$. Por la definición 4 se tiene $\mathbf{h} \in H$. Ahora se mostrará que $\mathbf{p} \in H^\perp$. Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ una base ortonormal para H. Entonces

$$\mathbf{h} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$$

Sea $\mathbf{x}$ un vector en H. Existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tales que

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k$$

Entonces

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{v} - \mathbf{h}) \cdot \mathbf{x} = [\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 - \cdots - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k] \cdot [\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k] \tag{24}$$

Como $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$, es sencillo verificar que el producto escalar en (24) está dado por

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_i)-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_i)=0$$

Así, $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}=0$ para todo $\mathbf{x}\in H$, lo que significa que $\mathbf{p}\in H^{\perp}$. Para demostrar que $\mathbf{p}=\text{proy}_{H^{\perp}}\,\mathbf{v}$, se amplía $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ a una base ortonormal en $\mathbb{R}^n$: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. Entonces $\{\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base para $H^{\perp}$ y, por el teorema 4,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}&=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2+\cdots+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_{k+1})\mathbf{u}_{k+1}\\&\quad+\cdots+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n\\&=\text{proy}_H\,\mathbf{v}+\text{proy}_{H^{\perp}}\,\mathbf{v}\qquad\text{(por la definición 4)}\end{aligned}$$

Esto prueba la ecuación (23). Para probar la unicidad, suponga que $\mathbf{v}=\mathbf{h}_1-\mathbf{p}_1=\mathbf{h}_2-\mathbf{p}_2$, donde $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2\in H$ y $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\in H^{\perp}$. Entonces $\mathbf{h}_1-\mathbf{h}_2=\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2$. Pero $\mathbf{h}_1-\mathbf{h}_2\in H$ y $\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2\in H^{\perp}$, de manera que $\mathbf{h}_1-\mathbf{h}_2\in H\cap H^{\perp}=\{\mathbf{0}\}$. Así, $\mathbf{h}_1-\mathbf{h}_2=\mathbf{0}$ y $\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2=\mathbf{0}$, lo que completa la prueba. ◆

EJEMPLO 9 **Descomposición de un vector en $\mathbb{R}^3$** En $\mathbb{R}^3$ sea $\pi=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}: 2x-y+3z=0\right\}$. Exprese el vector $\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$ en términos de $\mathbf{h}+\mathbf{p}$, donde $\mathbf{h}\in\pi$ y $\mathbf{p}\in\pi^{\perp}$.

Solución Una base ortonormal para π es $B_1=\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6/\sqrt{70}\\3/\sqrt{70}\\5/\sqrt{70}\end{pmatrix}\right\}$, y del ejemplo 7, $\mathbf{h}=\text{proy}_{\pi}\,\mathbf{v}=\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\-\frac{4}{7}\\-\frac{2}{7}\end{pmatrix}\in\pi$. Entonces

$$\mathbf{p}=\mathbf{v}-\mathbf{h}=\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\-\frac{4}{7}\\-\frac{2}{7}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{20}{7}\\-\frac{10}{7}\\\frac{30}{7}\end{pmatrix}\in\pi^{\perp}.$$

Observe que $\mathbf{p}\cdot\mathbf{h}=0$. ◆

El siguiente teorema es muy útil en estadística y otras áreas de aplicación. Se dará una aplicación de este teorema en la siguiente sección y se aplicará una versión amplificada de este resultado en la sección 4.11.

TEOREMA 8 **Teorema de aproximación de la norma** Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Entonces $\text{proy}_H\,\mathbf{v}$ es la mejor aproximación para $\mathbf{v}$ en H en el sentido siguiente: Si $\mathbf{h}$ es cualquier otro vector en H, entonces

$$\boxed{|\mathbf{v} - \text{proy}_H\,\mathbf{v}| < |\mathbf{v} - \mathbf{h}|} \tag{25}$$

Demostración Del teorema 7, $\mathbf{v} - \text{proy}_H\,\mathbf{v} \in H^\perp$. Se escribe

$$\mathbf{v} - \mathbf{h} = (\mathbf{v} - \text{proy}_H\,\mathbf{v}) + (\text{proy}_H\,\mathbf{v} - \mathbf{h})$$

El primer término de la derecha está en $H^\perp$, mientras que el segundo está en H, así

$$(\mathbf{v} - \text{proy}_H\,\mathbf{v}) \cdot (\text{proy}_H\,\mathbf{v} - \mathbf{h}) = 0 \tag{26}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
|\mathbf{v} - \mathbf{h}|^2 &= (\mathbf{v} - \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{h}) \\
&= [(\mathbf{v} - \text{proy}_H\,\mathbf{v}) + (\text{proy}_H\,\mathbf{v} - \mathbf{h})] \cdot [(\mathbf{v} - \text{proy}_H\,\mathbf{v}) + (\text{proy}_H\,\mathbf{v} - \mathbf{h})] \\
&= |\mathbf{v} - \text{proy}_H\,\mathbf{v}|^2 + 2(\mathbf{v} - \text{proy}_H\,\mathbf{v}) \cdot (\text{proy}_H\,\mathbf{v} - \mathbf{h}) + |\text{proy}_H\,\mathbf{v} - \mathbf{h}|^2 \\
&= |\mathbf{v} - \text{proy}_H\,\mathbf{v}|^2 + |\text{proy}_H\,\mathbf{v} - \mathbf{h}|^2
\end{aligned}$$

Pero $|\text{proy}_H\,\mathbf{v} - \mathbf{h}|^2 > 0$ porque $\mathbf{h} \neq \text{proy}_H\,\mathbf{v}$. Por lo tanto,

$$|\mathbf{v} - \mathbf{h}|^2 > |\mathbf{v} - \text{proy}_H\,\mathbf{v}|^2$$

es decir,

$$|\mathbf{v} - \mathbf{h}| > |\mathbf{v} - \text{proy}_H\,\mathbf{v}|$$ ◆

Bases ortogonales en $\mathbb{R}^3$ con coeficientes enteros y normas enteras

En ocasiones es útil construir una base ortogonal de vectores donde las coordenadas y la norma de cada vector son enteros. Por ejemplo,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

constituye una base ortogonal en $\mathbb{R}^3$ donde cada vector tiene norma 3. Otro ejemplo,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -25 \\ 48 \\ -36 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base ortogonal en $\mathbb{R}^3$ cuyos vectores tienen normas 13, 5 y 65, respectivamente. Resulta que encontrar una base como ésta en $\mathbb{R}^3$ no es tan difícil como parece. Anthony

Osborne y Hans Liebeck abordan este tema en su interesante artículo "Orthogonal Bases of $\mathbb{R}^3$ with Integer Coordinates and Integer Lengths" en *The American Mathematical Monthly*, vol. 96, núm 1, enero de 1989, pp. 49-53.

Esta sección se cierra con un teorema importante.

TEOREMA 9 **Desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$** Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$. Entonces

i. $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$. **(27)**

ii. $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$ si y sólo si $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ o $\mathbf{v}=\lambda\mathbf{u}$ para algún número real λ.

Demostración **i.** Si $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ o $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ (o ambos), entonces (27) se cumple (ambos lados son iguales a 0). Si se supone que $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ y $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$. Entonces

$$0 \le \left|\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}-\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right|^2 = \left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}-\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)\cdot\left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}-\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}-\frac{2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}$$

$$= \frac{|\mathbf{u}|^2}{|\mathbf{u}|^2}-\frac{2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}+\frac{|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2} = 2-\frac{2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$$

Así $\frac{2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}\le 2$, de manera que $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}\le 1$ y $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\le|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$. En forma similar, comenzando con $0\le\left|\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}+\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right|^2$, se llega a $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}\ge -1$, o sea, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\ge -|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$. Con estas dos desigualdades se obtiene

$$-|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \le \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \le |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \quad \text{o} \quad |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|\le|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$$

ii. Si $\mathbf{u}=\lambda\mathbf{v}$, entonces $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = |\lambda\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}| = |\lambda|\,|\mathbf{v}|^2$ y $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| = |\lambda\mathbf{v}|\,|\mathbf{v}| = |\lambda|\,|\mathbf{v}|\,|\mathbf{v}| = |\lambda|\,|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|$. Inversamente, suponga que $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$ con $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ y $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$. Entonces $\left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}\right| = 1$, de manera que $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}=\pm 1$.

Caso 1: $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}=1$. Entonces

$$\left|\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}-\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right|^2 = \left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}-\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)\cdot\left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}-\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) \overset{\text{como en } i)}{=} 2-\frac{2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = 2-2=0.$$

Así

$$\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad \text{o} \quad \mathbf{u}=\frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$$

Caso 2: $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}=-1$. Entonces

$$\left|\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}+\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right|^2=2+\frac{2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}=2-2=0$$

de manera que

$$\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}=-\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\quad\text{y}\quad \mathbf{u}=-\frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$$ ◆

PROBLEMAS 4.9

Autoevaluación

Falso-verdadero

I. El conjunto $\{(1, 1), (1, -1)\}$ es un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^2$.

II. El conjunto $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ es un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^2$.

III. Toda base en $\mathbb{R}^n$ se puede convertir en una base ortonormal usando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.

IV. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es ortogonal.

V. La matriz $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ es ortogonal.

Selección múltiple

VI. Para cuáles de las siguientes matrices Q^{-1} es igual a Q^t?

a. $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 6/\sqrt{40} \\ 3/\sqrt{10} & 2/\sqrt{40} \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 6/\sqrt{40} \\ 3/\sqrt{10} & -2/\sqrt{40} \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

En los problemas 1 al 13 construya una base ortonormal para el espacio o subespacio vectorial dado.

1. En $\mathbb{R}^2$, comenzando con los vectores básicos $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y = 0\}$ **3.** $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: ax + by = 0\}$

4. En $\mathbb{R}^2$, comenzando con $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, donde $ad - bc \neq 0$

Respuestas a la autoevaluación

I. F II. V III. V IV. F V. V VI. c

5. $\pi = \{(x, y, z): 2x - y - z = 0\}$ **6.** $\pi = \{(x, y, z): 3x - 2y + 6z = 0\}$

7. $L = \{(x, y, z): x/2 = y/3 = z/4\}$

8. $L = \{(x, y, z): x = 3t, y = -2t, z = t; t \text{ real}\}$

9. $H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4: 2x - y + 3z - w = 0\}$

10. $\pi = \{(x, y, z): ax + by + cz = 0\}$, donde $abc \neq 0$.

11. $L = \{(x, y, z): x/a = y/b = z/c\}$, donde $abc \neq 0$.

12. $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5: 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0\}$

13. H es el espacio de soluciones de

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ -2x + 2y - 3z &= 0 \\ 4x - 8y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

***14.** Encuentre una base ortonormal en $\mathbb{R}^4$ que incluya los vectores

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

[*Sugerencia:* Primero encuentre dos vectores $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$ para completar la base.]

15. Demuestre que $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal.

16. Demuestre que si P y Q son matrices ortogonales de $n \times n$, entonces PQ es ortogonal.

17. Verifique el resultado del problema 16 con

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix} 1/3 & -\sqrt{8}/3 \\ \sqrt{8}/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

18. Demuestre que si Q es una matriz ortogonal simétrica, entonces $Q^2 = I$.

19. Demuestre que si Q es ortogonal, entonces $\det Q = \pm 1$.

20. Demuestre que para cualquier número real t, la matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & \cos t \\ \cos t & -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$ es ortogonal.

21. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$. Pruebe que $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. [*Sugerencia:* Si $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, entonces es sencillo encontrar constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ con $c_i \neq 0$ tales que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.]

En los problemas 22 al 28 se dan un subespacio H y un vector $\mathbf{v}$. **a)** Calcule $\text{proy}_H \mathbf{v}$; **b)** Encuentre una base ortonormal para $H^\perp$; **c)** escriba $\mathbf{v}$ como $\mathbf{h} + \mathbf{p}$, donde $\mathbf{h} \in H$ y $\mathbf{p} \in H^\perp$.

22. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2: x + y = 0 \right\}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

23. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2: ax + by = 0 \right\}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

24. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3: ax + by + cz = 0 \right\}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

25. $H=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3: 3x-2y+6z=0\right\}$; $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$

26. $H=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3: x/2=y/3=z/4\right\}$; $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

27. $H=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4: 2x-y+3z-w=0\right\}$; $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix}$

28. $H=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4: x=y \text{ y } w=3y\right\}$; $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$

29. Sean $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ dos vectores ortonormales en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2|=\sqrt{2}$.

30. Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ son ortonormales, demuestre que

$$|\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\cdots+\mathbf{u}_n|^2=|\mathbf{u}_1|^2+|\mathbf{u}_2|^2+\cdots+|\mathbf{u}_n|^2=n$$

31. Encuentre una condición sobre los números a y b tales que $\left\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}\right\}$ y $\left\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}\right\}$ forman una base ortonormal en $\mathbb{R}^2$.

32. Demuestre que *cualquier* base ortonormal en $\mathbb{R}^2$ es de una de las formas dadas en el problema 31.

33. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, pruebe que si $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|=|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|$, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente dependientes.

34. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, pruebe la **desigualdad del triángulo**:

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|\leq|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|$$

[*Sugerencia:* Obtenga la expansión de $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2$.]

***35.** Suponga que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ (no todos cero) y que

$$|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\cdots+\mathbf{x}_k|=|\mathbf{x}_1|+|\mathbf{x}_2|+\cdots+|\mathbf{x}_k|$$

Demuestre que dim gen $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}=1$. [*Sugerencia:* utilice los resultados de los problemas 33 y 34.]

36. Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortonormal en $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Pruebe que $|\mathbf{v}|^2=|\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1|^2+|\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2|^2+\cdots+|\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_n|^2$. Esta igualdad se llama **igualdad de Parseval** en $\mathbb{R}^n$.

37. Demuestre que para cualquier subespacio H de $\mathbb{R}^n$, $(H^\perp)^\perp=H$.

38. Sean H_1 y H_2 dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ y suponga que $H_1^\perp=H_2^\perp$. Demuestre que $H_1=H_2$.

39. Sean H_1 y H_2 dos subespacios de $\mathbb{R}^n$, demuestre que si $H_1\subseteq H_2$, entonces $H_2^\perp\subseteq H_1^\perp$.

40. Demuestre el **teorema generalizado de Pitágoras**: sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ con $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$. Entonces

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2$$

MANEJO DE CALCULADORA

TI-85

En la página 238 se indicó cómo encontrar la longitud o norma de un vector en $\mathbb{R}^2$ con la TI-85. En la página 249 se mostró cómo encontrar el producto punto de dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Los mismos procedimientos trabajan bien para $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, la secuencia de teclas

da como resultado 9.94987437107 (que es $\sqrt{99}$ con 12 cifras significativas). La imitación del procedimiento de la página 249 dará $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ están en $\mathbb{R}^n$ para cualquier $n > 2$.

MATLAB 4.9

Recordatorio de MATLAB $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ se calcula con **u'*v** o **v' *u.** $|\mathbf{v}|$ se calcula con **sqrt(v'*v)** o **norm(v)**. $\text{proy}_\mathbf{v}\mathbf{u}$ se calcula con **((u'*v)/(v'*v))*v** (el vector proyección de **u** sobre **v**).

1. Encuentre bases ortonormales para el espacio generado por cada conjunto de vectores dado, usando el proceso de Gram-Schmidt. Verifique sus respuestas probando que el conjunto de vectores obtenido es ortonormal y que cada vector en el conjunto original es una combinación lineal del conjunto de vectores obtenido.

   a. $\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\right\}$ **b.** $\left\{\begin{pmatrix}0\\-2\\-3\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-5\\0\\0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\4\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$

   c. $\left\{\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\4\end{pmatrix}\right\}$

   d. Genere cuatro vectores aleatorios en $\mathbb{R}^6$.

2. Encuentre una base ortonormal para

$$H = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \middle| \, x - y + 3z + w = 0\right\}$$

   Sugerencia: primero encuentre una base para H encontrando una base para las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, donde $A = (1 \;\; -1 \;\; 3 \;\; 1)$, y después aplique el proceso de Gram-Schmidt.

3. a. (*Lápiz y papel*) Suponga que $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Suponga que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ y $\mathbf{v}_2 = \mathbf{z}/|\mathbf{z}|$. Demuestre que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ forma una base ortonormal en $\mathbb{R}^2$ siempre que a y b no sean ambas cero.

   b. Para $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, forme $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ como en el inciso a). Sea $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{p}_1$, el vector proyección de $\mathbf{w}$ sobre $\mathbf{v}_1$, y $\mathbf{p}_2$, el vector proyección de $\mathbf{w}$ sobre $\mathbf{v}_2$. Recuerde la geometría de una proyección usando el archivo *prjtn.m*. Utilice los comandos **prjtn(w,v1)** y **prjtn(w,v2)**. (En la pantalla de gráficos, $\mathbf{w}$ tendrá etiqueta U y $\mathbf{v}_1$ o $\mathbf{v}_2$ etiqueta V.)

M c. Verifique que $\mathbf{w} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2$. Dé el comando **lincomb(v1,v2,w)**. (El archivo *lincomb.m* se encuentra en el programa MATLAB.)

   Describa de qué manera se refleja la geometría de la proyección y de la combinación lineal en la gráfica que se presenta.

Precaución. La impresión directa de la pantalla NO conserva longitudes ni ángulos rectos.

   Para verificar que los números desplegados en la pantalla de gráficas son **w · v1** y **w · v2**, dé los comandos **rat(w'*v1,'s')** y **rat(w'*v2,'s')**. En la versión 4.0 de MATLAB utilice **format rat.**

   d. Repita los incisos b) y c) para $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   e. Repita los incisos b) y c) para $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ de su elección.

   f. (*Lápiz y papel*) Explique de qué manera ilustra este problema el teorema 7 de esta sección, donde H es gen $\{\mathbf{v}\}$.

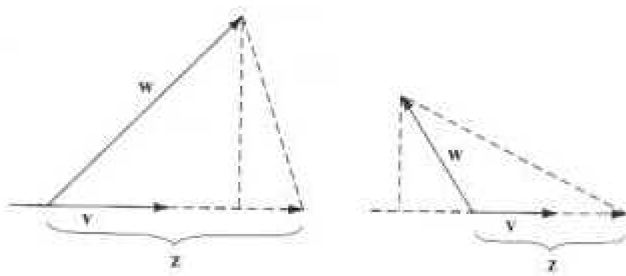
4. a. Sea $\mathbf{v}$ un vector de longitud 1 en la dirección de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (divida el vector entre su longitud). Sea $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, encuentre $\mathbf{p}$, el vector proyección de $\mathbf{w}$ sobre $\mathbf{v}$ y calcule $|\mathbf{w} - \mathbf{p}|$.

   b. Elija cualquier valor escalar para c; haga $\mathbf{z} = c\mathbf{v}$ y verifique que $|\mathbf{w} - \mathbf{z}| \geq |\mathbf{w} - \mathbf{p}|$. Repita para otros tres valores de c. Explique la relación entre esto y el teorema 8, donde H es gen $\{\mathbf{v}\}$.

   c. Repita los incisos a) y b) con $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   d. Repita los incisos a) y b) para vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ arbitrarios.

   e. (*Lápiz y papel*) En el diagrama esquemático siguiente, etiquete con $\mathbf{p}$ al vector proyección de $\mathbf{w}$ sobre $\mathbf{v}$, y localice $\mathbf{w} - \mathbf{p}$ y $\mathbf{w} - \mathbf{z}$. Explique la manera en que estos diagramas ilustran la geometría del teorema 8, donde H es el subespacio gen $\{\mathbf{v}\}$.



5. Proyección sobre un plano en $\mathbb{R}^3$

a. Sea $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

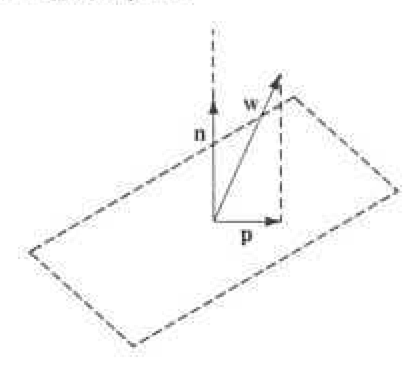
Encuentre una base ortonormal $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ para el plano dado por gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ usando el proceso de Gram-Schmidt.

b. (*Lápiz y papel*) Verifique que $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es perpendicular tanto a $\mathbf{v}_1$ como a $\mathbf{v}_2$ y por lo tanto, es perpendicular a H = gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Sea $\mathbf{n} = \mathbf{z}/|\mathbf{z}|$. Explique por qué $\mathbf{n}$ es una base ortonormal para $H^{\perp}$.

c. La definición 4 dice que la proyección de un vector $\mathbf{w}$ sobre H está dada por $\text{proy}_H\,\mathbf{w} = (\mathbf{w}\cdot\mathbf{z}_1)\mathbf{z}_1 + (\mathbf{w}\cdot\mathbf{z}_2)\mathbf{z}_2$. El teorema 7 dice que $\mathbf{w} = \text{proy}_H\mathbf{w} + \text{proy}_{H^{\perp}}\mathbf{w}$, que puede rexpresarse como $\text{proy}_H\mathbf{w} = \mathbf{w} - \text{proy}_{H^{\perp}}\mathbf{w}$.

Para cuatro vectores $\mathbf{w}$ de 3×1 arbitrarios, calcule $\text{proy}_H\mathbf{w}$ de las dos maneras y compare los resultados. (*Nota.* Como $H^{\perp}$ es de dimensión uno, $\text{proy}_{H^{\perp}}\mathbf{w}$ es igual al vector proyección de $\mathbf{w}$ sobre $\mathbf{n}$.)

d. (*Lápiz y papel*) El siguiente diagrama ilustra la geometría de $\text{proy}_H\,\mathbf{w} = \mathbf{w} - \text{proy}_{H^{\perp}}\,\mathbf{w}$. En el diagrama, localice $\mathbf{h} = \text{proy}_{H^{\perp}}\mathbf{w}$, bosqueje $\mathbf{w} - \mathbf{h}$ y verifique que es paralela a $\mathbf{p}$, la proyección de $\mathbf{w}$ sobre el plano.



6. Para los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, si se forma la matriz $A = [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_k]$, entonces el comando de MATLAB **B = orth(A)** producirá una matriz B cuyas columnas forman una base ortonormal para el subespacio H = imagen de A = gen $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.

a. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ el conjunto de vectores en el problema 1*b*) de esta sección de MATLAB. Encuentre A y B según se describió. Verifique que las columnas de B son ortonormales.

b. Sea $\mathbf{x}$ un vector aleatorio de 3×1; encuentre $A\mathbf{x}$. Explique por qué $A\mathbf{x}$ está en H.

El teorema 4 dice que si $\mathbf{w}$ está en H, entonces $\mathbf{w} = (\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$, donde $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ es una base ortonormal para H. Verifique esto para $\mathbf{w} = A\mathbf{x}$ usando el hecho de que $\mathbf{u}_i$ es la i-ésima columna de B.

c. Repita las instrucciones de los incisos a) y b) para $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, donde cada $\mathbf{v}_i$ es un vector aleatorio de 6×1 y $\mathbf{x}$ es un vector aleatorio de 4×1.

7. Genere cuatro vectores aleatorios en $\mathbb{R}^6$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$. Sea H = gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. Sea $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4]$ y **B = orth(A)**. Sea $\mathbf{u}_i$ la i-ésima columna de B.

a. Sea $\mathbf{w}$ un vector aleatorio de 6×1. Encuentre la proyección de $\mathbf{w}$ sobre H, $\mathbf{p} = \text{proy}_H\mathbf{w}$, usando la definición 4.

Calcule $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}\cdot\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{u}_2 \\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{u}_4 \end{pmatrix}$. Verifique que $\mathbf{z} = B^t\mathbf{w}$ y $\mathbf{p} = BB^t\mathbf{w}$. Repita para otro vector $\mathbf{w}$.

b. Sea $\mathbf{x}$ un vector aleatorio 4×1 y forme $\mathbf{h} = A\mathbf{x}$. Entonces $\mathbf{h}$ está en H. Compare $|\mathbf{w} - \mathbf{p}|$ y $|\mathbf{w} - \mathbf{h}|$. Repita para otros tres vectores $\mathbf{x}$. Escriba una interpretación de sus observaciones.

c. Sea $\mathbf{z} = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$. Entonces $H = \text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{z}\}$. (Aquí H es el subespacio descrito en los incisos anteriores de este problema.) ¿Por qué? Sea $C = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{z}]$ y **D = orth(C)**. Entonces las columnas de D serán otra base ortonormal para H.

Sea $\mathbf{w}$ un vector aleatorio de 6×1. Calcule la proyección de $\mathbf{w}$ sobre H usando B y la proyección de $\mathbf{w}$ sobre H usando D. Compare los resultados. Repita para otros dos o más vectores $\mathbf{w}$. Escriba la interpretación de sus observaciones.

d. (*Lápiz y papel*) Si $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ es una base ortonormal para un subespacio H y B es la matriz $[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k]$, pruebe que la proyección de $\mathbf{w}$ sobre H es igual a $BB^t\mathbf{w}$.

8. a. (*Lápiz y papel*) Si A es una matriz real, explique por qué el espacio nulo de A^t es perpendicular a la imagen de A; es decir, si H = imagen A, entonces el espacio nulo $(A^t) = H^\perp$.

b. Sea A una matriz aleatoria real de 7×4. Sea **B = orth(A)** y sea **C = null(A ')**. (Entonces las columnas de B forman una base ortonormal para H = imagen A y las columnas de C forman una base ortonormal para $H^\perp$.) Verifique que las columnas de C son ortonormales.

c. Sea $\mathbf{w}$ un vector aleatorio de 7×1. Encuentre $\mathbf{h}$, la proyección de $\mathbf{w}$ sobre H y $\mathbf{p}$, la proyección de $\mathbf{w}$ sobre $H^\perp$. (Vea el problema 7 de esta sección de MATLAB.) Verifique que $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{h}$. Repita para otros tres vectores $\mathbf{w}$.

d. Verifique que $BB^t + CC^t = I$, donde I es la matriz identidad.

e. (*Lápiz y papel*) Pruebe la relación en el inciso d).

9. a. (*Lápiz y papel*) Suponga que $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$ y B es la matriz $[\mathbf{u}_1\ \cdots\ \mathbf{u}_n]$. Sea $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Usando el teorema 4, explique por qué se pueden encontrar las coordenadas de $\mathbf{v}$ respecto a la base $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ mediante $B^t\mathbf{v}$.

b. (*Lápiz y papel*) Recuerde que si θ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$, entonces $\cos(\theta) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}/|\mathbf{u}|\,|\mathbf{w}|$. Suponga que $|\mathbf{w}| = 1$. Usando el teorema 4, pruebe que las coordenadas de $\mathbf{w}$ respecto a una base ortonormal se pueden interpretar como los cosenos de los ángulos que forma $\mathbf{w}$ con cada uno de los vectores de la base; es decir, la coordenada de $\mathbf{w}$ que corresponde al coeficiente del i-ésimo vector de la base es igual al coseno del ángulo entre $\mathbf{w}$ y ese vector.

c. Verifique esta interpretación encontrando los ángulos entre el vector dado $\mathbf{w}$ y la base ortonormal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para $\mathbb{R}^2$. Primero, haga un bosquejo a mano para decidir qué ángulos espera. (Utilice el comando **acos** de MATLAB. Con **help acos** se obtiene una descripción. Para cambiar el ángulo de radianes a grados, multiplique por $180/\pi$.)

i. $\mathbf{w}$ = vector de longitud 1 en la dirección de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii. $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{v}_1 = \text{vector de longitud 1 en la dirección de } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \text{vector de longitud 1 en la dirección de } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d. Verifique que $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. Sea $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Encuentre los ángulos entre **s** y cada vector de la base. Primero construya $\mathbf{w} = \mathbf{s}/|\mathbf{s}|$. Los ángulos entre **w** y los vectores de la base serán lo mismo que los ángulos entre **s** y estos vectores. Repita para otro vector **s**.

10. Verifique que las siguientes matrices son ortogonales.

a. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = B$

b. $\left(\frac{1}{14}\right)\begin{pmatrix} -4 & -6 & 12 \\ 6 & -12 & -4 \\ 12 & 4 & 6 \end{pmatrix} = B_1$

c. $\left(\frac{1}{39}\right)\begin{pmatrix} -13 & 14 & -34 \\ -26 & -29 & -2 \\ -26 & 22 & 19 \end{pmatrix} = B_2$

d. **orth(rand3)** $= B_3$

e. $[\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2 \;\; \mathbf{u}_3] = B_4$, donde $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es la base obtenida al aplicar el proceso de Gram-Schmidt a $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

11. **a.** Verifique que cada una de las siguientes matrices es ortogonal. B_1B_2, B_1B_3, B_2B_4 y B_3B_4, donde B_1, B_2, B_3 y B_4 son las matrices del problema 10 anterior.

b. (*Lápiz y papel*) Trabaje el problema 16.

12. **a.** Encuentre la inversa de cada matriz en el problema 10 anterior y verifique que las inversas son ortogonales.

b. (*Lápiz y papel*) Pruebe que la inversa de una matriz ortogonal es una matriz ortogonal.

13. **a.** Encuentre el determinante de cada matriz en el problema 10. Formule una conclusión sobre el determinante de una matriz ortogonal.

b. (*Lápiz y papel*) Pruebe su conclusión.

c. Revise (o resuelva) el problema 2 de MATLAB 3.4. Suponga que **u**, **v** y **w** son vectores en $\mathbb{R}^3$ que forman un paralelepípedo. Si Q es una matriz ortogonal de 3×3, explique por qué $Q\mathbf{u}$, $Q\mathbf{v}$ y $Q\mathbf{w}$ forman un paralelepípedo con el mismo volumen que el formado por **u**, **v** y **w**.

14. **Matrices ortogonales: longitud y ángulo** Recuerde que si θ es el ángulo entre **u** y **w**, entonces $\cos(\theta) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}/|\mathbf{u}|\,|\mathbf{w}|$.

a. Sea Q la matriz ortogonal B_1 en el problema 10 anterior. Elija dos vectores aleatorios **u** y **w**. Calcule y compare la longitud de **v** y la longitud de $Q\mathbf{v}$. Calcule y compare el

coseno del ángulo entre **v** y **w** y el coseno del ángulo entre Q**v** y Q**w**. Repita para un total de tres pares de vectores elegidos **v** y **w**.

b. Repita el inciso a) para otra matriz ortogonal del problema 10. Repita el inciso a) para **Q = orth(2*rand(5)–1)**. (Verifique primero que esta Q es ortogonal.) Escriba una interpretación de sus observaciones de los incisos a) y b).

c. Sea **Q = orth(2*rand(6)–1)**. Verifique que Q es una matriz ortogonal y por ende que las columnas de Q forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^6$.

Sean **x** y **z** dos vectores aleatorios de 6×1. Encuentre **xx**, las coordenadas de **x** respecto a la base dada por las columnas de Q. Encuentre **zz**, las coordenadas de **z** respecto a esta misma base.

Compare |**x** – **z**| con |**xx** – **zz**|. Repita para otro par de vectores **x** y **z** y describa sus observaciones.

d. El inciso c) tiene algunas ramificaciones importantes. En cualquier cálculo o medición se introducen errores. Un aspecto importante al diseñar algoritmos numéricos se refiere a los errores compuestos o acumulados. Se puede interpretar |**x** – **z**| como un error; por ejemplo, **x** puede representar los valores teóricos y **z** una aproximación. Explique cómo puede verse en las observaciones del inciso c) que el cambio del proceso a las coordenadas de una base ortonormal no acumula (incrementa) un error que ya está presente. ¿Por qué el cambio de regreso a coordenadas estándar tampoco aumenta el error?

e. (*Lápiz y papel*) Si Q es una matriz ortogonal y **v** y **w** son vectores, pruebe que $Q\mathbf{v} \cdot Q\mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$. Utilice esta demostración para probar que $|Q\mathbf{v}| = |\mathbf{v}|$ y que el coseno del ángulo entre Q**v** y Q**w** es igual al coseno del ángulo entre **v** y **w**.

f. (*Lápiz y papel*) Pruebe sus observaciones en el inciso c). (Explique primero por qué al encontrar las coordenadas de un vector **x** respecto a las columnas de Q se obtiene lo mismo que al multiplicar **x** por una matriz ortogonal.)

15. Matrices de rotación Será necesario haber hecho los problemas 9 y 10 de MATLAB 4.8. Si sólo ha hecho el problema 9, se pueden resolver los incisos a) y b) para $\mathbb{R}^2$.

a. Considere la matriz de rotación V en el problema 9b) y las matrices de rotación P, Y y R del problema 10a) de MATLAB 4.8. Elija un valor para el ángulo de rotación, por ejemplo, $\pi/4$ y verifique (usando el ángulo que eligió) que cada matriz V, P, Y y R es ortogonal. Repita para otros dos ángulos.

b. (*Lápiz y papel*) Como una matriz de rotación de $n \times n$ es ortogonal, las columnas de la matriz forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$. ¿Por qué? ¿Por qué puede esperarse este tipo de geometría?

c. (*Lápiz y papel*) Recuerde que en el problema 10 de MATLAB 4.8, la posición de la nave se encuentra haciendo las maniobras de inclinación, desviación y giro en algún orden. Esto lleva a una matriz de posición que se forma con el producto de algunas de las matrices de rotación P, Y y R. Explique por qué la matriz de posición es una matriz ortogonal.

d. Suponga que la orientación original de un satélite está dada por las maniobras de inclinación, desviación y giro de manera que su matriz de posición es ortogonal. El centro de control (orientado a lo largo de la coordenadas estándar) verifica periódicamente la posición del satélite pidiéndole las lecturas (en coordenadas del satélite) de objetos con localización conocida en el centro de control.

Cierto satélite manda las siguientes lecturas (que se ajustan para tomar en cuenta las distintas localizaciones del centro de control y del satélite):

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} .7017 \\ -.7017 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{para un objeto en} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{(coordenadas estándar)}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} .2130 \\ .2130 \\ .9093 \end{pmatrix} \quad \text{para un objeto en} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{(coordenadas estándar)}$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} .1025 \\ -.4125 \\ .0726 \end{pmatrix} \quad \text{para un objeto en} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{(coordenadas estándar)}$$

Explique por qué el centro de control sabe que algo está mal con el satélite. [*Sugerencia:* Explique primero por qué la matriz $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$ debe ser igual a $A^{-1}I$, donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y A es la matriz de posición del satélite. Recuerde que las lecturas son las coordenadas de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ respecto al sistema de coordenadas del satélite dadas por A, la matriz de posición. ¿Qué tipo de matrices deben ser A y A^{-1}?]

e. Suponga que la nave se orienta con una maniobra de inclinación, un ángulo de $\pi/4$, seguida de una desviación con un ángulo de $-\pi/3$ y después un giro con un ángulo de $\pi/6$. Encuentre la matriz de posición.

Encuentre los ángulos entre cada uno de los ejes coordenados de la nave y el eje x estándar, es decir, los ángulos entre las columnas de la matriz de posición y el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Encuentre los ángulos entre los ejes coordenados de la nave y el eje y estándar, y los ángulos entre cada eje coordenado de la nave y el eje z estándar. (Vea el problema 9 de esta sección de MATLAB.) Explique su procedimiento.

16. a. Sea $\mathbf{x}$ un vector aleatorio de 3×1. Sea $\mathbf{v} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Encuentre la matriz $H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$, donde I es la matriz identidad de 3×3. Verifique que H es ortogonal. Repita para otros dos vectores $\mathbf{x}$. (Recuerde que el comando **eye** crea una matriz identidad.)

b. Repita el inciso a) para $\mathbf{x}$, un vector aleatorio de $n \times 1$ con dos valores diferentes de n. (Aquí I será la matriz identidad de $n \times n$.)

c. (*Lápiz y papel*) Si $\mathbf{v}$ es un vector de longitud 1 en $\mathbb{R}^n$, pruebe que $H = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^t$ es una matriz ortogonal.

d. Geometría Las matrices que se acaban de construir se llaman **reflectores elementales**. Sea $\mathbf{v}$ un vector unitario en $\mathbb{R}^2$ y construya H como antes. Sea $\mathbf{x}$ cualquier vector en $\mathbb{R}^2$. Entonces $H\mathbf{x}$ es la reflexión de $\mathbf{x}$ a través de la recta perpendicular a $\mathbf{v}$.

El siguiente programa de MATLAB ilustra esta geometría. El vector $\mathbf{z}$ calculado es $\mathbf{x} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{x}$ y, por lo tanto, será un vector perpendicular a $\mathbf{v}$. Así, $\mathbf{z}$ representa la recta perpendicular a $\mathbf{v}$. Esta recta está dibujada con una línea punteada. La recta determinada por $\mathbf{v}$ se representa con una línea blanca discontinua. El vector $\mathbf{x}$ original está trazado en rojo y el vector reflejado $\mathbf{h}$ está dibujado en azul. Los renglones del programa que preceden a la instrucción de graficar se necesitan para establecer la perspectiva de los

ejes de manera adecuada para que las longitudes iguales se vean iguales y los ángulos rectos se vean como tales. Cuando termine esta parte, dé el comando **axis** para borrar la escala del eje . Si está usando la versión 4.0 de MATLAB utilice **axis('auto')**.

Precaución. La impresión directa de la pantalla NO mantiene longitudes iguales ni ángulos rectos.

Nota. Si está usando la versión 4.0 de MATLAB, dé el comando **plot** antes de las dos instrucciones de **axis**. Observe la pantalla de gráficas final después de dar estos dos comandos.

Introduzca los vectores **vv** y **x** de 2 × 1:

```
v = vv/norm(vv);
z = x - x'*v*v;
H = eye(2) - 2*v*v';
h = H*x;
aa = [x', z', h', -z', v', -v'];
m = min(aa); M = max(aa);
axis([m  M  m  M])
axis('square')
plot([0  z(1)], [0  z(2)], 'w:', [0 -z(1)], [0 -z(2)], 'w:', . . .
     [0  v(1)], [0  v(2)], 'w--', [0 -v(1)], [0  -v(2)], 'w--', . . .
     [0  x(1)], [0  x(2)], 'r', [0 h(1)], [0  h(2)], 'b')
```

Los vectores sugeridos son:

vv = [0;1]	x = [3;3]
vv = [1;1]	x = [-1;2]
vv = [1;1]	x = [4;2]

e. Observando la geometría, dé una conclusión de la relación entre H y H^{-1}. Pruebe su conclusión para cuatro matrices H generadas igual que en los incisos a) y b).

PROBLEMA PROYECTO 17. Trabaje los problemas 9 y 10 de MATLAB 4.8 y el problema 15 de esta sección.

4.10 APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS

En muchos problemas de las ciencias biológicas, físicas y sociales resulta útil describir la relación entre las variables del problema por medio de una expresión matemática. Así, por ejemplo, se puede describir la relación entre el costo, el ingreso y la ganancia con la fórmula sencilla

$$P = R - C$$

En un contexto distinto, se puede representar la relación entre la aceleración debida a la gravedad, el tiempo que un objeto ha caído y la altura a la que estaba mediante la

ley física

$$s = s_0 - v_0t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

donde s_0 es la altura inicial del objeto y v_0 es la velocidad inicial.

Desafortunadamente, no es fácil obtener fórmulas como las anteriores. Casi siempre es la tarea de los científicos o los economistas trabajar con grandes cantidades de datos con el fin de encontrar relaciones entre las variables de un problema. Una manera común de hacer esto es ajustar una curva entre los distintos puntos de datos. Esta curva puede ser recta o cuadrática o cúbica, etcétera. El objetivo es encontrar la curva del tipo específico que se ajuste "mejor" a los datos dados. En esta sección se muestra cómo lograr esto cuando se tienen dos variables en el problema. En cada caso se supone que existen n puntos de datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

En la figura 4.7 se indican tres de las curvas que se pueden usar para ajustar datos.

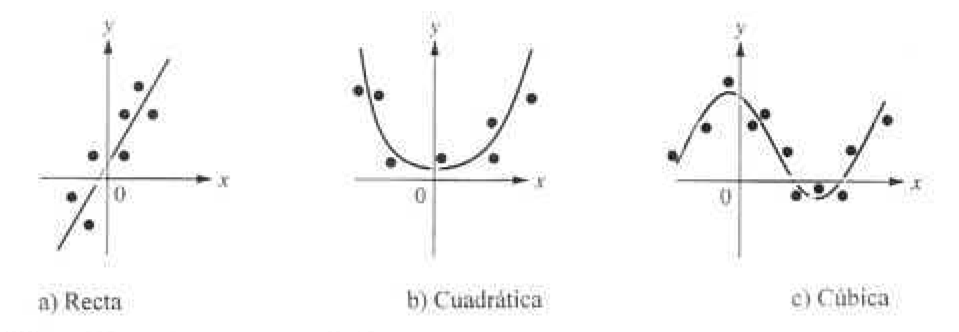


Figura 4.7 Tres curvas en el plano xy

Aproximación por una recta

Antes de continuar, debe aclararse qué quiere decir "mejor ajuste". Suponga que se busca la recta de la forma $y = b + mx$ que mejor represente a los n datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

La figura 4.8 ilustra lo que pasa (usando tres datos). En esta figura se ve que se si se supone que las variables x y y están relacionadas por la fórmula $y = b + mx$, entonces, por ejemplo, para $x = x_1$ el valor correspondiente de y es $b + mx_1$. Esto es diferente del valor "real", $y = y_1$.

En $\mathbb{R}^2$ la distancia entre los puntos (a_1, b_1) y (a_2, b_2) está dada por $d = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$. Por lo tanto, al determinar la manera de elegir la recta $y = b + mx$ que mejor se aproxima a los datos dados, es razonable usar el criterio de escoger aquella que minimiza la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores y de los puntos y el valor y correspondiente a la recta. Observe que como la distancia entre (x_1, y_1) y $(x_1, b + mx_1)$ es $y_1 - (b + mx_1)$, el problema (para los n datos) puede establecerse como sigue:

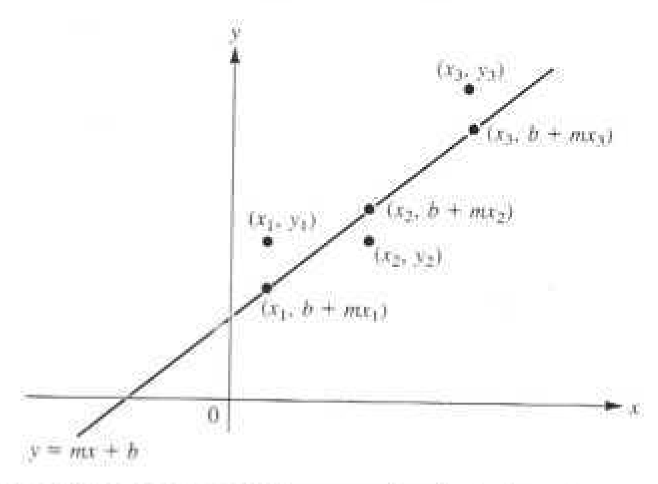


Figura 4.8 Los puntos sobre la recta tienen coordenadas $(x, b + mx)$

Problema de mínimos cuadrados en el caso de una recta

Encuentre números m y b tales que la suma

$$[y_1 - (b + mx_1)]^2 + [y_2 - (b + mx_2)]^2 + \cdots + [y_n - (b + mx_n)]^2 \tag{1}$$

sea mínima. Para estos valores de m y b, la recta $y = mx + b$ se llama **aproximación por la recta de mínimos cuadrados a los datos** $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

Una vez definido el problema, se busca un método para encontrar la aproximación de mínimos cuadrados. Lo más sencillo es escribir todo en forma matricial. Si los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ están todos sobre la recta $y = b + mx$ (es decir, si son colineales), entonces se tiene

$$\begin{aligned} y_1 &= b + mx_1 \\ y_2 &= b + mx_2 \\ &\vdots \\ y_n &= b + mx_n \end{aligned}$$

o

$$\mathbf{y} = A\mathbf{u} \tag{2}$$

donde

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} \tag{3}$$

Si los puntos no son colineales, entonces $\mathbf{y} - A\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ y el problema se convierte en

Forma vectorial del problema de mínimos cuadrados

Encuentre un vector $\mathbf{u}$ tal que la norma euclideana

$$|\mathbf{y} - A\mathbf{u}| \tag{4}$$

sea mínima.

Observe que en $\mathbb{R}^2$, $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$, en $\mathbb{R}^3$, $|(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, etcétera. Entonces minimizar (4) es equivalente a minimizar la suma de cuadrados en (1).

Encontrar el vector $\mathbf{u}$ que minimiza no es tan difícil como parece. Como A es una matriz de $n \times 2$ y $\mathbf{u}$ es una matriz de 2×1, el vector $A\mathbf{u}$ es un vector en $\mathbb{R}^n$ que pertenece a la imagen de A. La imagen de A es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ cuya dimensión es a lo más dos (ya que cuando mucho dos columnas de A son linealmente independientes). Así, por el teorema de aproximación de la norma en $\mathbb{R}^n$ (teorema 8, página 405), (4) es un mínimo cuando

$$A\mathbf{u} = \text{proy}_H\, \mathbf{y}$$

donde H es la imagen de A. Se ilustrará esto con una gráfica para el caso de $n = 3$.

En $\mathbb{R}^3$ la imagen de A será un plano o una recta que pasa por el origen (ya que estos son los únicos subespacios de $\mathbb{R}^3$ de dimensión uno o dos). Vea la figura 4.9. El vector que minimiza se denota por $\overline{\mathbf{u}}$. De la figura (y del teorema de Pitágoras) se deduce que $|\mathbf{y} - A\mathbf{u}|$ es mínima cuando $\mathbf{y} - A\mathbf{u}$ es ortogonal a la imagen de A.

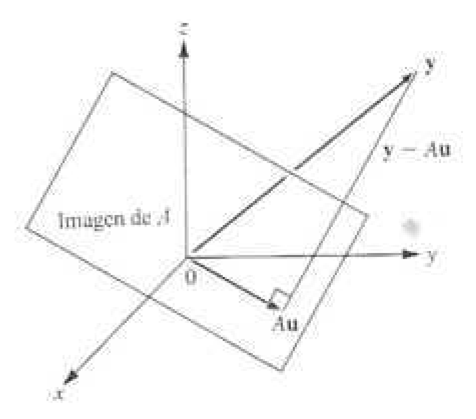


Figura 4.9 $\mathbf{y} - A\mathbf{u}$ es ortogonal a $A\mathbf{u}$

Es decir, si $\overline{\mathbf{u}}$ es el vector que minimiza, entonces para todo vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$

$$A\mathbf{u} \perp (\mathbf{y} - A\overline{\mathbf{u}}) \tag{5}$$

Usando la definición de producto escalar en $\mathbb{R}^n$, se encuentra que (5) se vuelve

$$A\mathbf{u} \cdot (\mathbf{y} - A\bar{\mathbf{u}}) = 0$$
$$(A\mathbf{u})^t(\mathbf{y} - A\bar{\mathbf{u}}) = 0 \qquad \text{fórmula (6), página 124}$$
$$(\mathbf{u}^t A^t)(\mathbf{y} - A\bar{\mathbf{u}}) = 0 \qquad \text{teorema 1}ii\text{), página 122}$$

o

$$\mathbf{u}^t(A^t\mathbf{y} - A^tA\bar{\mathbf{u}}) = 0 \tag{6}$$

La ecuación (6) se cumple para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ sólo si

$$A^t\mathbf{y} - A^tA\bar{\mathbf{u}} = 0 \tag{7}$$

Al despejar $\bar{\mathbf{u}}$ de (7), se obtiene

Solución al problema de mínimos cuadrados para un ajuste por línea recta

Si A y $\mathbf{y}$ son como se definieron en (3), entonces la recta $y = mx + b$ da el mejor ajuste (en el sentido de mínimos cuadrados) para los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ cuando $\begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{u}}$ y

$$\bar{\mathbf{u}} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{y} \tag{8}$$

Aquí se ha supuesto que A^tA es invertible. Éste siempre es el caso si los n datos no son colineales. La demostración de este hecho se deja para el final de esta sección.

EJEMPLO 1 **La recta que mejor se ajusta para cuatro datos** Encuentre la recta que da el mejor ajuste para los datos (1, 4), (−2, 5), (3, −1) y (4, 1).

Solución En este caso

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A^tA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 30 \end{pmatrix}, \qquad (A^tA)^{-1} = \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$\bar{\mathbf{u}} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{y} = \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{84}\begin{pmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{84}\begin{pmatrix} 300 \\ -74 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.57 \\ -0.88 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la recta que mejor se ajusta está dada por

$$y = 3.57 - 0.88x$$

Esta recta y los cuatro datos se bosquejan en la figura 4.10.

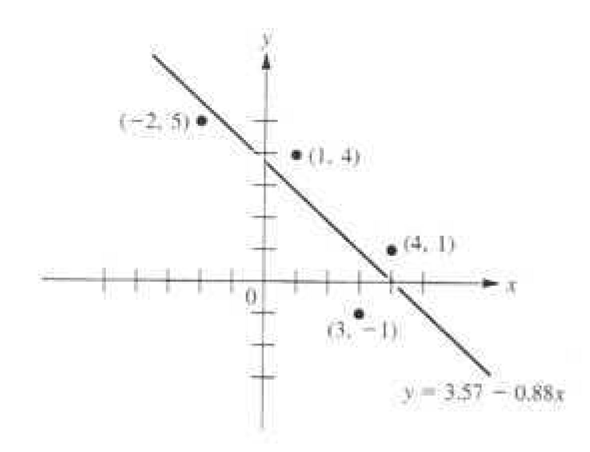


Figura 4.10 La recta que mejor se ajusta a los cuatro puntos es $y = 3.57 - 0.88x$ ◆

Aproximación cuadrática

Ahora se desea ajustar una curva cuadrática a los n datos. Recuerde que una curva cuadrática en x es cualquier expresión de la forma

$$y = a + bx + cx^2 \tag{9}$$

La ecuación (9) es la ecuación de una parábola en el plano. Si los n datos estuvieran sobre la parábola, se tendría

$$\begin{aligned} y_1 &= a + bx_1 + cx_1^2 \\ y_2 &= a + bx_2 + cx_2^2 \\ &\vdots \\ y_n &= a + bx_n + cx_n^2 \end{aligned} \tag{10}$$

Para

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{11}$$

El sistema (10) se puede volver a escribir como

$$\mathbf{y} = A\mathbf{u}$$

como antes. Si los datos no están todos sobre la misma parábola, entonces $\mathbf{y} - A\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ para cualquier vector $\mathbf{u}$, y de nuevo el problema es

Encontrar un vector $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\lvert \mathbf{y} - A\mathbf{u} \rvert$ sea mínima.

Usando un razonamiento similar al anterior, se puede demostrar que si al menos tres de las x_i son diferentes, entonces A^tA es invertible y el vector que minimiza al vector $\overline{\mathbf{u}}$ está dado por

$$\boxed{\overline{\mathbf{u}} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{y}} \qquad \textbf{(12)}$$

EJEMPLO 2 **El mejor ajuste cuadrático para cuatro puntos** Encuentre el mejor ajuste cuadrático para los datos del ejemplo 1.

Solución Aquí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A^tA = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 30 \\ 6 & 30 & 84 \\ 30 & 84 & 354 \end{pmatrix}, \qquad (A^tA)^{-1} = \frac{1}{4752}\begin{pmatrix} 3564 & 396 & -396 \\ 396 & 516 & -156 \\ -396 & -156 & 84 \end{pmatrix}$$

y

$$\overline{\mathbf{u}} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{y} = \frac{1}{4752}\begin{pmatrix} 3564 & 396 & -396 \\ 396 & 516 & -156 \\ -396 & -156 & 84 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4752}\begin{pmatrix} 3564 & 396 & -396 \\ 396 & 516 & -156 \\ -396 & -156 & 84 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 31 \end{pmatrix} = \frac{1}{4752}\begin{pmatrix} 17820 \\ -3852 \\ -180 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.75 \\ -0.81 \\ -0.04 \end{pmatrix}$$

Así, el mejor ajuste cuadrático para los datos está dado por la parábola

$$y = 3.75 - 0.81x - 0.04x^2$$

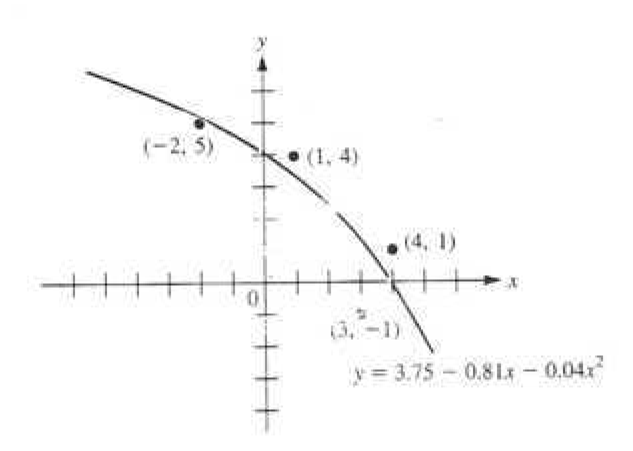


Figura 4.11 La ecuación cuadrática $y = 3.75 - 0.81x - 0.04x^2$ es el mejor ajuste cuadrático para los cuatro puntos

La figura 4.11 presenta una gráfica de la parábola y los cuatro puntos. ✦

Nota. Si n es grande, entonces el cálculo de $(A^tA)^{-1}$ puede llevar a una gran cantidad de errores numéricos. En este caso es mucho más eficientes encontrar $\bar{\mathbf{u}}$ resolviendo el sistema $(A^tA\bar{\mathbf{u}}) = A^ty$ por eliminación gaussiana. De hecho, resolver $A^tA\bar{\mathbf{u}} = A^ty$ por este método es casi siempre más eficiente que calcular $(A^tA)^{-1}$ cuando $n > 3$.

EJEMPLO 3 **El mejor ajuste cuadrático para cinco puntos puede proporcionar una estimación para *g*** El método de ajuste de curvas se puede usar para medir las constantes físicas, suponga, por ejemplo, que se deja caer un objeto desde una altura de 200 metros. Se toman las siguientes mediciones:

Tiempo transcurrido	Altura (en metros)
0	200
1	195
2	180
4	120
6	25

Si un objeto en la altura inicial, en reposo, se deja caer, entonces su altura después de t segundos está dada por

$$s = 200 - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Para estimar g, se puede encontrar un ajuste cuadrático para los cinco puntos dados. Los coeficientes del término t^2 serán, si las mediciones son buenas, una aproximación razonable al [illegible] $\frac{1}{2}g$ [illegible] anterior, se tiene

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\\1&4&16\\1&6&36\end{pmatrix},\quad A^t=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&4&6\\0&1&4&16&36\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad \mathbf{y}=\begin{pmatrix}200\\195\\180\\120\\25\end{pmatrix}$$

Entonces

$$A^tA=\begin{pmatrix}5&13&57\\13&57&289\\57&289&1569\end{pmatrix},\quad (A^tA)^{-1}=\frac{1}{7504}\begin{pmatrix}5912&-3924&508\\-3924&4596&-704\\508&-704&116\end{pmatrix}$$

y

$$\overline{\mathbf{u}}=\frac{1}{7504}\begin{pmatrix}5912&-3924&508\\-3924&4596&-704\\508&-704&116\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&4&6\\0&1&4&16&36\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200\\195\\180\\120\\25\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{7504}\begin{pmatrix}5912&-3924&508\\-3924&4596&-704\\508&-704&116\end{pmatrix}\begin{pmatrix}720\\1185\\3735\end{pmatrix}=\frac{1}{7504}\begin{pmatrix}1504080\\-8460\\-35220\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}200.44\\-1.13\\-4.96\end{pmatrix}$$

Los datos se ajustaron con la ecuación cuadrática

$$s(t)=200.44-1.13t-4.69t^2$$

y se tiene que $\frac{1}{2}g\approx 4.69$, o sea,

$$g\approx 2(4.69)=9.38 \text{ m/seg}^2$$

Esto es razonablemente cercano al valor correcto de 9.81 m/seg^2. Para obtener una aproximación más exacta de g sería necesario obtener observaciones más exactas. Observe que el término $-1.13t$ representa una velocidad inicial (hacia abajo) de 1.13 m/seg. ✦

Se observa aquí que las aproximaciones de polinomios de grado más alto se obtienen de manera idéntica. Vea algunos detalles en los problemas 7 y 9.

Esta sección se concluye demostrando el resultado que garantiza que la ecuación (8) será siempre válida, excepto cuando los puntos estén en una misma recta vertical.

TEOREMA 1 Sea $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, n puntos en $\mathbb{R}^2$, y suponga que no todas las x_i son iguales. Entonces si A está dada como en (3), la matriz A^tA es una matriz invertible de 2×2.

Nota. Si $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$, entonces todos los datos están sobre la recta vertical $x = x_1$, y la mejor aproximación lineal es, por supuesto, esta recta.

Demostración Se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

Como no todas las x_i son iguales, las columnas de A son linealmente independientes. Ahora bien,

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}$$

Si A^tA no es invertible, entonces det $A^tA = 0$. Esto significa que

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \tag{13}$$

Sea $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Entonces

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = n, \quad |\mathbf{x}|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad \text{y} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

de manera que la ecuación (13) se puede restablecer como

$$|\mathbf{u}|^2|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}|^2$$

y sacando raíz cuadrada se obtiene

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}| = |\mathbf{u}|\ |\mathbf{x}|$$

Ahora, la desigualdad de Cauchy Schwartz (página 406) dice que $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}| \leq |\mathbf{u}|\ |\mathbf{x}|$ en donde la igualdad se cumple si y sólo si $\mathbf{x}$ es una constante múltiplo de $\mathbf{u}$. Pero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{x}$ son las columnas de A que son linealmente independientes, por hipótesis. Esta contradicción prueba el teorema. ◆

PROBLEMAS 4.10

Autoevaluación

I. La recta de mínimos cuadrados para los datos (2, 1), (−1, 2) y (3, −5) minimizará

a. $[2-(b+m)]^2+[-1-(b+2m)]^2+[3-(b-5m)]^2$

b. $[1-(b+2m)]^2+[2-(b-m)]^2+[-5-(b+3m)]^2$

c. $[1-(b+2m)]^2+|2-(b-m)|+|-5-(b+3m)|$

d. $[1-(b+2)]^2+[2-(b-1)]^2+[-5-(b+3)]^2$

En los problemas 1 al 3 encuentre la recta que se ajusta mejor a los puntos dados.

1. (1, 3), (−2, 4), (7, 0)

2. (−3, 7), (4, 9)

3. (1, −3), (4, 6), (−2, 5), (3, −1)

En los problemas 4 al 6 encuentre el mejor ajuste cuadrático para los puntos dados.

4. (2, −5), (3, 0), (1, 1), (4, −2)

5. (−7, 3), (2, 8), (1, 5)

6. (1, −1), (3, −6), (5, 2), (−3, 1), (7, 4)

7. La ecuación cúbica general está dada por

$$a+bx+cx^2+dx^3$$

Demuestre que la mejor aproximación cúbica a n puntos está dada por

$$\bar{\mathbf{u}}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=(A^tA)^{-1}A^t\mathbf{y}$$

donde $\mathbf{y}$ es como se definió y

$$A=\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3\\1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\1 & x_n & x_n^2 & x_n^3\end{pmatrix}$$

8. Encuentre la mejor aproximación cúbica para los puntos (3, −2), (0, 3), (−1, 4), (2, −2) y (1, 2).

9. El polinomio general de grado k está dado por

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k$$

Respuesta a la autoevaluación

I. b

Demuestre que el polinomio de grado k que mejor se ajusta a los n puntos está dado por

$$\overline{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{y}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^k \end{pmatrix}$$

10. Los puntos (1, 5.52), (−1, 15.52), (3, 11.28) y (−2, 26.43) están todos en una parábola

a. Encuentre la parábola

b. Demuestre que $|\mathbf{y} - A\overline{\mathbf{u}}| = 0$.

11. Un fabricante compra grandes cantidades de refacciones para cierta máquina. Él encuentra que este costo depende del número de cajas compradas al mismo tiempo y que el costo por unidad disminuye conforme el número de cajas aumenta. Supone que el costo es una función cuadrática del volumen y de las facturas anteriores obtiene la siguiente tabla:

Número de cajas compradas	Costo total (dólares)
10	150
30	260
50	325
100	500
175	670

Encuentre su función de costo total.

12. Una persona lanza una pelota al aire hacia abajo. La altura que alcanza está dada por $s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}gt^2$. Se toman las siguientes mediciones:

Tiempo transcurrido (segundos)	Altura (pies)
1	57
1.5	67
2.5	68
4	9.5

Usando los datos, estime

a. la altura a la que se dejó caer la pelota,

b. la velocidad inicial

c. g (en pies/seg^2)

MANEJO DE CALCULADORA

En estadística, un problema importante es encontrar la recta de mínimos cuadrados. En el contexto de estadística, el procedimiento para hacerlo se llama **regresión lineal**. Encontrar el mejor ajuste cuadrático se conoce como **regresión cuadrática**, etcétera. La regresión lineal es una herramienta de uso común y prácticamente todas las calculadoras que grafican pueden calcular los valores de m y b una vez que se introducen los datos.

TI-85

Todos los cálculos estadísticos se realizan oprimiendo la tecla [STAT]. Se volverá a calcular la recta de regresión para los datos del ejemplo 1: (1, 4), (−2, 5), (3, −1) y (4, 1). Presione [STAT] [F2] ⟨EDIT⟩ [ENTER] [ENTER] Esto tiene el efecto de dar el nombre de **x Stat** y **y Stat** a las coordenadas x y y, respectivamente. Después de $x_1 = 1, y_1 = 4, x_2 = -2, y_2 = 5, x_3 = 3, y_3 = -1, x_4 = 4, y_4 = 1$ [EXIT].† Ahora se introducen los datos. Presione [F1] ⟨CALC⟩ [ENTER] [ENTER] y se despliega:

x = x Stat **y = y Stat**

Ahora presione [F2] ⟨LINR⟩ y aparece lo siguiente:

LinR
a = 3.57142857143
b = −.880952380952
corr = −.846391670113
n = 4

La recta de regresión en la TI-85 está dada como $y = a + bx$, de manera que es

$$y = 3.57142857143 - 0.880952380952x$$

que es lo que se obtuvo (con menos lugares decimales) en el ejemplo 1. "corr" significa "coeficiente de correlación" cuya explicación pertenece a un curso de estadística. La $n = 4$ se refiere a cuatro datos. Para obtener el mejor ajuste cuadrático con los mismos datos, se comienza como antes hasta que se despliega

x = x Stat **y = y Stat**

Después se oprime [MORE] [F1] ⟨P2REG⟩ y se despliega lo siguiente:

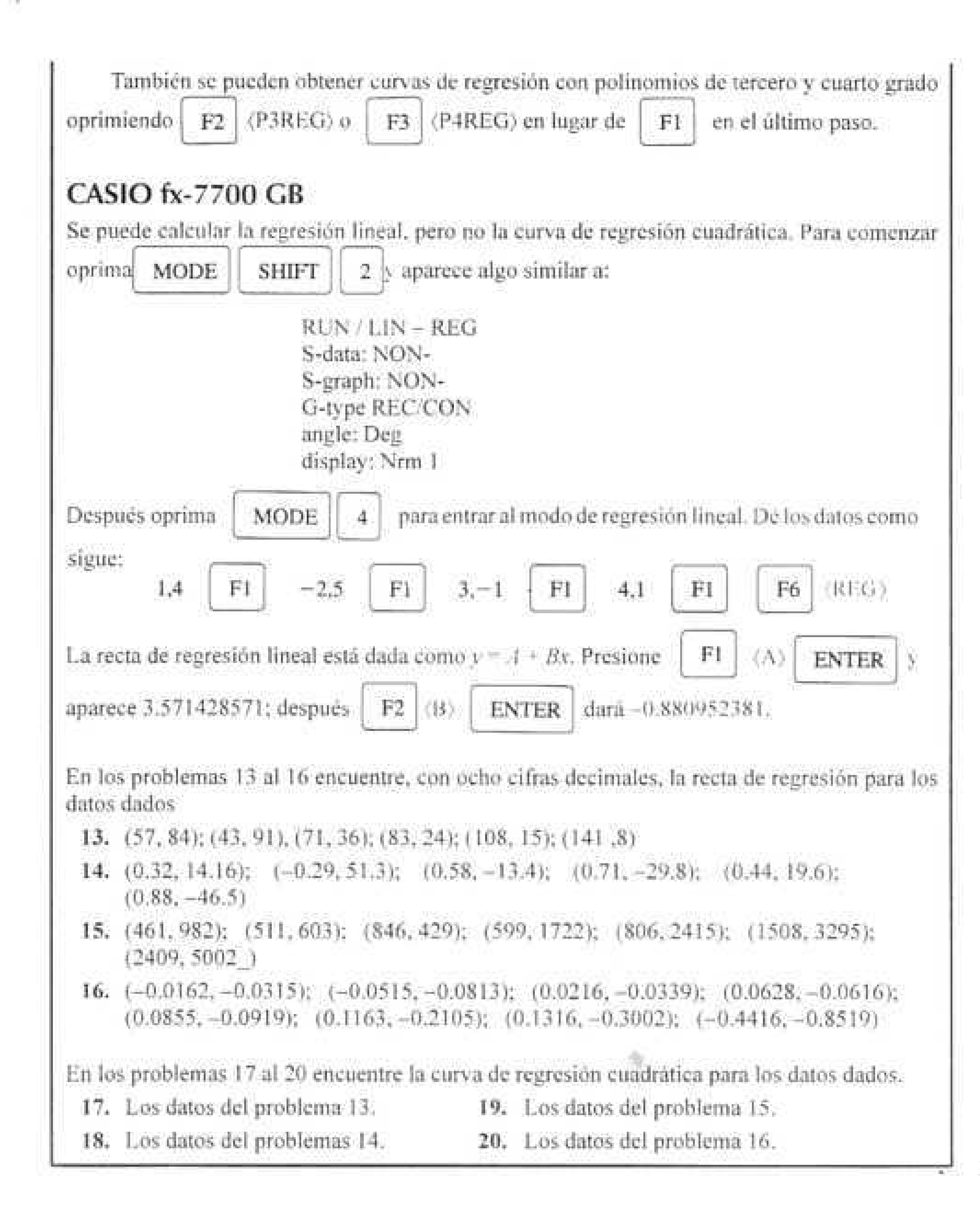
P2Reg
n = 4
PRegC = {−.037878787879 − .810606060606 3.75}

lo que denota el polinomio

$$y = -.037878787879x^2 - .810606060606x + 3.75$$

que es lo que se obtuvo en el ejemplo 2.

† Si aparecen algunos datos oprima [F5] ⟨CLRxy⟩ en el modo EDIT para borrarlos.



También se pueden obtener curvas de regresión con polinomios de tercero y cuarto grado oprimiendo [F2] (P3REG) o [F3] (P4REG) en lugar de [F1] en el último paso.

CASIO fx-7700 GB

Se puede calcular la regresión lineal, pero no la curva de regresión cuadrática. Para comenzar oprima [MODE] [SHIFT] [2] y aparece algo similar a:

RUN / LIN – REG
S-data: NON-
S-graph: NON-
G-type REC/CON
angle: Deg
display: Nrm 1

Después oprima [MODE] [4] para entrar al modo de regresión lineal. Dé los datos como sigue:

1,4 [F1] −2,5 [F1] 3,−1 [F1] 4,1 [F1] [F6] (REG)

La recta de regresión lineal está dada como $y = A + Bx$. Presione [F1] (A) [ENTER] y aparece 3.571428571; después [F2] (B) [ENTER] dará −0.880952381.

En los problemas 13 al 16 encuentre, con ocho cifras decimales, la recta de regresión para los datos dados

13. (57, 84); (43, 91), (71, 36); (83, 24); (108, 15); (141 ,8)

14. (0.32, 14.16); (−0.29, 51.3); (0.58, −13.4); (0.71, −29.8); (0.44, 19.6); (0.88, −46.5)

15. (461, 982); (511, 603); (846, 429); (599, 1722); (806, 2415); (1508, 3295); (2409, 5002_)

16. (−0.0162, −0.0315); (−0.0515, −0.0813); (0.0216, −0.0339); (0.0628, −0.0616); (0.0855, −0.0919); (0.1163, −0.2105); (0.1316, −0.3002); (−0.4416, −0.8519)

En los problemas 17 al 20 encuentre la curva de regresión cuadrática para los datos dados.

17. Los datos del problema 13.

18. Los datos del problemas 14.

19. Los datos del problema 15.

20. Los datos del problema 16.

MATLAB 4.10

1. Considere el conjunto de datos (1, 2), (2, .5), (−1, 4), (3.5, −1), (2.2, .4) y (4, −2). Sea **x** un vector de 6 × 1 que contiene las coordenadas x y sea **y** un vector de 6 × 1 con las coordenadas y.

a. Dé **A = [ones(6,1)x]** y explique por qué A es la matriz usada para encontrar el ajuste a estos datos con la recta de mínimos cuadrados.

b. Encuentre la solución de mínimos cuadrados $\mathbf{u} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{y}$. Encuentre **v = A\y** y compare con **u**. (El comando diagonal invertida "\" en MATLAB encuentra la solución de mínimos cuadrados para un sistema de rango completo sobredeterminado.)

c. Encuentre $|\mathbf{y} - A\mathbf{u}|$. Elija **w = u + [.1;–.5]**, encuentre $|\mathbf{y} - A\mathbf{w}|$ y compare con $|\mathbf{y} - A\mathbf{u}|$. Repita para otros dos vectores **w**. Explique qué parte de la teoría de aproximación por mínimos cuadrados ilustra esto.$\text{proy}_H\mathbf{y}$

d. La teoría de aproximación por mínimos cuadrados asegura que $A\mathbf{u} = \text{proy}_H\mathbf{y}$, donde H es la imagen de A y **u** es la solución de mínimos cuadrados. Encuentre $\text{proy}_H\mathbf{y}$ usando **B = orth(A)** como en el problema 7a) de MATLAB 4.9. Verifique que $A\mathbf{u} = \text{proy}_H\mathbf{y}$.

e. La visualización de los datos y del ajuste con la recta de mínimos cuadrados puede ser útil. El siguiente programa de MATLAB encuentra los coeficientes para el ajuste con la recta, genera varios valores de la coordenada x (el vector **s**), evalúa la ecuación de la recta para estos valores, grafica el conjunto de datos originales con signos de * en blanco, y grafica la recta de mínimos cuadrados.

Nota. Por supuesto, para graficar una recta no se requiere evaluar la ecuación para varios valores, por lo que en realidad no es necesario encontrar el vector **s**. Sin embargo, para graficar ajustes con polinomios de grado más alto (o exponenciales) se necesita evaluar la función para varios valores de x. La generación de **s** se incluye aquí para proporcionar el modelo de MATLAB que necesitará sólo pequeñas modificaciones para otro tipo de ajustes.

```
u = A\y
s = min(x):(max(x)–min(x))/100:max(x);
fit = u(1)+u(2)*s
plot(x,y,'w*',s,fit)
```

¿Parece un ajuste razonable la recta de mínimos cuadrados para estos datos?

f. Utilice la ecuación de mínimos cuadrados para aproximar un valor de y para $x = 2.9$.

2. Considere los datos en el problema 11 de esta sección. Sea **x** un vector de 5×1 que contiene los valores del número de cajas compradas. Sea **y** el vector de 5×1 con los valores correspondientes del costo total.

a. El problema pide un ajuste cuadrático. Dé **A = [ones(5,1) x x.^2]** y explique por qué esta matriz es la matriz usada para ese ajuste.

Nota. El punto (.) antes del símbolo "^" es importante. Le dice a MATLAB que eleve al cuadrado cada componente del vector **x**.

b. Siga las mismas instrucciones de los incisos b) al e) del problema 1 anterior, excepto para el inciso b), seleccione **w** como un vector de 3×1, por ejemplo **w = u + [.1;–.2;–.05]**; para el inciso e) use **fit = u(1)+u(2)*s + u(3)*s.^2;**.

c. Usando la ecuación cuadrática de mínimos cuadrados, estime el costo total para 75 cajas y estime el costo total para 200 cajas.

3. Trabaje el problema 12 de esta sección.

4. Es importante observar las gráficas de los datos y la solución de mínimos cuadrados. Una solución de mínimos cuadrados puede estar bastante afectada por uno o dos puntos. Algunos datos pueden ser muy distintos al resto de los ellos. Éstos se llaman **puntos dispersos**. Los puntos dispersos pueden indicar errores en los datos o un comportamiento poco usual que puede investigarse más.

a. Sean **x** y **y** dos vectores que representan los datos del problema 1 de esta sección. Se agregará el punto (1.5, –3.8) al conjunto de datos. Sea $r = 1.5$ y $t = -3.8$. Forme **xx = [x;r]** y **yy = [y;t]**.

i. Dé el comando **plot(xx,yy,'w*')**, localice el dato adicional y explique por qué se puede considerar un punto disperso.

ii. Se graficará la recta de ajuste de mínimos cuadrados para los datos originales y el mismo ajuste para los datos aumentados en la misma gráfica para que se puedan comparar.

Encuentre **u**, la recta de solución de mínimos cuadrados para los datos en **x** y **y**. Encuentre **uu**, la recta de solución de mínimos cuadrados para los datos en **xx** y **yy**. Forme **s** igual que en el problema 1e) anterior usando **xx** en lugar de **x**. Encuentre **fit** igual que en el problema 1e) usando **u** y encuentre **fit1** usando **uu**. Dé el comando

plot(x, y, 'w*', r, t, 'wo', s, fit, 'r', s, fit1, 'b')

Este comando graficará los datos originales con un * blanco (**w*** en el comando) y el punto disperso con una vocal o blanca (**wo**). La recta de ajuste para los datos originales quedará en rojo (**r**) y la de los datos aumentados en azul (**b**).

iii. Describa el efecto del punto disperso sobre la recta de ajuste de mínimos cuadrados. ¿Qué recta piensa usted que representa mejor los datos?

b. Repita el inciso a) para $r = 4.9$ y $t = 4.5$.

5. a. Para los datos en el problema de calculadora 16:

Encuentre la matriz A para la recta de ajuste de mínimos cuadrados y después encuentre **u**, la solución de mínimos cuadrados.

Encuentre B, la matriz para un ajuste cuadrático de mínimos cuadrados y después encuentre **v**, la solución de mínimos cuadrados.

Encuentre $|\mathbf{y} - A\mathbf{u}|$ y $|\mathbf{y} - B\mathbf{v}|$.

Grafique los datos y ambas curvas de mínimos cuadrados en la misma gráfica: genere **s** y **fit** igual que en el problema 1e) anterior y genere **fitq = v(1) + v(2)*s + v(3)*s.^2;**. Después dé **plot(x, y, 'w*', s, fit, 'r', s, fitq, 'b')**.

Analice cuál de los dos (recta o cuadrático) es un mejor ajuste. Justifique su conclusión con el trabajo realizado.

b. Repita el inciso a) para el problema de calculadora 14.

6. Se tomaron, del *World Almanac*, los siguientes datos sobre eficiencia de combustible en mi/gal (millas por galón, mpg) para automóviles de pasajeros en Estados Unidos.

Año	Promedio de mpg para automóviles de pasajeros en Estados Unidos
1980	15.5
1981	15.9
1982	16.7
1983	17.1
1984	17.8
1985	18.2
1986	18.3
1987	19.2
1988	20.0

a. Encuentre una recta de ajuste por mínimos cuadrados y grafíquela. ($x = 0$ representa 1980, $x = 8$ representa 1988, etc.) Analice si la recta parece un ajuste razonable para los datos.

b. Suponiendo que la tendencia continúa, utilice la ecuación de la recta para predecir el año en que el promedio de mpg será de 25.

7. Una diseñadora industrial contrata sus servicios profesionales para consultarle sobre un experimento que lleva a cabo. Ella está interesada en saber qué efecto tiene la temperatura sobre la resistencia de su producto. Como los costos involucrados son altos, la diseñadora tiene un límite en la cantidad de datos que puede obtener:

Temperatura	Nivel de resistencia
600	40
600	44
700	48
700	46
700	50
900	48
950	46
950	45

Encuentre una recta de mínimos cuadrados que se ajuste y un curva cuadrática de mínimos cuadrados que se ajuste. Grafique ambas. A partir de este análisis argumente si cree que hay evidencia de que la temperatura tiene algún efecto sobre la resistencia y, si es así, diga qué temperatura recomendaría para fabricar el producto más fuerte. (Valores mayores de nivel de resistencia indican un producto más fuerte.)

M

8. En el disco hay un archivo *mile.m* que contiene datos del *World Almanac* para tiempos récord en la carrera de una milla y el año en que se lograron (de 1880 a 1985).

Dé el comando **mile**. Esto cargará las variables de los datos en el archivo. La pantalla no desplegará nada. Los datos del año se almacenan en la variable **xm** y los tiempos récord en la variable **ym**. Para desplegar los datos dé **[xm ym]**.

Los valores en **xm** se encuentran entre 80 y 185, donde 80 representa el año 1880 y 185 el año 1985. Los tiempos en **ym** están en segundos. Se cuenta con 37 datos.

a. Encuentre la recta de mínimos cuadrados y grafíquela. ¿Es esta recta un ajuste razonable?
b. A partir de la pendiente de la recta, determine el número promedio de segundos por año que ha disminuido el tiempo récord.
c. Si la tendencia continúa, prediga cuándo se romperá la barrera de una milla en 3 minutos; es decir, cuándo ocurrirá el tiempo récord de 3 minutos o menos. ¿Piensa que la tendencia continuará?

9. **Crecimiento de población** Con frecuencia se dice que el crecimiento de la población es exponencial. De cualquier manera, la recta de ajuste de mínimos cuadrados puede ser valiosa si se usa junto con una *rexpresión* de los valores de los datos. Si x y p tienen una relación exponencial, esto significa que $p = Ae^{kx}$ para algunas constantes A y k. Usando las propiedades de los logaritmos, se encuentra que $\ln(p) = \ln(A) + kx$. Observe que x y $\ln(p)$ tienen una relación lineal.

Así, si se espera una relación exponencial, se rexpresan los datos (x, p) en términos de los datos $(x, \ln(p))$ y se encuentra una solución de mínimos cuadrados para rexpresar los datos. Esto conduce a $\ln(p) = mx + b$ y, por lo tanto, $p = e^{mx+b}$ es el ajuste exponencial.

a. En seguida se dan los datos de población para Estados Unidos para cada década de 1800 a 1900.

Año	Población (en millones)
1800	5.3
1810	7.2
1820	9.6
1830	12.9
1840	17.1
1850	23.2
1860	31.4
1870	38.6
1880	50.2
1890	62.9
1900	76.2

Dé **x = [0:10]'**. (Los valores x son tales que $x = 0$ representa 1800 y $x = 10$ representa 1900.) Sea **p** el vector de los valores de población correspondientes. Dé **y = log(p);**

i. Encuentre la recta de ajuste de mínimos cuadrados para los datos en **x** y **y**. Encuentre **s** y **fit** igual que en el problema 1e) anterior. Dé

fite = exp(fit);
plot(x, p, '*w', s, fite)

Aquí **exp(fit)** encontrará la exponencial e^{fit}. ¿Se parece a una exponencial el crecimiento de la población?

ii. Suponiendo que la población continúa creciendo a la misma tasa, utilice la solución de mínimos cuadrados para predecir la población en 1950. (Encuentre el valor y usando la solución de la recta de mínimos cuadrados y después encuentre la población p usando $p = e^y$.)

b. En la tabla siguiente se encuentran los datos de población para Estados Unidos de 1910 a 1980.

Año	Población (en millones)
1910	92.2
1920	106.0
1930	123.2
1940	132.2
1950	151.3
1960	179.3
1970	203.3
1980	226.5

i. Con estos datos y con su proyección de población en 1950 del inciso a), explique por qué parece que la tasa de crecimiento disminuyó en el segundo siglo.

ii. Encuentre el ajuste exponencial de mínimos cuadrados siguiendo los pasos del inciso a). Asegúrese de usar los logaritmos de los valores de la población para **y**. ¿Es todavía exponencial el crecimiento de la población?

iii. Explique de qué manera, los coeficientes en la solución de mínimos cuadrados del inciso a) y el inciso b*ii*) muestran que la tasa de crecimiento ha disminuido.

iv. Suponiendo que el crecimiento de la población continúa como en años recientes, prediga la población para el año 2000 usando el ajuste exponencial del inciso b*ii*).

10. **Geología minera** Los geólogos estudian la composición de rocas y minerales en las formaciones para reunir información sobre ellas. Estudiando las rocas metamórficas y determinando aspectos como temperatura y presión a la que se formaron se obtendrá información útil sobre las condiciones presentes en el momento de formación. Un mineral común es el granate. Se sabe que el coeficiente de distribución de Fe-Mg del granate es altamente dependiente de la temperatura a la que éste se formó. (Aquí, el coeficiente de distribución Fe-Mg se relaciona con las proporciones de fierro (Fe) y magnesio (Mg) en el granate.) Sin embargo, la cantidad de calcio (Ca) en el granate también afecta el coeficiente de distribución Fe-Mg. Se pueden hacer correcciones a las estimaciones de temperatura si la relación entre la cantidad de calcio presente y el coeficiente Fe-Mg del granate se pueden determinar. Se reunieron los siguientes datos de las muestras de granate tomadas en las montañas de Esplanade en British Columbia.

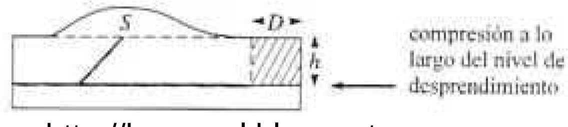
Fracción molecular de Ca	Coeficiente de distribución Fe-Mg
.1164	.12128
.0121	.17185
.0562	.13365
.0931	.1485
.0664	.12637
.1728	.10406
.1793	.10703
.1443	.1189
.1824	.09952

Encuentre la recta de mínimos cuadrados y grafíquela. Utilice la fracción molecular de Ca para las coordenadas x y el coeficiente de distribución Fe-Mg para las coordenadas y. ¿Tienen los datos, en apariencia, una relación lineal? Escriba la ecuación de la recta de mínimos cuadrados.

PROBLEMA PROYECTO

11. **Geología petrolera** Las formaciones rocosas se encuentran formando capas. Los pliegues en las rocas pueden estar causadas por deformaciones de compresión. En pliegues simples, llamados **deformaciones anticlinales**, cuando se comprimen las capas inferiores, ocurren fracturas que empujan a la roca más arriba de su nivel de formación original (llamado **nivel de datos referencia**). El diagrama esquemático siguiente representa una sección transversal.

Petróleo y gas pueden quedar atrapados en la parte del pliegue donde ocurre la fractura. Existe un nivel más abajo del cual no ha ocurrido compresión, por lo que no hay fractura y por lo tanto no hay petróleo ni gas. Este nivel se llama **nivel de desprendimiento**. Es de interés estimar la profundidad del nivel de desprendimiento, ya que una compañía petrolera puede, entonces, concluir razonablemente si sería o no económico hacer una perforación más profunda para encontrar petróleo.



Si se supone que un pliegue tiene una sección transversal uniforme, entonces la conservación del volumen de la roca implica que el área de la roca arriba del nivel de referencia (etiquetado con S en el diagrama) debe ser igual al área de la roca comprimida (representada por el área sombreada en el diagrama). Así $S = Dh$, donde h es la profundidad del nivel de desprendimiento y D se llama **desplazamiento**. Observe que S tiene una relación lineal con h.

Usando imágenes sísmicas de las secciones transversales, los geólogos pueden aproximar el área de exceso (S) arriba del nivel de referencia en varios puntos del pliegue. Un método reciente, propuesto para estimar tanto la profundidad del desprendimiento como el desplazamiento, utiliza mínimos cuadrados. El proceso incluye la medición de las áreas de exceso (coordenadas y) y la medición de la profundidad de algún nivel de referencia fijo arbitrario (coordenadas x). La relación entre el área de exceso y la profundidad del nivel de referencia será lineal y, de hecho, será sólo una traslación de la recta que relaciona el área de exceso con la profundidad del desprendimiento. Así, la pendiente de la recta será aproximadamente D, el desplazamiento. La profundidad del desprendimiento corresponderá a la coordenada x del punto sobre la recta para el cual el área de exceso es 0 (cero) ya que no hay compresión justo abajo de este nivel y, por lo tanto, ninguna roca fue empujada hacia arriba.

a. Los siguiente datos se obtuvieron con las mediciones hechas en varios niveles de referencia y distintas localizaciones en el campo Tip Top, un campo petrolero en producción frente al cinturón central de Wyoming.

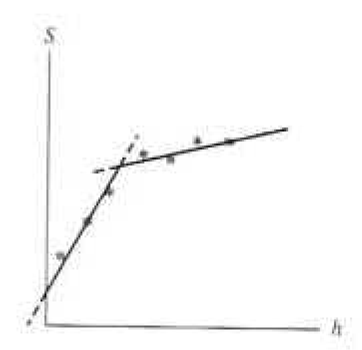
Distancia al nivel de referencia (km)	**Área de exceso (km^2)**
3.13	2.19
2.68	1.88
2.50	1.73
2.08	1.56
1.69	1.53
1.37	1.39
1.02	1.12
.76	.96
.53	.69

i. Encuentre la recta de ajuste de mínimos cuadrados y su gráfica. ¿Parece razonable la relación lineal; es decir, parece razonable que este pliegue pueda ser una deformación anticlinal ?

ii. Encuentre la aproximación al desplazamiento y a la profundidad del desprendimiento. Basado en este análisis, escriba un informe resumiendo el consejo que daría a la compañía petrolera.

b. Existen otros tipos de pliegues; uno muy común es el **pliegue de falla inclinada**. En este caso existen dos niveles de interés, los niveles de desprendimiento superior e inferior. Entre estos dos niveles, el exceso de rocas es empujado hacia arriba. Arriba del nivel superior, parte del exceso de rocas es empujado hacia arriba y parte horizontalmente (desplazado). Esta estructura diferente tiene otras implicaciones para el potencial de petróleo atrapado. Un examen cuidadoso de los datos y un proceso de mínimos cuadrados diferente pueden indicar la presencia de este tipo de pliegue.

Para este pliegue de falla inclinada, la relación entre la profundidad del desprendimiento y el área de exceso consiste en dos rectas, en donde la recta de arriba tiene una pendiente menor. Esto se reflejaría en los datos del área de exceso contra la pro-



fundidad del nivel de referencia si se observa que los puntos se pueden clasificar en dos subconjuntos naturales. Cada subconjunto tendría un ajuste de recta de mínimos cuadrados. Esto se llama **ajuste por partes**. Estas rectas serían traslaciones de la relación entre el área de exceso y la profundidad del desprendimiento.

El nivel de desprendimiento inferior sería el punto en el que la recta inferior intersecta al eje h. La coordenada h del punto de intersección de las dos rectas sería la elevación del nivel de desprendimiento superior por encima del nivel de referencia. La diferencia entre las pendientes de las dos rectas representa el desplazamiento horizontal de la roca a lo largo del nivel de desprendimiento superior.

Para los datos anteriores del campo Tip-Top, se quiere investigar si sería razonable interpretar el pliegue como un pliegue de falla inclinada.

i. Primero, encuentre la recta de mínimos cuadrados para todo el conjunto de datos y encuentre $|\mathbf{y} - A\mathbf{u}|^2$, donde A es la matriz usada en el ajuste de mínimos cuadrados y $\mathbf{u}$ es la solución de mínimos cuadrados. Recuerde que $|\mathbf{y} - A\mathbf{u}|^2$ mide la suma de los cuadrados de las distancias entre cada valor y de los datos y el valor y correspondiente a la recta de mínimos cuadrados.

ii. Después, grafique los datos y determine cuál podría ser el agrupamiento natural en dos segmentos de recta. Determine qué valores de los datos pertenecen a cada grupo. Ajuste una recta de mínimos cuadrados a cada grupo y determine $|\mathbf{y} - A\mathbf{u}|^2$ para cada uno. Sume estas longitudes para obtener el número que representa la suma de los cuadrados de las distancias de cada valor y de los datos al valor y del ajuste por partes. Compare esto con el número obtenido en el subinciso i). ¿Es mejor este ajuste por partes?

iii. Continúe el experimento con diferentes agrupaciones de datos. ¿Hay alguno para el que el ajuste por partes sea mejor?

iv. Para el mejor ajuste por partes, determine la información que se proporciona sobre los niveles de desprendimiento y el desplazamiento horizontal. [Vea el párrafo anterior en el subinciso i).]

c. Escriba un informe para la compañía petrolera resumiendo su conclusión y sus recomendaciones.

Nota. El método descrito viene de un artículo titulado "Excess Area and Depth to Detachment" de Jean-Luc Epard y Richard Groshong, Jr. publicado en el *American Association of Petroleum Geologists Bulletin*, agosto de 1993. (El artículo estudia también la manera en que un ajuste cuadrático, para los datos del área de exceso contra la profundidad del nivel de referencia, indicarían una compresión.

PROBLEMA PROYECTO M

12. MATLAB contiene un archivo de datos de un curso introductorio de astronomía que contiene tres calificaciones de exámenes parciales y la calificación del examen final. (Estos datos son reales.) El profesor quiere saber si poner un examen final sencillo afecta las calificaciones de los estudiantes del curso.

Si da el comando **astest**, se cargará una matriz de 110×4 llamada D. Las primeras tres columnas de D contienen las calificaciones del examen parcial y la última columna la calificación del examen final para los 110 estudiantes. Cada calificación parcial es sobre 30 puntos igual que la final.

a. Sea **x = (D(:,1) + D(:,2) + D(:,3))/3;**. Sea **y = D(:,4);**. Entonces tenemos que **x** contiene el promedio de los exámenes parciales y **y** la calificación final. Encuentre la recta de ajuste de mínimos cuadrados y grafíquela (utilice **s = [0:30]**. ¿Parece la recta un ajuste razonable para los datos?

b. El profesor quiere averiguar si usar el valor y de la recta de mínimos cuadrados para la calificación del examen final (en lugar de la calificación real) tendría un gran efecto sobre la calificación global del curso de cada estudiante.

i. Una medida de bondad de ajuste para la recta sería ver cuantos estudiantes recibirían la misma calificación para el examen final si se usara el valor y de la recta de mínimos cuadrados en lugar de la calificación real. Esto se puede explorar en forma gráfica. En la misma gráfica de los datos y de la recta de mínimos cuadrados grafique la recta dada por los puntos cuyas coordenadas x son los elementos del vector **s** y cuyas coordenadas y están 3 unidades arriba de la recta de mínimos cuadrados (use **fit + 3**) y la recta cuyas coordenas y están -3 unidades abajo de la recta de mínimos cuadrados (use **fit − 3**). (En este caso, **fit** es el vector de valores y encontrado al evaluar la recta de mínimos cuadrados para los valores en **s**.)

Explique por qué un estudiante representado por un dato dentro de estas rectas recibiría la misma calificación para el examen final si se usara el valor y de la recta de mínimos cuadrados. (Recuerde que la calificación final es sobre 30 puntos. suponga que la escala de letras asignadas para la calificación es: 100-90 es A, 89-80 es B y así sucesivamente.)

¿Cuántos estudiantes están fuera de estas rectas? ¿ Cuál es el porcentaje de estudiantes cuyas calificaciones en el examen final sería diferente si se usara el valor y de la recta de mínimos cuadrados?

ii. Quizá una mejor medida de la bondad de ajuste de la recta, para nuestros propósitos, sea comparar el promedio global, usando el valor y de la recta de mínimos cuadrados para la calificación final, con el promedio global usando la calificación real del examen final. Suponga que los exámenes parciales cuentan el 60% y el examen final el 40%. Calcule el vector **true**, con los promedios globales para cada estudiante usando la calificación real del examen final. Calcule el vector **approx** con los promedios globales de cada estudiante, usando el valor y de la recta de mínimos cuadrados como la calificación del examen final. (Primero calcule un vector que contenga los valores y de la recta de mínimos cuadrados para cada estudiante; es decir, para cada uno de los valores x en **x**.) Encuentre **true − approx** y determine cuántas de las componentes tienen un valor absoluto mayor o igual que 3. Éste será el número de estudiantes cuyos promedios globales difieran si se sustituye el valor y de la recta de mínimos cuadrados en lugar de la calificación del examen final. Encuentre el porcentaje de estudiantes cuyas calificaciones serían diferentes.

iii. Describa al profesor sus observaciones. Analice la preocupación del profesor sobre si el examen final afecta de manera significativa la calificación de los alumnos.

c. Experimente para ver si otros tipos de promedios con las calificaciones de exámenes parciales (por ejemplo, si el tercer examen parcial cuenta más que los dos primeros) pueden producir un mejor ajuste de mínimos cuadrados.

4.11 ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO Y PROYECCIONES

Esta sección utiliza los conocimientos sobre las propiedades elementales de los números complejos (resumidas en el apéndice 2) y requiere alguna familiaridad con el material del primer año de cálculo.

En la sección 1.6 se vio cómo se podían multiplicar dos vectores en $\mathbb{R}^n$ para obtener un escalar. Este producto escalar se llama también *producto interno*. Otros espacios vectoriales tienen productos internos definidos. Antes de dar una definición general, se observa que en $\mathbb{R}^n$ el producto interno de dos vectores es un escalar real. En otros espacios (vea el ejemplo 2 siguiente) el resultado del producto interno es un escalar complejo. Por lo tanto, para incluir todos los casos, en la siguiente definición se supone que el producto interno es un número complejo.

DEFINICIÓN 1 **Espacio con producto interno** Un espacio vectorial complejo V se llama **espacio con producto interno** si para cada par ordenado de vectores **u** y **v** en V, existe un número complejo único (**u**, **v**), llamado **producto interno de u y v**, tal que si **u**, **v** y **w** están en V y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces

i. $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$

ii. $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

iii. $(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w})$

iv. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$

v. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$

vi. $(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

vii. $(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}) = \overline{\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

La barra en las condiciones *v*) y *vii*) denota el conjugado complejo.

Nota. Si (**u**, **v**) es real, entonces $\overline{(\mathbf{u}, \mathbf{v})} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ y se puede eliminar la barra en *v*).

EJEMPLO 1 **Un producto interno en $\mathbb{R}^n$** $\mathbb{R}^n$ es un espacio con producto interno con $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Las condiciones *iii*)-*vii*) están contenidas en el teorema 1.6.1, página 63. Las condiciones *i*) y *ii*) están incluidas en el resultado (4.9.9), página 393. ◆

EJEMPLO 2 **Un producto interno en $\mathbb{C}^n$** Se definió un espacio vectorial en $\mathbb{C}^n$ en el ejemplo 4.2.13, página 296. Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{C}^n$. (Recuerde que esto significa que los elementos x_i y y_i son números complejos.) Entonces se define

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \cdots + x_n\overline{y}_n \quad (1)$$

Para demostrar que la ecuación (1) define un producto interno, se necesitan algunos hechos sobre los números complejos. Si el lector no está familiarizado, consulte el apéndice 2. Para *i*),

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2$$

Así, *i*) y *ii*) se satisfacen ya que $|x_i|$ es un número real. Las condiciones *iii*) y *iv*) se deducen del hecho de que $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ para cualesquiera números complejos z_1, z_2 y z_3. La condición *v*) se deduce del hecho de que $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ y $\bar{\bar{z}}_1 = z_1$ de manera que $\overline{x_1 \bar{y}_1} = \bar{x}_1 y_1$. La condición *vi*) es obvia. Para *vii*), $(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}) = \overline{(\alpha\mathbf{v}, \mathbf{u})} = (\overline{\alpha\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}}) = \bar{\alpha}\,(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}}) = \bar{\alpha}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Aquí se usaron *vi*) y *v*). ✦

EJEMPLO 3 **Producto interno de dos vectores en $\mathbb{C}^3$** En $\mathbb{C}^3$ sean $\mathbf{x} = (1 + i, -3, 4 - 3i)$ y $\mathbf{y} = (2 - i, -i, 2 + i)$. Entonces

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (1 + i)\overline{(2 - i)} + (-3)\overline{(-i)} + (4 - 3i)\overline{(2 + i)} \\ &= (1 + i)(2 + i) + (-3)(i) + (4 - 3i)(2 - i) \\ &= (1 + 3i) - 3i + (5 - 10i) = 6 - 10i\end{aligned}$$

✦

EJEMPLO 4 Cálculo

Un producto interno en $C[a, b]$ Suponga que $a < b$; sea $V = C[a, b]$ el espacio de las funciones de valores reales continuas en el intervalo $[a, b]$ y defina

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \qquad (2)$$

Se verá que esto también es un producto interno.†

i) $(f, f) = \int_a^b f^2(t)\, dt \geq 0$. Es un teorema básico del cálculo que si $f \in C[a, b]$, $f \geq 0$ sobre $[a, b]$ y $\int_a^b f(t)\, dt = 0$, entonces $f = 0$ sobre $[a, b]$. Esto prueba *i*) y *ii*). *iii*)-*vii*) se deducen de los hechos básicos sobre integrales definidas. ✦

Nota. En $C[a, b]$ se supone que los escalares son números reales y que las funciones son de valores reales, de manera que no nos preocupamos por los complejos conjugados, sin embargo, si las funciones son de valores complejos, entonces de todas maneras se puede definir un producto interno. Vea más detalles en el problema 27.

EJEMPLO 5 Cálculo

El producto interno de dos funciones en $C[0, 1]$ Sea $f(t) = t^2 \in C[0, 1]$ y $g(t) = (4 - t) \in C[0, 1]$. Entonces

$$(f, g) = \int_0^1 t^2(4 - t)\, dt = \int_0^1 (4t^2 - t^3)\, dt = \left(\frac{4t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{13}{12}$$

✦

† Ésta no es la ú e $C[a, b]$, pero es la más común.

DEFINICIÓN 2 Sea V un espacio con producto interno y suponga que **u** y **v** están en V. Entonces

i. **u** y **v** son **ortogonales** si $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

ii. La **norma** de **u**, denotada por $\|\mathbf{u}\|$, está dada por

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \qquad (3)$$

Nota 1. Aquí se usa la doble barra en lugar de una sola para evitar confusión con el valor absoluto. Por ejemplo, en el ejemplo 7 $\|\text{sen } t\|$ denota la norma de sen t como un "vector" en $C[0, 2\pi]$, mientras que $|\text{sen } t|$ denota el valor absoluto de la función sen t.

Nota 2. La ecuación (3) tiene sentido ya que $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$.

EJEMPLO 6 **Dos vectores ortogonales en $\mathbb{C}^2$** En $\mathbb{C}^2$ los vectores $(3, -i)$ y $(2, 6i)$ son ortogonales porque

$$((3, -i), (2, 6i)) = 3 \cdot \overline{2} + (-i)(\overline{6i}) = 6 + (-i)(-6i) = 6 - 6 = 0$$

además $\|(3, -i)\| = \sqrt{3 \cdot 3 + (-i)(\overline{i})} = \sqrt{10}$. ◆

EJEMPLO 7 **Dos funciones ortogonales en $C[0, 2\pi]$** En $C[0, 2\pi]$ las funciones sen t y cos t son ortogonales ya que

$$(\text{sen } t, \cos t) = \int_0^{2\pi} \text{sen } t \cos t \, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \text{sen } 2t \, dt = -\left.\frac{\cos 2t}{4}\right|_0^{2\pi} = 0$$

Además,

$$\begin{aligned}\|\text{sen } t\| &= (\text{sen } t, \text{sen } t)^{1/2} \\ &= \left[\int_0^{2\pi} \text{sen}^2 t \, dt\right]^{1/2} \\ &= \left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) \, dt\right]^{1/2} \\ &= \left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{\text{sen } 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right]^{1/2} \\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

◆

Si se observan las demostraciones de los teoremas 4.9.1 y 4.9.2, páginas 394 y 395, se ve que no se usó el hecho de que $V = \mathbb{R}^n$. Los mismos teoremas se cumplen en cualquier espacio con producto interno V. A continuación se enumeran, por conveniencia, después de dar una definición.

DEFINICIÓN 3 **Conjunto ortonormal** El conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un **conjunto ortonormal** en V si

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0 \quad \text{para } i \neq j \tag{4}$$

y

$$\|\mathbf{v}_i\| = \sqrt{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)} = 1 \tag{5}$$

Si sólo (4) se cumple, se dice que el conjunto es **ortogonal**.

TEOREMA 1 Cualquier conjunto finito de vectores ortogonales diferentes de cero en un espacio con producto interno es linealmente independiente. ◆

TEOREMA 2 Cualquier conjunto finito linealmente independiente en un espacio con producto interno se puede convertir en un conjunto ortonormal mediante el proceso de Gram-Schmidt. En particular, cualquier espacio con producto interno tiene una base ortonormal. ◆

EJEMPLO 8 **Una base ortonormal en $P_2[0, 1]$** Construya una base ortonormal para $P_2[0, 1]$.

Cálculo

Solución Se comienza con la base estándar $\{1, x, x^2\}$. Como $P_2[0, 1]$ es un subespacio de $C[0, 1]$, se puede usar el producto interno del ejemplo 4. Como $\int_0^1 1^2\,dx = 1$, se hace $\mathbf{u}_1 = 1$. Después $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1$. En este caso $(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1) = \int_0^1 (x \cdot 1)\,dx = \frac{1}{2}$. Así, $\mathbf{v}_2' = x - \frac{1}{2} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$. Luego se calcula

$$\|x - \tfrac{1}{2}\| = \left[\int_0^1 (x - \tfrac{1}{2})^2\,dx\right]^{1/2} = \left[\int_0^1 (x^2 - x + \tfrac{1}{4})\,dx\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Entonces $\mathbf{u}_2 = 2\sqrt{3}\,(x - \frac{1}{2}) = \sqrt{3}\,(2x - 1)$. Así,

$$\mathbf{v}_3' = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2$$

Se tiene $(\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ y

$$(\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2) = \sqrt{3}\int_0^1 x^2\,(2x - 1)\,dx = \sqrt{3}\int_0^1 (2x^3 - x^2)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Así,

$$\mathbf{v}_3' = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\sqrt{3}\,(2x - 1)\right] = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

y

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_3'\| &= \left[\int_0^1 (x^2 - x + \tfrac{1}{6})^2\, dx\right]^{1/2} \\ &= \left[\int_0^1 (x^4 - 2x^3 + \tfrac{4}{3}x^2 - \frac{x}{3} + \tfrac{1}{36})\, dx\right]^{1/2} \\ &= \left[\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{9} - \frac{x^2}{6} + \frac{x}{36}\right)\Big|_0^1\right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{180}} = \frac{1}{6\sqrt{5}}\end{aligned}$$

Entonces $\mathbf{u}_3 = 6\sqrt{5}(x^2 - x + \frac{1}{6}) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$. Por último, una base ortonormal es $\{1, \sqrt{3}(2x - 1), \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)\}$. ✦

EJEMPLO 9 Cálculo

Un conjunto ortonormal infinito en $C[0, 2\pi]$ En $C[0, 2\pi]$ el conjunto infinito

$$S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ldots\right\}$$

es un conjunto ortonormal. Esto es cierto ya que si $m \neq n$, entonces

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0$$

Para probar una de estas igualdades se observa que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\operatorname{sen} (m + n)x + \operatorname{sen}(m - n)x]\, dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos (m + n)x}{m + n} + \frac{\cos (m - n)x}{m - n}\right]\Bigg|_0^{2\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

ya que $\cos x$ es periódica con periodo 2π. Se vio que $\|\operatorname{sen} x\| = \sqrt{\pi}$. Así $\|(1/\sqrt{\pi}) \operatorname{sen} x\| = 1$. Las otras igualdades se deducen de manera similar. Este ejemplo proporciona una situación en la que tenemos un conjunto ortonormal *infinito*. De hecho, aunque esto está más allá del alcance de este libro elemental, es cierto que algunas funciones en $C[0, 2\pi]$ se pueden expresar como combinaciones lineales de las funciones en S, suponga que $f \in C[0, 2\pi]$. Después, si se escribe f como una combinación lineal infinita de los vectores en S, se obtiene lo que se llama la **representación por series de Fourier** de f. ✦

DEFINICIÓN 4 **Proyección ortogonal** Sea H un subespacio del espacio con producto interno V con una base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$. si $\mathbf{v} \in V$, entonces la **proyección ortogonal** de $\mathbf{v}$ sobre H denotada por $\text{proy}_H\, \mathbf{v}$, está dada por

$$\text{proy}_H\, \mathbf{v} = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}, \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k \quad (6)$$

Las demostraciones de los siguientes teoremas son idénticas a sus contrapartes en $\mathbb{R}^n$ demostrados en la sección 4.9.

TEOREMA 3 Sea H un subespacio de espacio de dimensión finita con producto interno V. Suponga que H tiene dos bases ortonormales $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ y $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$. Sea $\mathbf{v} \in V$. Entonces

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}, \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$$
$$= (\mathbf{v}, \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{v}, \mathbf{w}_k)\mathbf{w}_k$$ ◆

DEFINICIÓN 5 **Complemento ortogonal** Sea H un subespacio del espacio con producto interno V. Entonces el **complemento ortogonal** de H, denotado por $H^\perp$, está dado por

$$H^\perp = \{\mathbf{x} \in V: (\mathbf{x}, \mathbf{h}) = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{h} \in H\} \quad (7)$$

TEOREMA 4 Si H es un subespacio del espacio con producto interno V, entonces

i. $H^\perp$ es un subespacio de V.

ii. $H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

iii. $\dim H^\perp = n - \dim H$ si $\dim V = n < \infty$. ◆

TEOREMA 5 **Teorema de proyección** Sea H un subespacio de dimensión finita del espacio con producto interno V y suponga que $\mathbf{v} \in V$. Entonces existe un par único de vectores $\mathbf{h}$ y $\mathbf{p}$ tales que $\mathbf{h} \in H$, $\mathbf{p} \in H^\perp$, y

$$\mathbf{v} = \mathbf{h} + \mathbf{p} \quad (8)$$

donde $\mathbf{h} = \text{proy}_H\, \mathbf{v}$.

Si V tiene dimensión finita, entonces $\mathbf{p} = \text{proy}_{H^\perp}\, \mathbf{v}$. ◆

Observación. Si se estudia la prueba del teorema 4.9.7, se verá que (8) se cumple incluso si V tiene dimensión infinita. La única diferencia es que si la dimensión de V es infinita, entonces $H^{\perp}$ tiene dimensión infinita (porque H es de dimensión finita), entonces, $\text{proy}_{H^{\perp}}\,\mathbf{v}$ no está definida.

TEOREMA 6 **Teorema de aproximación de la norma** Sea H un subespacio de dimensión finita del espacio con producto interno V y sea $\mathbf{v}$ un vector en V. Entonces, en H, $\text{proy}_H\,\mathbf{v}$ es la mejor aproximación a $\mathbf{v}$ en el siguiente sentido: si $\mathbf{h}$ es cualquier vector en H, entonces

$$\|\mathbf{v} - \text{proy}_H\,\mathbf{v}\| < \|\mathbf{v} - \mathbf{h}\| \tag{9}$$

◆

EJEMPLO 10 Cálculo

Cálculo de una proyección sobre $P_2[0, 1]$ Como $P_2[0, 1]$ es un subespacio de dimensión finita de $C[0, 1]$, se puede hablar de $\text{proy}_{P_2[0,1]}f$ si $f \in C[0, 1]$. Si $f(x) = e^x$, por ejemplo, se calcula $\text{proy}_{P_2[0,1]}e^x$. Como $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \{1, \sqrt{3}(2x-1)$, entonces $\sqrt{5}(6x^2-6x+1)\}$ es una base ortonormal en $P_2[0, 1]$, por el ejemplo 8, y se tiene

$$\begin{aligned}\text{proy}_{P_2[0,1]}\,e^x &= (e^x, 1)1 + (e^x, \sqrt{3}(2x-1))\sqrt{3}(2x-1)\\ &\quad + (e^x, \sqrt{5}(6x^2-6x+1))\sqrt{5}(6x^2-6x+1)\end{aligned}$$

Pero pueden ahorrarse los cálculos. Usando el hecho de que $\int_0^1 e^x\,dx = e-1$, $\int_0^1 xe^x\,dx = 1$ y $\int_0^1 x^2e^x\,dx = e-2$, se obtiene $(e^x, 1) = e-1$, $(e^x, \sqrt{3}(2x-1)) = \sqrt{3}(3-e)$, y $(e^x, \sqrt{5}(6x^2-6x+1)) = \sqrt{5}(7e-19)$. Por último,

$$\begin{aligned}\text{proy}_{P_2[0,1]}\,e^x &= (e-1) + \sqrt{3}(3-e)\sqrt{3}\,(2x-1)\\ &\quad + \sqrt{5}(7e-19)(\sqrt{5})(6x^2-6x+1)\\ &= (e-1) + (9-3e)(2x-1)\\ &\quad + 5(7e-19)(6x^2-6x+1)\\ &\approx 1.01 + 0.85x + 0.84x^2\end{aligned}$$

◆

Se concluye esta sección con una aplicación del teorema de aproximación de la norma.

Aproximación por mínimos cuadrados a una función continua

Sea $f \in C[a, b]$. Se quiere aproximar f por un polinomio de grado n. ¿Cuál es el polinomio que hace esto con el menor error?

Con el fin de responder a esta pregunta, debe definirse el *error*. Existen muchas maneras diferentes de definir el error. A continuación se dan tres:

$$\textbf{Error máximo} = \text{máx}\,|f(x) - g(x)| \quad \text{para } x \in [a, b] \tag{10}$$

$$\textbf{Error de área} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \tag{11}$$

$$\textbf{Error cuadrático medio} = \int_a^b |f(x) - g(x)|^2\,dx \tag{12}$$

EJEMPLO 11 **Cálculo**

Cálculo de errores Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ sobre $[0, 1]$. En $[0, 1]$, $x^2 \geq x^3$, de manera que $|x^2 - x^3| = x^2 - x^3$. Entonces

i. Error máximo $= \text{máx}\,(x^2 - x^3)$. Para calcular esto, se calcula $d/dx(x^2 - x^3) = 2x - 3x^2 = x(2 - 3x) = 0$ cuando $x = 0$ y $x = 2/3$. El error máximo ocurre cuando $x = 2/3$ y está dado por $[(\frac{2}{3})^2 - (\frac{2}{3})^3] = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27} \approx 0.148$.

ii. Error de área $= \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = (x^3/3 - x^4/4)|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \approx 0.083$. La figura 4.12 ilustra esto.

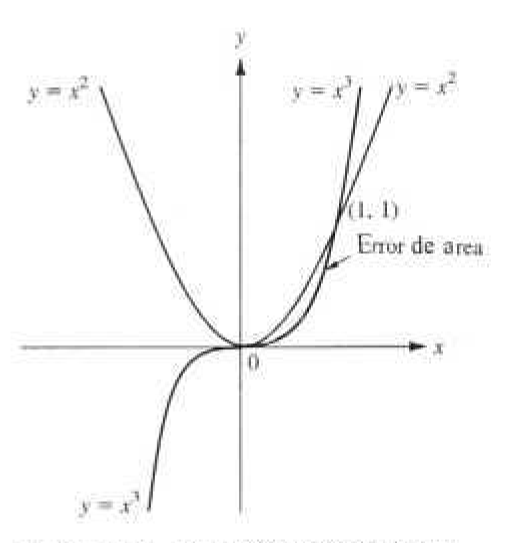


Figura 4.12 Ilustración del error de área

iii. Error cuadrático medio $= \int_0^1 (x^2 - x^3)^2\,dx = \int_0^1 (x^4 - 2x^5 + x^6)\,dx = (x^5/5 - x^6/3 + x^7/7)|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{1}{105} \approx 0.00952$ ◆

Las tres medidas de error son útiles. El error cuadrático medio se usa en estadística y otras aplicaciones. Se puede usar el teorema de aproximación de la norma para encontrar el polinomio único de grado n que se aproxima a una función continua dada con el error cuadrático medio más pequeño.

Del ejemplo 4, $C[a, b]$ es un espacio con producto interno con

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \tag{13}$$

Para todo entero positivo n, $P_n[a, b]$ —el espacio de polinomios de grado n definidos sobre $[a, b]$— es un subespacio de dimensión finita de $C[a, b]$. Se puede calcular, para $f \in C[a, b]$ y $p_n \in P_n$,

$$\|f-p_n\|^2=(f-p_n,f-p_n)=\int_a^b[(f(t)-p_n(t))(f(t)-p_n(t))]\,dt$$

$$=\int_a^b|f(t)-p_n(t)|^2\,dt=\text{error cuadrático medio}$$

Así, por el teorema 6

> El polinomio de grado n que se aproxima a una función continua con el error cuadrático medio más pequeño está dado por
>
> $$p_n=\text{proy}_{P_n}f$$ **(14)**

EJEMPLO 12 **La mejor aproximación cuadrática media a e^x** Del ejemplo 10, el polinomio de segundo grado que mejor se aproxima a e^x sobre [0, 1], en el sentido del error cuadrático medio está dado por

$$p_2(x)\approx 1.01+0.85x+0.84x^2$$ ✦

PROBLEMAS 4.11

Autoevaluación

I. En $C[0,1]$, $(x,x^3)=$ ____.

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{1}{4}$ **d.** $\frac{1}{5}$ **e.** $\frac{1}{6}$

II. En $C[0,1]$, $\|x^2\|^2=$ ____.

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{1}{4}$ **d.** $\frac{1}{5}$ **e.** $\frac{1}{6}$

III. En $\mathbb{C}^2$, $((1+i,2-3i),(2-i,-1+2i))=$ ____.

a. $-7+2i$ **b.** $7+8i$ **c.** $4-3i$ **d.** $4+3i$ **e.** $-2+5i$

IV. En $\mathbb{C}^2$, $\|(1+i,2-3i)\|=$ ____.

a. $-5-10i$ **b.** 15 **c.** $\sqrt{15}$ **d.** 7 **e.** $\sqrt{7}$

Falso-verdadero

V. Si H es un subespacio de dimensión finita del espacio con producto interno V y si $\mathbf{v}\in V$, entonces existen vectores $\mathbf{h}\in H$ y $\mathbf{p}\in H^\perp$ tales que $\mathbf{v}=\mathbf{h}+\mathbf{p}$.

VI. En el problema V, $\mathbf{h}=\text{proy}_H\,\mathbf{v}$ y $\mathbf{p}=\text{proy}_{H^\perp}\,\mathbf{v}$.

Respuestas a la autoevaluación

I. d **II.** d **III.** a **IV.** c **V.** V **VI.** F (verdadero sólo si dim V es finita)

1. Sea D_n el conjunto de las matrices diagonales de $n \times n$ con componentes reales bajo las operaciones usuales de matrices. Si A y B están en D_n, defina

$$(A, B) = a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{nn}b_{nn}$$

Pruebe que D_n es un espacio con producto interno.

2. Si $A \in D_n$, demuestre que $\|A\| = 1$ si y sólo si $a_{11}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{nn}^2 = 1$.

3. Encuentre una base ortonormal para D_n.

4. Encuentre una base ortonormal para D_2 comenzando con $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5. En $\mathbb{C}^2$ encuentre una base ortonormal comenzando con la base $(1, i)$, $(2 - i, 3 + 2i)$.

Cálculo 6. Encuentre una base ortonormal para $P_3[0, 1]$.

Cálculo 7. Encuentre una base ortonormal para $P_2[-1, 1]$. Los polinomios que se obtienen se llaman **polinomios normalizados de Legendre**.

* Cálculo 8. Encuentre una base ortonormal para $P_2[a, b]$, $a < b$.

9. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz real de $n \times n$, la **traza** de A, que se escribe tr A, es la suma de las componentes de la diagonal de A: tr $A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. En M_{nn} defina $(A, B) =$ tr (AB^t). Demuestre que con este producto interno, M_{nn} es un espacio con producto interno.

10. Si $A \in M_{nn}$, demuestre que $\|A\|^2 =$ tr (AA^t) es la suma de los cuadrados de los elementos de A. [*Nota:* aquí $\|A\| = (A, A)^{1/2}$; utilice la notación del problema 9.]

11. Encuentre una base ortonormal para M_{22}.

12. Se puede pensar en el plano complejo como en un espacio vectorial sobre los reales con vectores básicos $1, i$. Si $z = a + ib$ y $w = c + id$, defina $(z, w) = ac + bd$. Demuestre que este es un producto interno y que $\|z\|$ es la longitud usual de un número complejo.

13. Sean a, b y c tres números reales distintos. Sean p y q en P_2 y defina $(p, q) = p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)q(c)$.
 a. Demuestre que (p, q) es un producto interno en P_2.
 b. ¿Es $(p, q) = p(a)q(a) + p(b)q(b)$ un producto interno?

14. En $\mathbb{R}^2$, si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, sea $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_* = x_1y_1 + 3x_2y_2$. Demuestre que (x, y) es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

15. Con el producto interno del problema 14, calcule $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|_*$.

16. En $\mathbb{R}$ sea $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - x_2y_2$. ¿Es éste un producto interno? Si no lo es, ¿por qué?

*17. Sea V un espacio con producto interno. Demuestre que $|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$. Esto se llama **desigualdad de Cauchy-Schwarz**. [*Sugerencia:* vea el teorema 9 de la sección 4.9.]

*18. Usando el resultado del problema 17, demuestre que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. Ésta se llama **desigualdad del triángulo**.

Cálculo 19. En $P_3[0, 1]$ sea H el subespacio generado por $\{1, x^2\}$. Encuentre $H^\perp$.

* Cálculo 20. En $C[-1, 1]$ sea H el subespacio generado por las funciones pares. Demuestre que $H^\perp$ consiste en la funciones impares. [*Sugerencia:* f es impar si $f(-x) = -f(x)$ y es par si $f(-x) = f(x)$.]

* Cálculo 21. $H = P_2[0, 1]$ es un subespacio de $P_3[0, 1]$. Escriba el polinomio $1 + 2x + 3x^2 - x^3$ como $h(x) + p(x)$, donde $h(x) \in H$ y $p(x) \in H^\perp$.

*22. Encuentre un polinomio de segundo grado que mejor se aproxime a sen $\frac{\pi}{2}x$ en el intervalo $[0, 1]$ en el sentido del error cuadrático medio.

*23. Resuelva el problema 22 para la función cos $\frac{\pi}{2}x$.

24. Sea A una matriz de $m \times n$ con elementos complejos. Entonces la **transpuesta conjugada** de A, denotada por A^*, está definida por $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Calcule A^* si

$$A = \begin{pmatrix} 1-2i & 3+4i \\ 2i & -6 \end{pmatrix}$$

25. Sea A una matriz invertible de $n \times n$ con elementos complejos. A se llama **unitaria** si $A^{-1} = A^*$. Demuestre que la siguiente matriz es unitaria:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}+\frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}-\frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

*26. Demuestre que una matriz de $n \times n$ con elementos complejos es unitaria si y sólo si las columnas de A constituyen una base ortonormal para $\mathbb{C}^n$.

*Cálculo

27. Se dice que una función f es de **valores complejos** sobre el intervalo (real) $[a, b]$ si $f(x)$ se puede expresar como

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)i, \qquad x \in [a, b]$$

donde f_1 y f_2 son funciones de valores reales. La función de valores complejos f es **continua** si f_1 y f_2 son continuas. Sea $CV[a, b]$ el conjunto de funciones de valores complejos que son continuas en $[a, b]$. Para f y g en $CV[a, b]$, defina

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \tag{15}$$

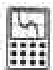
Demuestre que (15) define un producto interno en $CV[a, b]$.

Cálculo

28. Demuestre que $f(x) = \text{sen}\, x + i\cos x$ y $g(x) = \text{sen}\, x - i\cos x$ son **ortogonales** en $CV[0, \pi]$.

Cálculo

29. Calcule $\|\text{sen}\, x + i\cos x\|$ en $CV[0, \pi]$.



MANEJO DE CALCULADORA

Muchos de los cálculos de esta sección se pueden realizar en casi todas las calculadoras que grafican. En particular, esas calculadoras pueden realizar aritmética compleja y aproximar integrales definidas.

TI-85

Para calcular una integral definida, oprima [2nd] [CALC] para entrar al modo de cálculo.

Después [F5] (fnint)desplegará fnInt(. Para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$, dé $f(x), x, a, b)$ [ENTER] y

aparecerá el valor de la integral. Por ejemplo, fnInt (X^4 − 2X^5 + X^6, X, 0, 1) ENTER da como resultado .009523809524. Es decir, $\int_0^1 (x^4 - 2x^5 + x^6)\,dx \approx 0.009523809524$ (vea el ejemplo 11).

CASIO fx-7700 GB

Oprima SHIFT ∫ dx para desplegar ∫ (. Después calcule la integral anterior, dé X (la tecla X, θ, T) x^4 − 2Xx^5 + Xx^6, 0, 1, 8) para obtener 0.00952381. El 8 indica que el intervalo [0, 1] se divide en $2^8 = 256$ subintervalos. Se puede dar cualquier entero entre 1 y 9; mientras más grande sea, más exactitud se obtiene. Sin embargo, cuando $n = 8$ o 9, el cálculo puede llevar bastante tiempo.

MATLAB 4.11

En MATLAB, si la matriz A tiene elementos complejos, entonces **A'** produce la transpuesta conjugada compleja. Así, si **u** y **v** son vectores en $\mathbb{C}^n$, se pueden representar por matrices de $n \times 1$ con elementos complejos y (**u**, **v**) se calcula con **v'*u** y |**u**| se calcula con **norm(u)** o **sqrt(u'*u)**.

En MATLAB se construye la variable **i** para representar el número imaginario $\sqrt{-1}$. MATLAB reconoce **i** como tal siempre que no se haya usado para otro propósito.

Para n dada, si se quiere generar un vector aleatorio en $\mathbb{C}^n$, dé

v = 2*rand(n,1)−1 + i*(2*rand(n,1)−1)

1. Genere cuatro vectores aleatorios en $\mathbb{C}^4$. Encuentre la base ortonormal para el espacio generado por estos vectores usando el proceso de Gram-Schmidt. Verifique que el conjunto de vectores ortonormales obtenido con este proceso es ortonormal y que cada vector en el conjunto original es una combinación lineal del conjunto de vectores obtenido.

2. a. Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ el conjunto de vectores obtenido en el problema 1 anterior. Sea A la matriz $[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3\ \mathbf{u}_4]$. Sea **w** un vector aleatorio en $\mathbb{C}^4$. Verifique que

$$\mathbf{w} = (\mathbf{w}, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{w}, \mathbf{u}_4)\mathbf{u}_4$$

Repita para otro vector **w**.

b. (*Lápiz y papel*) ¿Qué propiedad de una base ortonormal para $\mathbb{C}^n$ es expresada en el inciso a)? Describa cómo encontrar las coordenadas de un vector en $\mathbb{C}^n$ respecto a una base ortonormal.

3. Genere cuatro vectores aleatorios en $\mathbb{C}^6$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$. Sea $H = \text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. Sea $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4]$ y **B = orth(A)**. Sea $\mathbf{u}_i$ la i-ésima columna de B.

a. Sea **w** un vector aleatorio en $\mathbb{C}^6$. Encuentre la proyección de **w** sobre H, $\mathbf{p} = \text{proy}_H\,\mathbf{w}$.

Calcule $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} (\mathbf{w}, \mathbf{u}_1) \\ (\mathbf{w}, \mathbf{u}_2) \\ (\mathbf{w}, \mathbf{u}_3) \\ (\mathbf{w}, \mathbf{u}_4) \end{pmatrix}$. Verifique que **z = B'*w** y **p = B*B'*w**. Repita para otro vector **w**.

b. Sea **x** un vector aleatorio en $\mathbb{C}^4$ y forme $\mathbf{h} = A\mathbf{x}$. Entonces **h** está en H. Compare $|\mathbf{w} - \mathbf{p}|$ y $|\mathbf{w} - \mathbf{h}|$. Repita para otros tres vectores **x**. Escriba una interpretación de sus observaciones.

c. Sea $\mathbf{z} = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$. Entonces $H = \text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{z}\}$. (Aquí H es el subespacio descrito en los incisos anteriores de este problema.) ¿Por qué? Sea $C = [\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \ \mathbf{v}_3\ \ \mathbf{z}]$ y **D = orth(C)**. Entonces las columnas de D serán otra base ortonormal para H.

Sea **w** un vector aleatorio en $\mathbb{C}^6$. Calcule la proyección de **w** sobre H usando B y la proyección de **w** sobre H usando D. Compare los resultados. Repita para otros dos vectores **w**. Escriba una interpretación de sus observaciones.

4. a. (*Lápiz y papel*) Explique por qué el espacio nulo de **A'** es ortogonal a la imagen de A; es decir, si H = imagen A, entonces el espacio nulo de $\mathbf{A}' = H^\perp$.

b. Sea A una matriz aleatoria con elementos complejos de 7×4. (Sea **A = 2*rand (7,4) –1 + i*(2*rand(7,4)–1)**.) Sea **B = orth(A)** y sea **C = null(A')**. (Entonces las columnas de B forman una base ortonormal para H = imagen A y las columnas de C forman una base ortonormal para $H^\perp$.) Verifique que las columnas de C son ortonormales.

c. Sea **w** un vector aleatorio en $\mathbb{C}^7$. Encuentre **h**, la proyección de **w** sobre H, y **p**, la proyección de **w** sobre $H^\perp$. Verifique que **w = p + h**. Repita para otros tres vectores **w**.

5. Si Q es una matriz de $n \times n$ con elementos complejos, entonces Q es una matriz **unitaria** si **Q'*Q = eye(n)**. Se puede generar una matriz unitaria aleatoria Q generando una matriz aleatoria compleja A y después haciendo **Q = orth(A)**.

a. Genere dos matrices aleatorias unitarias de 4×4 como se acaba de describir. Verifique que satisfacen la propiedad de ser unitarias y que las columnas forman una base ortonormal para $\mathbb{C}^4$.

b. Verifique que la inversa de cada matriz es unitaria.

c. Verifique que el producto de las matrices es unitario.

d. Genere un vector aleatorio **v** en $\mathbb{C}^4$. Verifique que cada matriz unitaria conserva la longitud, es decir, $|Q\mathbf{v}| = |\mathbf{v}|$.

e. Repita los incisos a) a d) para dos matrices aleatorias unitarias de 6×6.

4.12 FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE ESPACIOS VECTORIALES: EXISTENCIA DE UNA BASE (Opcional)

En esta sección se demuestra uno de los resultados más importantes del álgebra lineal: **todo espacio vectorial tiene una base**. La demostración es más difícil que cualquier otra demostración en este libro; incluye conceptos que son parte de los fundamentos de las matemáticas. Habrá que esforzarse para entender los detalles. Sin embargo, después de hacerlo se tendrá una apreciación más profunda de una idea matemática esencial.

Se comienza por dar algunas definiciones.

DEFINICIÓN 1 **Orden parcial** Sea S un conjunto. Un **orden parcial** de S es una relación, denotada por $\leq$, que está definida para algunos pares ordenados de elementos de S y satisface tres condiciones:

i. $x \leq x$ para todo $x \in S$ **ley reflexiva**

ii. Si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$ **ley antisimétrica**

iii. Si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$ **ley transitiva**

Puede ocurrir que existan elementos x y y en S tales que no se cumplan $x \leq y$ ni $y \leq x$. Sin embargo, si para cada $x, y \in S$, $x \leq y$ o $y \leq x$, entonces se dice que el orden es un **orden total.** Si $x \leq y$ o $y \leq x$, entonces se dice que x y y son **comparables**.

Notación. $x < y$ significa que $x \leq y$ y $x \neq y$.

EJEMPLO 1 **Un orden parcial en $\mathbb{R}$** Los números reales están parcialmente ordenados por $\leq$, donde $\leq$ quiere decir "menor o igual que". El orden en este caso es un orden total. ✦

EJEMPLO 2 **Un orden parcial en un conjunto de subconjuntos** Sea S un conjunto y suponga que $P(S)$, llamado el **conjunto potencia** de S, denota el conjunto de todos los subconjuntos de S.

Se dice que $A \leq B$ si $A \subseteq B$. La relación de inclusión es un orden parcial sobre $P(S)$. Es sencillo probar esto. Se tiene

i. $A \subseteq A$ para todo conjunto A.

ii. $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ si y sólo si $A = B$.

iii. Suponga que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Si $x \in A$, entonces $x \in B$, de manera que $x \in C$. Esto significa que $A \subseteq C$.

Excepto en circunstancias especiales (por ejemplo, si S contiene sólo un elemento), el orden no será un orden total. Esto se ilustra en la figura 4.13.

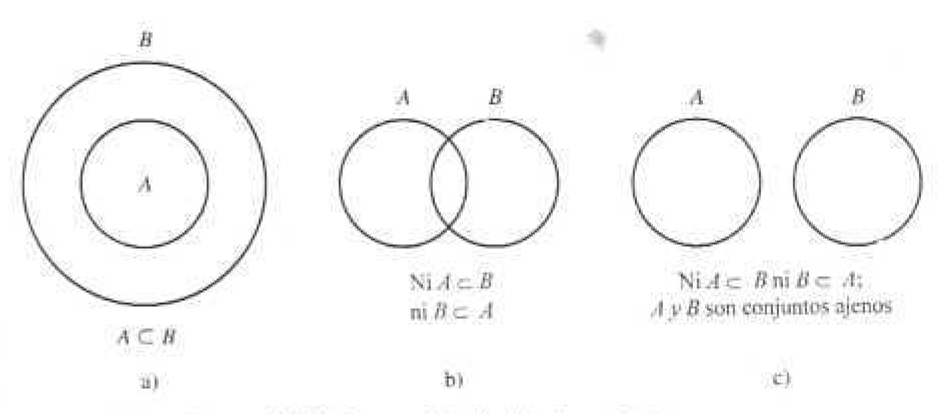


Figura 4.13 Tres posibilidades para la inclusión de conjuntos

DEFINICIÓN 2 **Cadena, cota superior y elemento maximal** Sea S un conjunto parcialmente ordenado por $\leq$.

i. Un subconjunto T de S se llama **cadena** si es totalmente ordenado; es decir, si x y y son elementos distintos de T, entonces $x \leq y$ o $y \leq x$.

ii. Sea C un subconjunto de S. Un elemento $u \in S$ es una **cota superior** para C si $c \leq u$ para todo elemento $c \in C$.

iii. El elemento $m \in S$ es un **elemento maximal** para S si no existe una $s \in S$ con $m < s$.

Observación 1. En *ii*) la cota superior para C debe ser comparable con todo elemento en C pero no es necesario que esté en C (aunque debe estar en S). Por ejemplo, el número 1 es una cota superior para el conjunto (0, 1) pero no está en (0, 1). Cualquier número mayor que 1 es una cota superior. Sin embargo, no existe un número en (0, 1) que sea una cota superior para (0, 1).

Observación 2. Si m es elemento maximal para S, no necesariamente ocurre que $s \leq m$ para toda $s \in S$. De hecho, m puede ser comparable con muy pocos elementos de S. La única condición para la maximalidad es que no exista un elemento de S "mayor que" m.

EJEMPLO 3 **Una cadena de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$** Sea $S = \mathbb{R}^2$. Entonces $P(S)$ consiste en subconjuntos del plano xy. Sea $D_r = \{(x, y): x^2 + y^2 < r^2\}$; es decir, D_r es un disco abierto de radio r —el interior del círculo de radio r centrado en el origen. Sea

$$T = \{D_r: r > 0\}$$

Claramente, T es una cadena, ya que si D_{r_1} y D_{r_2} están en T, entonces

$$D_{r_1} \subseteq D_{r_2} \text{ si } r_1 \leq r_2 \quad \text{y} \quad D_{r_2} \subseteq D_{r_1} \text{ si } r_2 \leq r_1$$ ◆

Antes de seguir, es necesario una notación nueva. Sea V un espacio vectorial. Se ha visto que una combinación lineal de vectores en V es una suma finita $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n$. Si se han estudiado series de potencia, se habrán visto sumas infinitas de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Por ejemplo,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Aquí se necesita un tipo diferente de suma. Sea C un conjunto de vectores en V.† Para cada $\mathbf{v} \in C$, si $\alpha_{\mathbf{v}}$ denota un escalar (el conjunto de escalares está dado en la

† C no es necesariamente un subespacio de V.

definición de V). Entonces cuando escribimos

$$\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{v} \in C} \alpha_{\mathbf{v}} \mathbf{v} \tag{1}$$

se entenderá que sólo un número finito de escalares $\alpha_{\mathbf{v}}$ son diferentes de cero y que todos los términos con $\alpha_{\mathbf{v}} = 0$ se dejan fuera de la sumatoria. La suma (1) se puede describir como sigue:

> Para cada $\mathbf{v} \in C$, se asigna un escalar $\alpha_{\mathbf{v}}$ y se forma el producto $\alpha_{\mathbf{v}}$ $\mathbf{v}$. Entonces $\mathbf{x}$ es la suma del subconjunto finito de los vectores $\alpha_{\mathbf{v}}\mathbf{v}$ para el que $\alpha_{\mathbf{v}} \neq 0$.

DEFINICIÓN 3 **Combinación lineal, conjunto generador, independencia lineal y base**

i. Sea C un subconjunto de un espacio vectorial V. Entonces cualquier vector que se puede expresar en la forma (1) se llama **combinación lineal** de vectores en C. El conjunto de combinaciones lineales de vectores en C se denota por $L(C)$.

ii. Se dice que el conjunto C **genera** el espacio vectorial V si $V \subseteq L(C)$.

iii. Se dice que un subconjunto C de un espacio vectorial V es **linealmente independiente** si

$$\sum_{\mathbf{v} \in C} \alpha_{\mathbf{v}} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

se cumple sólo cuando $\alpha_{\mathbf{v}} = 0$ para todo $\mathbf{v} \in C$.

iv. El subconjunto B de un espacio vectorial V es una **base** para V si genera a V y es linealmente independiente.

Observación. Si C contiene sólo un número finito de vectores, entonces estas definiciones son precisamente las que se vieron antes en este capítulo.

TEOREMA 1 Sea B un subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial V. Entonces B es una base si y sólo si es maximal; es decir, si $B \subsetneq D$, entonces D es linealmente dependiente.

Demostración Suponga que B es una base y que $B \subsetneq D$. Seleccione $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x} \in D$ pero $\mathbf{x} \notin B$. Como B es una base, $\mathbf{x}$ puede escribirse como una combinación lineal de vectores en B:

$$\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{v} \in B} \alpha_{\mathbf{v}} \mathbf{v}$$

Si $\alpha_{\mathbf{v}} = 0$ para toda $\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y D es dependiente. De otra manera $\alpha_{\mathbf{v}} \neq 0$ para alguna $\mathbf{v}$, y así la suma

$$\mathbf{x} - \sum_{\mathbf{v} \in B} \alpha_{\mathbf{v}} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

demuestra que D es dependiente; por lo tanto B es maximal.

Inversamente, suponga que B es maximal. Sea $\mathbf{x}$ un vector en V que no está en B. Sea $D = B \cup \{\mathbf{x}\}$. Entonces D es dependiente (ya que B es maximal) y existe una ecuación

$$\sum_{\mathbf{v} \in B} \alpha_{\mathbf{v}} \mathbf{v} + \beta \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

en la que no todos los coeficientes son cero. Pero $\beta \neq 0$ porque de otra manera se obtendría una contradicción de la independencia lineal de B. Así, se puede escribir

$$\mathbf{x} = -\beta^{-1} \sum_{\mathbf{v} \in B} \alpha_{\mathbf{v}} \mathbf{v}\dagger$$

Entonces, B es un conjunto generador y, por lo tanto, es una base para V. ◆

¿Hacia dónde lleva todo esto? Quizá pueda verse la dirección general. Se ha definido el orden en los conjuntos y los elementos maximales. Se ha demostrado que un conjunto linealmente independiente es una base si es maximal. Falta sólo un resultado que puede ayudar a probar la existencia de un elemento maximal. Ese resultado es una de las suposiciones básicas de las matemáticas.

Muchos de los lectores estudiaron la geometría euclidiana en la secundaria. Tal vez ahí tuvieron su primer contacto con una demostración matemática. Para probar cosas, Euclides hizo ciertas suposiciones a las que llamó *axiomas*. Por ejemplo, supuso que la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta. Comenzando con estos axiomas, él y sus alumnos de geometría pudieron demostrar muchos teoremas.

En todas las ramas de las matemáticas es necesario tener axiomas. Si no se hace una suposición, no es posible probar nada. Para completar nuestra demostración se necesita el siguiente axioma:

AXIOMA **Lema de Zorn ‡** Si S es un conjunto parcialmente ordenado, no vacío, tal que toda cadena no vacía tiene una cota superior, entonces S tiene un elemento maximal. ◆

† Si los escalares son números reales o complejos, entonces $\beta^{-1} = 1/\beta$.

‡ Max A. Zorn (1906-1993) pasó varios años en la University of Indiana donde fue Profesor Emérito hasta su muerte el 9 de marzo de 1993. Publicó su famoso resultado en 1935 ["A Remark on Method in Transfinite Algebra", *Bulletin of the American Mathematical Society* 41 (1935):667-670].

Observación. El **axioma de elección** dice, a grandes rasgos, que dado un número (finito o infinito) de conjuntos no vacíos, existe una función que elige un elemento de cada conjunto. Este axioma es equivalente al lema de Zorn; es decir, si se supone el axioma de elección, se puede probar el lema de Zorn y viceversa. Una demostración de esta equivalencia y otros interesantes resultados se puede encontrar en el excelente libro *Naive Set Theory* de Paul R. Halmos (Nueva York: Van Nostrand, 1960), en especial en la página 63.

Finalmente se puede establecer y probar el resultado central.

TEOREMA 2 Todo espacio vectorial V tiene una base

Demostración Se quiere demostrar que V tiene un subconjunto linealmente independiente maximal. Esto se hace en varios pasos.

i. Sea S una colección de subconjuntos, todos linealmente independientes, parcialmente ordenados por inclusión.

ii. Una cadena en S es un subconjunto T de S tal que si A y B están en T, $A \subseteq B$ o bien $B \subseteq A$.

iii. Sea T una cadena. Se define

$$M(T) = \bigcup_{A \in T} A$$

Es evidente que $M(T)$ es un subconjunto de V y $A \subseteq M(T)$ para todo $A \in T$. Se quiere demostrar que $M(T)$ es una cota superior para T. Como $A \subseteq M(T)$ para todo $A \in T$, sólo es necesario demostrar que $M(T) \in S$; es decir, debe demostrarse que $M(T)$ es linealmente independiente.

iv. Suponga que $\sum_{\mathbf{v} \in M(T)} \alpha_{\mathbf{v}} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, donde sólo un número finito de las $\alpha_{\mathbf{v}}$ son diferentes de cero. Se denotan estos escalares por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ y a los vectores correspondientes por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Para cada i, $i = 1, 2, \ldots, n$ existe un conjunto $A_i \in T$ tal que $\mathbf{v}_i \in A_i$ (porque cada $\mathbf{v}_i$ está en $M(T)$ y $M(T)$ es la unión de los conjuntos en T). Pero T es totalmente ordenado, de manera que uno de los conjuntos A_i contiene a todos los demás (vea el problema 3); llamemos A_k a este conjunto. (Se puede llegar a esta conclusión sólo porque $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es finito.) Así, $A_i \subseteq A_k$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in A_k$. Como A_k es linealmente independiente y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, se deduce que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Entonces $M(T)$ es linealmente independiente.

v. S es no vacío por que $\varnothing \in S$ ($\varnothing$ denota el conjunto vacío). Se ha demostrado que toda cadena T en S tiene una cota superior, $M(T)$, que está en S. Por el lema de Zorn, S tiene un elemento maximal. Pero S consiste en todos los subconjuntos linealmente independientes de V. El elemento maximal $B \in S$ es, por lo tanto, un subconjunto linealmente independiente maximal de V. Entonces, por el teorema 1, B es una base para V. ◆

PROBLEMAS 4.12

1. Demuestre que todo conjunto linealmente independiente en un espacio vectorial V se puede expandir a una base.
2. Demuestre que todo conjunto generador en un espacio vectorial V tiene un subconjunto que es una base.
3. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n conjuntos en una cadena T. Demuestre que uno de los conjuntos contiene a todos los demás. [*Sugerencia:* como T es una cadena, $A_1 \subseteq A_2$ o bien $A_2 \subseteq A_1$. Entonces el resultado es cierto si $n = 2$. Complete la prueba por inducción matemática.]

RESUMEN

- Un **espacio vectorial real** V es un conjunto de objetos, llamados **vectores**, junto con dos operaciones llamadas **suma** (denotada por $\mathbf{x}+\mathbf{y}$) y **multiplicación por un escalar** (denotada por $\alpha\mathbf{x}$) que satisfacen los siguientes axiomas: (p. 292)
  - **i.** Si $\mathbf{x} \in V$ y $\mathbf{y} \in V$, entonces $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in V$ (cerradura bajo la suma).
  - **ii.** Para toda $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ en V, $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ (ley asociativa de la suma de vectores).
  - **iii.** Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que para toda $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{x} = \mathbf{x}$ ($\mathbf{0}$ es el idéntico aditivo).
  - **iv.** Si $\mathbf{x} \in V$, existe un vector $-\mathbf{x}$ en V tal que $\mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ($-\mathbf{x}$ se llama el inverso aditivo de $\mathbf{x}$).
  - **v.** Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V, entonces $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$ (ley conmutativa de la suma de vectores).
  - **vi.** Si $\mathbf{x} \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha\mathbf{x} \in V$ (cerradura bajo la multiplicación por un escalar).
  - **vii.** Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$ (primera ley distributiva).
  - **viii.** Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha+\beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$ (segunda ley distributiva).
  - **ix.** Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta\mathbf{x}) = \alpha\beta\mathbf{x}$ (ley asociativa de la multiplicación por un escalar).
  - **x.** Para todo vector $\mathbf{x} \in V$, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (el escalar 1 se llama idéntico multiplicativo).
- El **espacio** $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \ldots, n\}$. (p. 293)
- El **espacio** P_n = {polinomios de grado menor que o igual a n}. (p. 295)
- El **espacio** $C[a, b]$ = {funciones reales continuas en el intervalo $[a, b]$}.
- El **espacio** M_{mn} = {martices de $m \times n$ con coeficientes reales}. (p. 295)
- El **espacio** $\mathbb{C}^n = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n): c_i \in \mathbb{C}$ para $i = 1, 2, \ldots, n\}$. $\mathbb{C}$ denota el conjunto de números complejos. (p. 296)
- Un **subespacio** H de un espacio vectorial V es un subconjunto de V que es en sí un espacio vectorial. (p. 299)
- Un subespacio no vacío H de un espacio vectorial V es un subespacio de V si las dos siguientes reglas se cumplen: (p. 300)
  - **i.** Si $\mathbf{x} \in H$ y $\mathbf{y} \in H$, entonces $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in H$.
  - **ii.** Si $\mathbf{x} \in H$, entonces $\alpha\mathbf{x} \in H$ para cada escalar α.
- Un **subespacio propio** de un espacio vectorial V es un subespacio de V diferente de $\{\mathbf{0}\}$ y de V. (p. 301)
- Una **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en un espacio vectorial V es una suma de la forma (p. 306)

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son escalares.

- Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en un espacio vectorial V **generan** a V si todo vector en V se puede expresar como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. (p. 306)
- El **conjunto generado por un conjunto de vectores** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ en un espacio vectorial V es el conjunto de combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. (p. 307)
- gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un subespacio de V. (p. 307)

- ***Dependencia e independencia lineal***

Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en un espacio vectorial V son **linealmente dependientes** si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos cero tales que (p. 318)

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = 0$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son **linealmente independientes**.

- Dos vectores en un espacio vectorial V son linealmente dependientes si y sólo si uno es un múltiplo escalar del otro. (p. 319)
- Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$ (p. 325)
- Un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^m$ es linealmente dependiente si $n > m$. (p. 322)

- ***Base***

Un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ es una **base** para un espacio vectorial V si (p. 337)

i. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente
ii. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V

- Todo conjunto de n vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ es una base en $\mathbb{R}^n$ (p. 337)
- La **base canónica** en $\mathbb{R}^n$ consiste en n vectores (p. 337)

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots,\ \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

- ***Dimensión***

Si el espacio vectorial V tiene una base finita, entonces la **dimensión** de V es el número de vectores en cada base y V se llama un **espacio vectorial de dimensión finita**. De otra manera V se llama **espacio vectorial de dimensión infinita**. Si $V = \{\mathbf{0}\}$, entonces se dice que V tiene **dimensión cero**. (p. 340)

La dimensión de V se denota por dim V.

- Si H es un subespacio del espacio de dimensión finita V, entonces dim $H \leq$ dim V. (p. 341)
- Los únicos subespacios propios de $\mathbb{R}^3$ son los conjuntos de vectores que están en una recta o en un plano que pasa por el origen. (p. 342)
- El **espacio nulo** de una matriz A de $n \times n$ es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ dado por (p. 348)

$$N_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

- La nulidad de una matriz A de $n \times n$ es la dimensión de N_A y se denota por $\nu(A)$. (p. 348)
- Sea A una matriz de $m \times n$. La **imagen de** A, denotado por imagen A, es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ dado por (p. 349)

$$\text{Imagen } A = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m: A\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ para alguna } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

- El **rango de** A, denotado por $\rho(A)$, es la dimensión de la imagen de A. (p. 350)

- El **espacio de los renglones de A**, denotado por R_A, es el espacio generado por los renglones de A y es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. (p. 350)
- El **espacio de las columnas de A**, denotado por C_A, es el espacio generado por las columnas de A y es un subespacio de $\mathbb{R}^m$. (p. 350)
- Si A es una matriz de $m \times n$, entonces

$$C_A = \text{imagen } A \quad \text{y} \quad \dim R_A = \dim C_A = \dim \text{imagen } A = \rho(A)$$ (pp. 350, 351)

Más aún,

$$\rho(A) + \nu(A) = n$$ (p. 356)

- El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución si y sólo si $\rho(A) = \rho(A, \mathbf{b})$, donde $(A, \mathbf{b})$ es la matriz aumentada que se obtiene al agregar la columna del vector $\mathbf{b}$ a A. (p. 358)

- ***Teorema de resumen***

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes: (p. 360)

i. A es invertible.
ii. La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).
iii. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para todo n-vector $\mathbf{b}$.
iv. A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.
v. A se puede expresar como el producto de matrices elementales.
vi. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.
vii. Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.
viii. $\det A \neq 0$.
ix. $\nu(A) = 0$.
x. $\rho(A) = n$.

- Sea $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ dos bases para el espacio vectorial V. Si $\mathbf{x} \in V$ y (pp. 372-373)

$$\mathbf{x} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \cdots + b_n\mathbf{u}_n = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

entonces se escribe $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ y $(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Suponga que $(\mathbf{u}_j)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$. Entonces la **matriz de transición** de B_1 a B_2 es la matriz de $n \times n$ (pp. 375, 376)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Más aún, $(\mathbf{x})_{B_2} = A(\mathbf{x})_{B_1}$.

- Si A es la matriz de transición de B_1 a B_2, entonces A^{-1} es la matriz de transición de B_2 a B_1. (p. 377)
- Si $(\mathbf{x}_j)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, entonces $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes si y sólo si det $A \neq 0$, donde (p. 381)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ en $\mathbb{R}^n$ forman un **conjunto ortogonal** si $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ para $i \neq j$. Si además, $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, se dice que el conjunto es **ortonormal**. (p. 393)
- $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}|^{1/2}$ se llama **longitud** o **norma** de $\mathbf{v}$. (p. 393)
- Todo subespacio de $\mathbb{R}^n$ tiene una base ortonormal. El **proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt** se puede usar para construir tal base. (p. 395)
- Una **matriz ortogonal** es una matriz Q invertible de $n \times n$ tal que $Q^{-1} = Q^t$. (p. 399)
- Una matriz de $n \times n$ es ortogonal si y sólo si sus columnas forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$. (p. 399)
- Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con una base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$. Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces la **proyección ortogonal** de $\mathbf{v}$ sobre H, denotada por proy$_H$ $\mathbf{v}$, está dada por (p. 400)

$$\text{proy}_H \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$$

- Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Entonces el **complemento ortogonal** de H, denotado por $H^\perp$, está dado por (p. 402)

$$H^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \mathbf{x} \cdot \mathbf{h} = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{h} \in H\}$$

- ***Teorema de proyección***

  Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Entonces existe un par único de vectores $\mathbf{h}$ y $\mathbf{p}$ tales que $\mathbf{h} \in H$, $\mathbf{p} \in H^\perp$, y (p. 403)

$$\mathbf{v} = \mathbf{h} + \mathbf{p} = \text{proy}_H \mathbf{v} + \text{proy}_{H^\perp} \mathbf{v}$$

- ***Teorema de aproximación de la norma***

  Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Entonces, en H, proy$_H$ $\mathbf{v}$ es la mejor aproximación a $\mathbf{v}$ en el siguiente sentido: si $\mathbf{h}$ es cualquier otro vector en H, entonces (p. 405)

$$|\mathbf{v} - \text{proy}_H \mathbf{v}| < |\mathbf{v} - \mathbf{h}|$$

- Sea $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ un conjunto de datos. Si se quiere representar estos datos por la recta $y = mx + b$, entonces el **problema de mínimos cuadrados** es encontrar los valores de m y b que minimizan la suma de los cuadrados (p. 419)

$$[y_1 - (b + mx_1)]^2 + [y_2 - (b + mx_2)]^2 + \cdots + [y_n - (b + mx_n)]^2$$

  La solución a este problema es establecer (p. 421)

$$\begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = \mathbf{u} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{y}$$

donde

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

Resultados similares se aplican cuando se quiere representar los datos usando un polinomio de grado > 1.

- ***Espacio con producto interno***

El espacio vectorial complejo V se llama un **espacio con producto interno** si para cada par de vectores **u** y **v** en V existe un número complejo único $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, llamado el **producto interno** de **u** y **v**, tal que si **u**, **v** y **w** están en V y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces (p. 439)

i. $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$
ii. $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
iii. $(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w})$
iv. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$
v. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$
vi. $(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
vii. $(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}) = \overline{\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

- ***Producto interno en*** $\mathbb{C}^n$ (p. 439)

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \cdots + x_n\overline{y}_n$$

- Sea V un espacio con producto interno y suponga que **u** y **v** están en V. Entonces (p. 441)

u y **v** son **ortogonales** si $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$

- La **norma** de **u**, denotada por $\|\mathbf{u}\|$, está dada por

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$$

- ***Conjunto ortonormal***

El conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un **conjunto ortonormal** en V si (p. 442)

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0 \qquad \text{para } i \neq j$$

y

$$\|\mathbf{v}_i\| = \sqrt{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)} = 1$$

Si sólo se cumple la primera condición, entonces se dice que el conjunto es **ortogonal**.

- ***Proyección ortogonal***

Sea H un subespacio de un espacio vectorial con producto interno V con una base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$. Si $\mathbf{v} \in V$, entonces la **proyección ortogonal** de **v** sobre H, denotada por $\text{proy}_H\, \mathbf{v}$, está dada por (p. 444)

$$\text{proy}_H\, \mathbf{v} = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}, \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$$

36. En M_{22}: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 37 al 40 encuentre una base ortonormal para el espacio vectorial dado.

37. $\mathbb{R}^2$ comenzando con la base $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

38. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$

39. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$

40. $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = z \text{ y } y = w\}$

En los ejercicios 41 al 43: **a)** calcule $\text{proy}_H\, \mathbf{v}$; **b)** encuentre una base ortonormal para $H^\perp$; **c)** exprese $\mathbf{v}$ como $\mathbf{h} + \mathbf{p}$, donde $\mathbf{h} \in H$ y $\mathbf{p} \in H^\perp$.

41. H es el subespacio del problema 38; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

42. H es el subespacio del problema 39; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

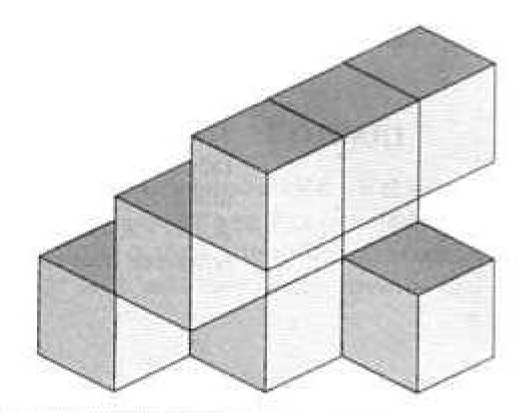
43. H es el subespacio del problema 40; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cálculo 44. Encuentre una base ortonormal para $P_2\,[0, 2]$.

Cálculo 45. Utilice el resultado del ejercicio 44 para encontrar un polinomio que sea la mejor aproximación por mínimos cuadrados a e^x sobre el intervalo $[0, 2]$.

46. Encuentre la recta que mejor se ajuste a los puntos $(2, 5)$, $(-1, -3)$, $(1, 0)$

47. Encuentre el mejor ajuste cuadrático para los puntos en el ejercicio 46.



5

Transformaciones lineales

5.1 DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

En este capítulo se estudia una clase especial de funciones llamadas *transformaciones lineales* que ocurren con mucha frecuencia en el álgebra lineal y otras ramas de matemáticas. Las transformaciones lineales tienen una gran variedad de aplicaciones importantes. Antes de definirlas, se estudiarán dos ejemplos sencillos para ver lo que puede suceder.

EJEMPLO 1 **Reflexión respecto al eje x** En $\mathbb{R}^2$ se define una función T mediante la fórmula $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$. Geométricamente, T toma un vector en $\mathbb{R}^2$ y lo refleja respecto al eje x. Esto se ilustra en la figura 5.1. Una vez que se ha dado la definición básica, se verá que T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

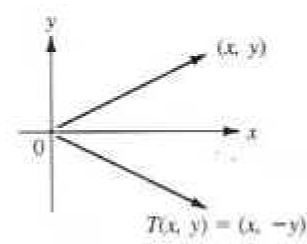


Figura 5.1 El vector $(x, -y)$ es la reflexión respecto al eje x del vector (x, y) ◆

EJEMPLO 2 **Transformación de un vector de producción en un vector de materia prima** Un fabricante hace cuatro tipos diferentes de productos, cada uno requiere tres tipos de materiales. Se denota a los cuatro productos por P_1, P_2, P_3 y P_4 y a los materiales por R_1, R_2 y R_3. La tabla siguiente da el número de unidades de cada materia prima que se requieren para fabricar 1 unidad de cada producto.

Número de unidades de materia prima	Necesarios para producir 1 unidad de			
	P_1	P_2	P_3	P_4
R_1	2	1	3	4
R_2	4	2	2	1
R_3	3	3	1	2

Surge una pregunta natural: si se produce cierto número de los cuatro productos, ¿cuántas unidades de cada material se necesitan? Sean p_1, p_2, p_3 y p_4 el número de artículos fabricados de los cuatro productos y sean r_1, r_2 y r_3 el número de unidades necesario de los tres materiales. Entonces se define

$$\mathbf{p}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{pmatrix} \qquad \mathbf{r}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\4&2&2&1\\3&3&1&2\end{pmatrix}$$

Por ejemplo, suponga que $\mathbf{p}=\begin{pmatrix}10\\30\\20\\50\end{pmatrix}$. ¿Cuántas unidades de R_1 se necesitan para producir estos números de unidades de los cuatro productos? De la tabla se tiene que

$$\begin{aligned}r_1 &= p_1\cdot 2+p_2\cdot 1+p_3\cdot 3+p_4\cdot 4\\ &= 10\cdot 2+30\cdot 1+20\cdot 3+50\cdot 4=310 \text{ unidades}\end{aligned}$$

De manera similar,

$$r_2 = 10\cdot 4+30\cdot 2+20\cdot 2+50\cdot 1=190 \text{ unidades}$$

y

$$r_3 = 10\cdot 3+30\cdot 3+20\cdot 1+50\cdot 2=240 \text{ unidades}$$

En general se ve que

$$\begin{pmatrix}2&1&3&4\\4&2&2&1\\3&3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix}$$

o

$$A\mathbf{p} = \mathbf{r}$$

Esto se puede ver de otra manera. Si **p** se llama el **vector de producción** y **r** el **vector de materia prima**, se define la función T por $\mathbf{r} = T\mathbf{p} = A\mathbf{p}$. Esto es, T es la función que "transforma" el vector de producción en el vector de materia prima. Se define con la multiplicación de matrices ordinaria. Como se verá, esta función es también una transformación lineal. ◆

Antes de definir una transformación lineal, hablaremos un poco sobre las funciones. En la sección 1.7 se escribió un sistema de ecuaciones como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

donde A es una matriz de $m \times n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Se pidió encontrar **x** cuando A y **b** se conocían. No obstante, esta ecuación se puede ver de otra manera: suponga que A se conoce. Entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ "dice": proporcione una **x** en $\mathbb{R}^n$ y yo le daré una **b** en $\mathbb{R}^m$; es decir, A representa una *función* con dominio $\mathbb{R}^n$ e imagen en $\mathbb{R}^m$.

La función que se acaba de definir tiene las propiedades de que $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$ si α es un escalar y $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$. Esta propiedad caracteriza las transformaciones lineales.

DEFINICIÓN 1 **Transformación lineal** Sean V y W espacios vectoriales reales. Una **transformación lineal** T de V en W es una función que asigna a cada vector $\mathbf{v} \in V$ un vector único $T\mathbf{v} \in W$ y que satisface, para cada **u** y **v** en V y cada escalar α,

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v} \quad (1)$$

y

$$T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v} \quad (2)$$

Tres notas sobre notación

1. Se escribe $T: V \rightarrow W$ para indicar que T toma el espacio vectorial real V y lo lleva al espacio vectorial real W; esto es, T es una función con V como su dominio y un subconjunto de W como su imagen.
2. Se escriben indistintamente $T\mathbf{v}$ y $T(\mathbf{v})$. Denotan lo mismo; las dos se leen "T de **v**". Esto es análogo a la notación funcional $f(x)$, que se lee "f de x".
3. Muchas de las definiciones y teoremas en este capítulo se cumplen también para los espacios vectoriales complejos (espacios vectoriales en donde los escalares son números complejos). Sin embargo, excepto brevemente en la sección 5.5, sólo se manejarán espacios vectoriales reales y, por lo tanto, se eliminará la palabra "real" en el análisis de los espacios vectoriales y las transformaciones lineales.

Terminología. Las transformaciones lineales con frecuencia se llaman **operadores lineales**.

EJEMPLO 3 **Una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$** Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix}$. Por ejemplo $T\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$. Entonces

$$T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 - y_1 - y_2 \\ 3y_1 + 3y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 - y_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ x_2 - y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix}$$

Pero

$$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 - y_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ x_2 - y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Así

$$T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

De manera similar

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha y \\ \alpha x - \alpha y \\ 3\alpha y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 3y \end{pmatrix} = \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Así, T es una transformación lineal. ✦

EJEMPLO 4 **La transformación cero** Sean V y W espacios vectoriales y defina $T: V \to W$ por $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v}$ en V. Entonces $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = T\mathbf{v}_1 + T\mathbf{v}_2$ y $T(\alpha\mathbf{v}) = \mathbf{0} = \alpha\mathbf{0} = \alpha T\mathbf{v}$. En este caso, T se llama la **transformación cero**. ✦

EJEMPLO 5 **La transformación identidad** Sea V un espacio vectorial y defina $I: V \to V$ por $I\mathbf{v} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v}$ en V. Aquí es obvio que I es una transformación lineal, la cual se llama **transformación identidad** u **operador identidad**. ✦

EJEMPLO 6 **Transformación de reflexión** Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. Es sencillo verificar que T es lineal. Geométricamente, T toma un vector en $\mathbb{R}^2$ y lo refleja respecto al eje y (vea la figura 5.2).

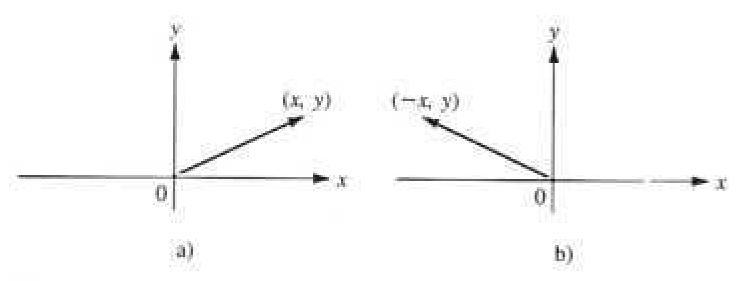


Figura 5.2 El vector $(-x, y)$ es la reflexión respecto al eje y del vector (x, y) ◆

EJEMPLO 7 **Transformación de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por la multiplicación por una matriz de $m \times n$**

Sea A una matriz de $m \times n$ y defina T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$. Como $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$ y $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$ si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en $\mathbb{R}^n$, se ve que T es una transformación lineal. Entonces: *toda matriz A de $m \times n$ se puede usar para definir una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$*. En la sección 5.3 se verá que se cumple cierto inverso: *toda transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita se puede representar por una matriz*. ◆

EJEMPLO 8 **Transformación de rotación** Suponga que el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en el plano xy se rota un ángulo θ (medido en grados o radianes) en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Llame a este nuevo vector rotado $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Entonces, como se ve en la figura 5.3, si r denota la longitud de $\mathbf{v}$ (que no cambia por la rotación),

$$x = r\cos\alpha \qquad y = r\,\text{sen}\,\alpha$$
$$x' = r\cos(\theta + \alpha) \qquad y' = r\,\text{sen}\,(\theta + \alpha)\dagger$$

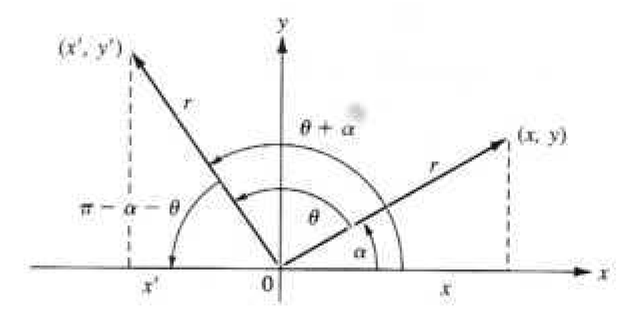


Figura 5.3 (x', y') se obtiene rotando (x, y) un ángulo θ

† Esto se deduce de la definición estándar de $\cos\theta$ y $\text{sen}\,\theta$ como las coordenadas x y y de un punto en el círculo unitario. Si (x, y) es un punto en el círculo de radio r con centro en el origen, entonces $x = r\cos\varphi$ y $y = r\,\text{sen}\,\varphi$, donde φ es el ángulo que forma el vector (x, y) con el lado positivo del eje x.

Pero $r \cos(\theta + \alpha) = r \cos\theta \cos\alpha - r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha$, de manera que

$$\boxed{x' = x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta} \tag{3}$$

De manera similar, $r \operatorname{sen}(\theta + \alpha) = r \operatorname{sen}\theta \cos\alpha + r\cos\theta \operatorname{sen}\alpha$, o sea

$$\boxed{y' = x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta} \tag{4}$$

Sea

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{5}$$

Entonces de (3) y (4), se ve que $A_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. La transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\mathbf{v} = A_\theta \mathbf{v}$, donde A_θ está dado por (5), se llama **transformación de rotación**. ✦

EJEMPLO 9 **Transformación de proyección ortogonal** Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$. La **transformación de proyección ortogonal** $P: V \to H$ se define por

$$P\mathbf{v} = \text{proy}_H\,\mathbf{v} \tag{6}$$

Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ una base ortonormal para H. Entonces de la definición 4.9.4, página 400, se tiene

$$P\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k \tag{7}$$

Como $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{u} = \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{u}$ y $(\alpha\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})$, se ve que P es una transformación lineal. ✦

EJEMPLO 10 **Dos operadores de proyección** Se define $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces T es el operador de proyección que toma un vector en el espacio de tres dimensiones y lo proyecta sobre el plano xy. De manera similar, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ proyecta un vector en el espacio sobre el plano xz. Estas dos transformaciones se describen en la figura 5.4.

a) b)

Figura 5.4 a) Proyección sobre el plano xy: $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$.

b) Proyección sobre el plano xz: $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix}$ ◆

EJEMPLO 11 **Operador de transposición** Defina T: $M_{mn} \rightarrow M_{nm}$ por $T(A) = A^t$. Como $(A + B)^t = A^t + B^t$ y $(\alpha A)^t = \alpha A^t$, se ve que T, llamado **operador de transposición**, es una transformación lineal. ◆

EJEMPLO 12 Cálculo **Operador integral** Sea J: $C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Jf = \int_0^1 f(x)\,dx$. Como $\int_0^1 [f(x) + g(x)]\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx$ **y** $\int_0^1 \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_0^1 f(x)\,dx$ **si** f y g son continuas, se ve que J es lineal. Por ejemplo, $J(x^3) = \frac{1}{4}$. J se llama **operador integral**. ◆

EJEMPLO 13 Cálculo **Operador diferencial** Suponga que D: $C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ se define por $Df = f'$. Como $(f + g)' = f' + g'$ y $(\alpha f)' = \alpha f'$ si f y g son diferenciables, se ve que D es lineal. D se llama **operador diferencial**. ◆

ADVERTENCIA No toda transformación que se ve lineal es en realidad lineal. Por ejemplo, defina T: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $Tx = 2x + 3$. Entonces la gráfica de $\{(x, Tx): x \in \mathbb{R}\}$ es una línea recta en el plano xy; pero T no es lineal porque $T(x + y) = 2(x + y) + 3 = 2x + 2y + 3$ y $Tx + Ty = (2x + 3) + (2y + 3) = 2x + 2y + 6$. Las únicas transformaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ son funciones de la forma $f(x) = mx$ para algún número real m. Así, entre todas las

funciones cuyas gráficas son rectas, las únicas que son lineales son aquellas que pasan por el origen. En álgebra y cálculo una **función lineal** con dominio $\mathbb{R}$ está definida como una función que tiene la forma $f(x) = mx + b$. Así, se puede decir que una función lineal es una transformación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ si y sólo si b (la ordenada al origen) es cero. ◇

EJEMPLO 14 **Una transformación que no es lineal** Suponga que $T: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $Tf = f(0) + 1$. Entonces T no es lineal. Para ver esto se calcula

$$T(f+g) = (f+g)(0) + 1 = f(0) + g(0) + 1$$
$$Tf + Tg = [f(0) + 1] + [g(0) + 1] = f(0) + g(0) + 2$$

Esto proporciona otro ejemplo de una transformación que puede parecer lineal pero que de hecho no lo es. ◆

PROBLEMAS 5.1

Autoevaluación

Falso-verdadero

I. Si T es una transformación lineal, entonces $T(3\mathbf{x}) = 3T\mathbf{x}$.

II. Si T es una transformación lineal, entonces $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T\mathbf{x} + T\mathbf{y}$.

III. Si T es una transformación lineal, entonces $T(\mathbf{xy}) = T\mathbf{x}T\mathbf{y}$

IV. Si A es una matriz de 4×5, entonces $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^5$.

V. Si A es una matriz de 4×5, entonces $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^4$.

En los problemas 1 al 29 determine si la transformación de V en W dada es lineal.

1. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$

3. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

4. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

5. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}$

6. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$

7. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

8. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$

9. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R};\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy$

Respuestas a la autoevaluación

I. V **II.** V **III.** F **IV.** F **V.** V

10. $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

11. $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n; T(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}$

12. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2; T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ y + w \end{pmatrix}$

13. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2; T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz \\ yw \end{pmatrix}$

14. $T: M_{mn} \to M_{mn}; T(A) = AB$, donde B es una matriz fija de $n \times n$

15. $T: M_{mn} \to M_{mn}; T(A) = A^tA$

16. $T: M_{mn} \to M_{mp}; T(A) = AB$, donde B es una matriz fija de $n \times p$

17. $T: D_n \to D_n; T(D) = D^2$ (D_n es el conjunto de matrices diagonales de $n \times n$)

18. $T: D_n \to D_n; T(D) = I + D$

19. $T: P_2 \to P_1; T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1x$

20. $T: P_2 \to P_1; T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_2x$

21. $T: \mathbb{R} \to P_n; T(a) = a + ax + ax^2 + \cdots + ax^n$

22. $T: P_2 \to P_4; T(p(x)) = [p(x)]^2$

23. $T: C[0, 1] \to C[0, 1]; Tf(x) = f^2(x)$

24. $T: C[0, 1] \to C[0, 1]; Tf(x) = f(x) + 1$

Cálculo **25.** $T: C[0, 1] \to \mathbb{R}; Tf = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$, donde g es una función fija en $C[0, 1]$

Cálculo **26.** $T: C^1[0, 1] \to C[0, 1]; Tf = (fg)'$, donde g es una función fija en $C^1[0, 1]$

27. $T: C[0, 1] \to C[1, 2]; Tf(x) = f(x - 1)$

28. $T: C[0, 1] \to \mathbb{R}; Tf = f(\frac{1}{2})$

29. $T: M_{nn} \to \mathbb{R}; T(A) = \det A$

30. Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-x, -y)$. Describa T geométricamente.

31. Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Encuentre:

a) $T\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y **b)** $T\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

32. En el ejemplo 8:

a. Encuentre la matriz de rotación A_θ cuando $\theta = \pi/6$.

b. ¿Qué le ocurre al vector $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ si se le rota un ángulo de $\pi/6$ en la dirección contraria a las manecillas del reloj?

33. Sea $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Describa geométricamente la transformación lineal T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\mathbf{x} = A_\theta\mathbf{x}$.

34. Conteste las preguntas en el problema 33 para $A_0 = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$.

35. Suponga que en un espacio vectorial real V, T satisface $T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T\mathbf{x} + T\mathbf{y}$ y $T(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T\mathbf{x}$ para $\alpha \geq 0$. Demuestre que T es lineal.

36. Encuentre una transformación lineal $T: M_{33} \rightarrow M_{22}$.

37. Si T es una transformación lineal de V en W, demuestre que $T(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = T\mathbf{x} - T\mathbf{y}$.

38. Si T es una transformación lineal de V en W, demuestre que $T\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$. ¿Son estos dos vectores cero el mismo?

39. Sea V un espacio con producto interno y sea $\mathbf{u}_0 \in V$ fijo. Suponga que $T: V \rightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) está definido por $T\mathbf{v} = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_0)$. Demuestre que T es lineal.

***40.** Demuestre que si V es un espacio vectorial complejo con producto interno y $T: V \rightarrow \mathbb{C}$ está definido por $T\mathbf{v} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v})$ para un vector fijo $\mathbf{u}_0 \in V$, entonces T no es lineal.

41. Sea V un espacio con producto interno con el subespacio de dimensión finita H. Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ una base para H. Demuestre que $T: V \rightarrow H$ definida por $T\mathbf{v} = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}, \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$ es una transformación lineal.

42. Sean V y W dos espacios vectoriales. Denote por $L(V, W)$ el conjunto de transformaciones lineales de V en W. Si T_1 y T_2 están en $L(V, W)$, defina αT_1 y $T_1 + T_2$ por $(\alpha T_1)\mathbf{v} = \alpha(T_1\mathbf{v})$ y $(T_1 + T_2)\mathbf{v} = T_1\mathbf{v} + T_2\mathbf{v}$. Pruebe que $L(V, W)$ es un espacio vectorial.

MATLAB 5.1

Información de MATLAB: Impresión de gráficas

Si está usando MATLAB en un sistema que tiene acceso a memoria extendida o si está usando MATLAB 4.0, dé **help print** para obtener las instrucciones adecuadas. Si su sistema no tiene acceso a memoria extendida, dé **help meta** para obtener información sobre cómo guardar una pantalla de gráficas en un archivo. Después lea en el manual de MATLAB la información sobre el uso del programa **gpp**. Si está usando la edición estudiantil de MATLAB, la única forma de obtener la impresión de una gráfica es con una impresión directa (teclas Shift-PrtScr, o sea, Caps-ImpPant). (Antes de correr MATLAB debe asegurarse que cargó el paquete de gráficas de su sistema operativo.)

Precaución. La impresión directa de la pantalla no conserva las relaciones de aspecto en ella; así, los ángulos rectos pueden no parecerlo y las longitudes iguales pueden ser distintas.

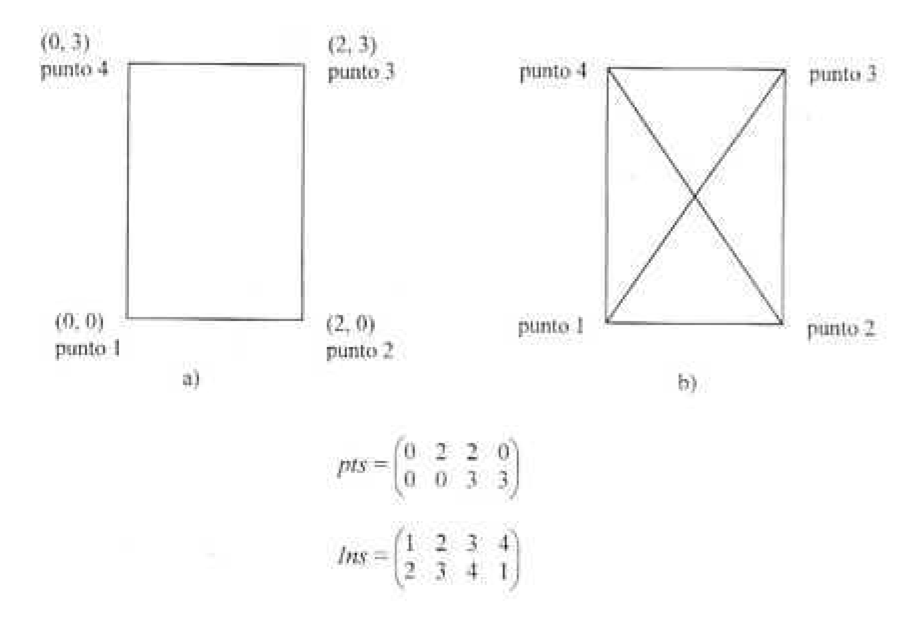
1. **Gráficas en computadora: creación de una figura** Una figura que se quiere graficar se describe usando una matriz que contiene los puntos importantes en la figura y una matriz que contiene información sobre los puntos que deben conectarse con segmentos de recta.

La matriz de puntos La matriz de puntos es una matriz de $2 \times n$, donde n es el número de puntos; el primer renglón contiene las coordenadas x y el segundo las coordenadas y de los puntos.

La matriz de líneas La matriz de líneas es una matriz de $2 \times m$, donde m es el número de líneas. Cada elemento es el número de una columna de la matriz de puntos. La información indica

que los dos puntos a los que se hace referencia en una columnas de la matriz de líneas deben conectarse por un segmento de recta.

Por ejemplo, para describir el primer rectángulo de la siguiente figura:



$$pts = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$lns = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz *lns* dice que el punto 1, (0, 0), (columna 1 de *pts*) está conectado con el punto 2, (2, 0), (columna 2 de *pts*); el punto 2 está conectado con el punto 3, (2,3), (columna 3 de *pts*); el punto 3 está conectado al punto 4, (0, 3), (columna 4 de *pts*), y el punto 4 está conectado con el punto 1.

Si se trata de el segundo rectángulo de la figura anterior, con las diagonales de esquina a esquina, la matriz *pts* sería la misma y

$$lns = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

M Para graficar la figura después de introducir las matrices *pts* y *lns*, se usa el archivo *grafics.m* del disco. La sintaxis para correr *grafics* es **grafics(pts, lns, clr, sym, M):**

pts = la matriz de puntos
lns = la matriz de líneas
clr = opciones de color; por ejemplo, **'r'** representa el rojo; pida con **help plot** una descripción de otras opciones de color.
sym = '*' o **'o'** o '+' o **'x'** o '.'

Los puntos en la matriz de puntos serán graficados individualmente usando el símbolo que se elija.

M es algún número positivo, por lo general, un entero. Establece la escala sobre los ejes de la pantalla de gráficas entre $-M \leq x \leq M$ y $-M \leq y \leq M$.

Por ejemplo, **grafics(pts, lns, 'b', '+', 10)** graficará el rectángulo dado por el primer conjunto de matrices, *pts* y *lns*, en azul, con los puntos (las esquinas del rectángulo) dibujados con un signo "+" y la escala de los ejes: $-10 \leq x \leq 10$ y $-10 \leq y \leq 10$.

a. Introduzca las siguientes matrices:

$$pts = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 8 & 8 & 11 & 11 & 15 & 15 & 11 & 8 & 8 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 7 & 7 & 10 & 10 & 12 & 7 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

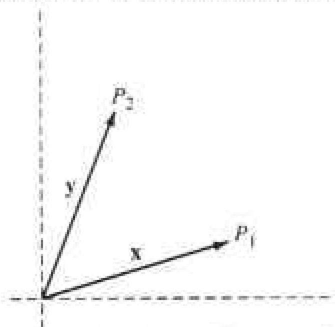
$$lns = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

Dé el comando **grafics(pts, lns, 'r', '*', 20)**
Describa en palabras la figura producida y describa otras características de la pantalla de gráficas.

b. Diseñe su propia figura. Forme una matriz de puntos y de líneas y grafíquela usando el archivo *grafics.m*.

2. Suponga que $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal (como una rotación respecto al origen) y que se quiere graficar la imagen de una figura después de aplicarle la transformación.

a. (*Lápiz y papel*) Considere los puntos P_1 y P_2 en el plano. Sea **x** el vector que comienza en el origen y termina en P_1 y sea **y** el vector que comienza en el origen y termina en P_2. Explique por qué el vector $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ es paralelo al segmento de recta entre P_1 y P_2.



Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Entonces el punto terminal de $T\mathbf{x}$ será el punto en la imagen transformada que viene de P_1 y el punto terminal de $T\mathbf{y}$ será el correspondiente a la imagen transformada que viene de P_2. Así, $T\mathbf{x} - T\mathbf{y}$ será paralelo al segmento que une las imágenes transformadas de P_1 y P_2. Explique por qué se puede concluir, a partir de la linealidad de T que el segmento entre P_1 y P_2, representado por $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, se transforma en el segmento entre las imágenes transformadas de P_1 y P_2, representado por $T\mathbf{x} - T\mathbf{y}$.

El inciso a) implica que para graficar la imagen de una figura después de aplicar una transformación lineal T sólo es necesario aplicar la transformación a la matriz de puntos; la matriz de líneas de la imagen transformada será la misma. Cualquier transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se puede representar por la multiplicación por una matriz A de 2×2. Así, la matriz de puntos de la imagen transformada será $A * pts$, donde *pts* es la matriz de puntos de la figura original.

b. Se desea graficar, sobre el mismo conjunto de ejes, la figura dada por las matrices de puntos y líneas dadas en el problema 1a) de esta sección de MATLAB y su imagen transformada después de aplicar una transformación de rotación. Recuerde que la matriz de la transformación lineal que rota *en el sentido contrario a las manecillas del reloj* respecto al origen, un ángulo θ, está dada por

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Los siguientes comandos grafican la figura original (en rojo) y su rotación *positiva* un ángulo de $\pi/2$ respecto al origen (en azul):

```
th = -pi/2; A = [cos(th) -sen(th);sen(th) cos(th)]
grafics(pts, lns, 'r', '*', 20)
hold on
grafics(A*pts, lns, 'b', '*', 20)
hold off
```

Observe que se usa el comando **hold on** para que ambas figuras aparezcan en el mismo conjunto de ejes. El uso del comando **hold off** es un buen hábito; estrictamente hablando en este caso no se necesita ya que el archivo *grafics.m* contiene un comando final **hold off**.

Interpretación. En la gráfica, identifique los cuatro puntos de la figura original que están en la parte inferior (sobre el eje x). Identifique los puntos en los que se transformaron. Identifique algunos segmentos entre los puntos de la figura original e identifique los segmentos correspondientes en la figura transformada. Verifique que estos segmentos de la figura transformada sean en realidad rotaciones de $\pi/2$ en sentido de las manecillas del reloj de los segmentos de la figura original. Haga lo mismo para los dos puntos de la figura original que están en el eje y.

c. En el mismo conjunto de ejes, grafique la figura original (la que se usó en los incisos anteriores de este problema) y la imagen transformada después de la rotación *positiva* de $2\pi/3$ respecto al origen. Interprete como se indicó en el inciso b).

d. En el mismo conjunto de ejes, grafique la figura del problema 1b) de esta sección de MATLAB y la imagen transformada después de la rotación respecto al origen por un ángulo de su elección.

M **3.** Considere la figura cuyas matrices de puntos y líneas están dadas en el problema 1a) anterior.

a. Utilice el archivo *grafics.m* para graficar, sobre los mismos ejes la figura original y la figura después de aplicar la transformación dada por la multiplicación por la matriz A, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Seleccione un parámetro M adecuado al llamar a *grafics* para que ambas figuras se vean bien en la pantalla de gráficas. (Necesita experimentar con la selección de este parámetro M. Después de determinar el adecuado, dé **hold off** y repita la secuencia de comandos necesarios para graficar las dos imágenes en los mismos ejes.)

Describa la geometría de la transformación.

b. Repita el inciso a) para las transformaciones siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c. (*Lápiz y papel*) Describa la geometría de $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

para $r > 0$ y $s > 0$.

5.2 PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES: IMAGEN Y NÚCLEO

En esta sección se desarrollan algunas propiedades básicas de las transformaciones lineales.

TEOREMA 1 Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces para todos los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en V y todos los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

i. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

ii. $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T\mathbf{u} - T\mathbf{v}$

iii. $T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1 T\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n T\mathbf{v}_n$

Nota. En la parte *i*) el $\mathbf{0}$ de la izquierda es el vector cero en V, mientras que el $\mathbf{0}$ de la derecha es el vector cero en W.

Demostración

i. $T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0})$. Así,

$$\mathbf{0} = T(\mathbf{0}) - T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0}) - T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0})$$

ii. $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T[\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}] = T\mathbf{u} + T[(-1)\mathbf{v}] = T\mathbf{u} + (-1)T\mathbf{v} = T\mathbf{u} - T\mathbf{v}$.

iii. Esta parte se prueba por inducción (vea el apéndice 1). Para $n = 2$ se tiene $T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) = T(\alpha_1\mathbf{v}_1) + T(\alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1 T\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T\mathbf{v}_2$. Así que la ecuación (1) se cumple para $n = 2$. Se supone que se cumple para $n = k$ y se prueba para $n = k + 1$: $T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}) = T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k) + T(\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1})$, y usando la ecuación en la parte *iii*) para $n = k$, esto es igual a $(\alpha_1 T\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k T\mathbf{v}_k) + \alpha_{k+1} T\mathbf{v}_{k+1}$, que es lo que se quería demostrar. Esto completa la prueba. ◆

Observación. La partes *i*) y *ii*) del teorema 1 son casos especiales de la parte *iii*).

Un hecho importante sobre las transformaciones lineales es que están completamente determinadas por el efecto sobre los vectores de la base.

TEOREMA 2 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Sean $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$, n vectores en W. Suponga que T_1 y T_2 son dos transformaciones lineales de V en W tales que $T_1\mathbf{v}_i = T_2\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces para cualquier vector $\mathbf{v} \in V$, $T_1\mathbf{v} = T_2\mathbf{v}$; es decir, $T_1 = T_2$.

Demostración Como B es una base para V, existe un conjunto único de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$. Entonces, de la parte *iii*) del teorema 1,

$$\begin{aligned} T_1\mathbf{v} = T_1(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) &= \alpha_1 T_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T_1\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n T_1\mathbf{v}_n \\ &= \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{w}_n \end{aligned}$$

De manera similar,

$$T_2\mathbf{v} = T_2(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1 T_2\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n T_2\mathbf{v}_n$$
$$= \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{w}_n$$

Por lo tanto, $T_1\mathbf{v} = T_2\mathbf{v}$. ◆

El teorema 2 dice que si $T: V \rightarrow W$ y V tiene dimensión finita, entonces sólo es necesario conocer el efecto de T sobre los vectores de la base en V. Esto es, si se conoce la imagen de cada vector básico, se puede determinar la imagen de cualquier vector en V. Esto determina T por completo. Para ver esto, sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ una base en V y sea $\mathbf{v}$ otro vector en V. Entonces, igual que en la prueba del teorema 2,

$$T\mathbf{v} = \alpha_1 T\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n T\mathbf{v}_n$$

Así, se puede calcular $T\mathbf{v}$ para cualquier vector $\mathbf{v} \in V$ si se conocen $T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, \ldots, T\mathbf{v}_n$.

EJEMPLO 1 **Si se conoce el efecto de una transformación lineal sobre los vectores de la base, entonces se conoce el efecto sobre cualquier otro vector** Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ y suponga que $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$. Calcule $T\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$.

Solución Se tiene $\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Entonces

$$T\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix} = 3T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 4T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 5T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= 3\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-16\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}25\\-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}35\\-22\end{pmatrix}$$

Surge otra pregunta: si $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ son n vectores en W, ¿existe una transformación lineal T tal que $T\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$? La respuesta es sí, como lo muestra el siguiente teorema.

TEOREMA 3 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Sea W un espacio vectorial que contiene los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$. Entonces existe una transformación lineal única $T: V \rightarrow W$ tal que $T\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración Se define la función T como sigue:

i. $T\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$

ii. Si $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$, entonces

$$T\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{w}_n \quad \textbf{(1)}$$

Como B es una base para V, T está definida para todo $\mathbf{v} \in V$; y como W es un espacio vectorial, $T\mathbf{v} \in W$. Entonces sólo falta demostrar que T es lineal; pero esto se deduce directamente de la ecuación (1). Si $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{v}_n$, entonces

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T[(\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{v}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{v}_n] \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{w}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{w}_n \\ &= (\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{w}_n) + (\beta_1\mathbf{w}_1 + \beta_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{w}_n) \\ &= T\mathbf{u} + T\mathbf{v} \end{aligned}$$

De manera similar, $T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v}$, así que T es lineal. La unicidad de T se obtiene del teorema 2 y la prueba queda completa. ◆

Observación. En los teoremas 2 y 3 los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ no tienen que ser independientes y, de hecho, ni siquiera tienen que ser diferentes. Más aún, se hace hincapié en que los teoremas se cumplen si V es cualquier espacio vectorial de dimensión finita, no sólo $\mathbb{R}^n$. Observe también que la dimensión de W no tiene que ser finita.

EJEMPLO 2 **Definición de una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en un subespacio de $\mathbb{R}^3$** Encuentre una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en el plano

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + 3z = 0 \right\}$$

Solución Del ejemplo 4.6.3, página 338, se sabe que W es un subespacio de dos dimensiones de $\mathbb{R}^3$ con vectores básicos $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Usando la base estándar en $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, se define la transformación lineal T por $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entonces, como lo muestra el análisis que sigue al teorema 2, T está completamente determinada. Por ejemplo,

$$T\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}=T\left[5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-7\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]=5T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-7T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}-7\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-11\\-7\end{pmatrix}$$

De manera más general,

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\2x+3y\\y\end{pmatrix}$$ ◆

Ahora se darán dos definiciones importantes en la teoria de transformaciones lineales.

DEFINICIÓN 1 **Núcleo e imagen de una transformación lineal** Sean V y W dos espacios vectoriales y sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces

i. El **núcleo** de T, denotado por nu T, está dado por

Kernel.

$$\text{nu } T = \{\mathbf{v} \in V: T\mathbf{v} = \mathbf{0}\} \qquad (2)$$

ii. La **imagen** de T, denotado por imagen T, está dado por

$$\text{imagen } T = \{\mathbf{w} \in W: \mathbf{w} = T\mathbf{v} \text{ para alguna } \mathbf{v} \in V\} \qquad (3)$$

Observación 1. Observe que nu T es no vacío porque, por el teorema 1, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ de manera que $\mathbf{0} \in$ nu T para cualquier transformación lineal T. Se tiene interés en encontrar otros vectores en V que "se transformen en $\mathbf{0}$". De nuevo, observe que cuando escribimos $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, el $\mathbf{0}$ de la izquierda está en V y el de la derecha en W.

Imagen

Observación 2. La imagen de T es simplemente el conjunto de "imágenes" de los vectores en V bajo la transformación T. De hecho, si $\mathbf{w} = T\mathbf{v}$, se dice que $\mathbf{w}$ es la **imagen** de $\mathbf{v}$ bajo T.

Antes de dar ejemplos de núcleos e imágenes, se demostrará un teorema de gran utilidad.

TEOREMA 4 Si $T: V \rightarrow W$ es una transformación lineal, entonces

i. nu T es un subespacio de V.
ii. imagen T es un subespacio de W.

Demostración **i.** Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en nu T; entonces $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T\mathbf{u} = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ de forma que $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ y $\alpha\mathbf{u}$ están en nu T.

ii. Sean $\mathbf{w}$ y $\mathbf{x}$ en imagen T. Entonces $\mathbf{w} = T\mathbf{u}$ y $\mathbf{x} = T\mathbf{v}$ para dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V. Esto significa que $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{x}$ y $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T\mathbf{u} = \alpha\mathbf{w}$. Por lo tanto, $\mathbf{w}+\mathbf{x}$ y $\alpha\mathbf{w}$ están en la imagen T. ◆

EJEMPLO 3 **Núcleo e imagen de la transformación cero** Sea $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in V$. (T es la transformación cero.) Entonces nu $T = V$ e imagen $T = \{\mathbf{0}\}$. ◆

EJEMPLO 4 **Núcleo e imagen de la transformación identidad** Sea $T\mathbf{v} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in V$. (T es la transformación identidad.) Entonces nu $T = \{\mathbf{0}\}$ e imagen $T = V$. ◆

Las transformaciones cero e identidad proporcionan dos extremos. En la primera, todo está en el núcleo. En la segunda, sólo el vector cero está en el núcleo. Los casos intermedios son más interesantes.

EJEMPLO 5 **Núcleo e imagen de un operador de proyección** Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. Esto es (vea el ejemplo 5.1.10, página 470), T es el operador de proyección de $\mathbb{R}^3$ en el plano xy. si $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $x = y = 0$. Así, nu $T = \{(x, y, z): x = y = 0\}$ = eje z, e imagen $T = \{(x, y, z): z = 0\}$ = plano xy. Observe que dim nu $T = 1$ y dim imagen $T = 2$. ◆

DEFINICIÓN 2 **Nulidad y rango de una transformación lineal** Si T es una transformación lineal de V en W, entonces se define

$$\textbf{Nulidad de } T = \nu(T) = \dim \text{nu } T \quad (4)$$
$$\textbf{Rango de } T = \rho(T) = \dim \text{imagen } T \quad (5)$$

Observación. En la sección 4.7 se definieron el rango, la imagen, el espacio nulo y la nulidad de una matriz. Según el ejemplo 5.1.7, toda matriz A de $m \times n$ da lugar a una transformación lineal T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$. Es evidente que nu $T = N_A$, imagen T = imagen $A = C_A$, $\nu(T) = \nu(A)$ y $\rho(T) = \rho(A)$. Entonces se ve que las definiciones de núcleo, imagen, nulidad y rango de una transformación lineal son extensiones del espacio nulo, la imagen, la nulidad y el rango de una matriz.

EJEMPLO 6 **Núcleo y nulidad de un operador de proyección** Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $T\mathbf{v} = \text{proy}_H\mathbf{v}$. Es claro que la imagen $T = H$. Del teorema 4.9.7, página 403, se tiene que toda $\mathbf{v} \in V$ si $\mathbf{v} = \mathbf{h} + \mathbf{p} = \text{proy}_H\mathbf{v} + \text{proy}_{H^\perp}\mathbf{v}$. Si $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, lo que significa que $\mathbf{v} = \mathbf{p} \in H^\perp$. Así nu $T = H^\perp$, $\rho(T) = \dim H$, y $\nu(T) = \dim H^\perp = n - \rho(T)$. ✦

EJEMPLO 7 **Núcleo e imagen de un operador transpuesto** Sea $V = M_{mn}$ y defina T: $M_{mn} \to M_{nm}$ por $T(A) = A^t$ (vea el ejemplo 5.1.11, página 471). Si $TA = A^t = 0$, entonces A^t es la matriz cero de $n \times m$ por lo que A es la matriz cero de $m \times n$. Así, nu $T = \{\mathbf{0}\}$ y es claro que imagen $T = M_{nm}$. Esto significa que $\nu(T) = 0$ y $\rho(T) = nm$. ✦

EJEMPLO 8 **Núcleo e imagen de una transformación de P_3 en P_2** Defina T: $P_3 \to P_2$ por $T(p) = T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Entonces si $T(p) = 0$, $a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$ para toda x, lo que implica que $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Así nu $T = \{p \in P_3$: $p(x) = a_3x^3\}$ e imagen $T = P_2$, $\nu(T) = 1$ y $\rho(T) = 3$. ✦

EJEMPLO 9 Cálculo **Núcleo e imagen de un operador integral** Sea $V = C[0, 1]$ y defina J: $C[0, 1] \to \mathbb{R}$ por $Jf = \int_0^1 f(x)\,dx$ (vea el ejemplo 5.1.12, página 471). Entonces nu $J = \{f \in C[0, 1]$: $\int_0^1 f(x)\,dx = 0\}$. Sea α un número real. Entonces la función constante $f(x) = \alpha$ para $x \in [0, 1]$ está en $C[0, 1]$ y $\int_0^1 \alpha\,dx = \alpha$. Como esto se cumple para todo número real α, se tiene que imagen $J = \mathbb{R}$. ✦

En la siguiente sección se verá que toda transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión finita en otro se puede representar por una matriz. Esto permitirá calcular el núcleo y la imagen de cualquier transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita encontrando el espacio nulo y la imagen de la matriz correspondiente.

PROBLEMAS 5.2

Autoevaluación

Falso-verdadero

I. Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. En ocasiones es posible encontrar tres vectores diferentes $\mathbf{v}_1 \in V$, $\mathbf{v}_2 \in V$ y $\mathbf{w} \in W$ tales que $T\mathbf{v}_1 = T\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}$.

II. Si $T\mathbf{v}_1 = T\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}$ como en el problema I, entonces $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in$ nu T.

III. Si T es una transformación lineal de V en W, entonces la imagen de T es W.

IV. Sea $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ una base para $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ una base para P_{n-1}. Entonces existen dos transformaciones lineales S y T tales que $T\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$ y $S\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

V. Si $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal y $T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, entonces T es la transformación cero.

VI. Existe una transformación lineal T de $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ con $\rho(T) = \nu(T)$.

VII. Suponga que $T: M_{22} \to M_{22}$ con $\rho(T) = 4$. Si $TA = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, entonces $A = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

En los problemas 1 al 10 encuentre núcleo, imagen, rango y nulidad de la transformación lineal dada.

1. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$

2. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\y\end{pmatrix}$

3. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x + y$

4. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+z\\y+w\end{pmatrix}$

5. $T: M_{22} \to M_{22}$; $T(A) = AB$, donde $B = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$

6. $T: \mathbb{R} \to P_3$; $T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$

***7.** $T: M_{nn} \to M_{nn}$; $T(A) = A^t + A$

8. **Cálculo** $T: C^1[0, 1] \to C[0, 1]$; $Tf = f'$

9. $T: C[0, 1] \to \mathbb{R}$; $Tf = f(\frac{1}{2})$

10. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; T es una rotación de $\pi/3$

11. Sea $T: V \to W$ una transformación lineal, sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para V y suponga que $T\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Demuestre que T es la transformación cero.

12. En el problema 11 suponga que $W = V$ y $T\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Demuestre que T es el operador identidad.

Respuestas a la autoevaluación

I. V **II.** V **III.** F **IV.** F **V.** F **VI.** F **VII.** V

13. Sea $T: V \to \mathbb{R}^3$. Demuestre que la imagen T es cualquiera de las siguientes: **a)** $\{\mathbf{0}\}$, **b)** una recta que pasa por el origen, **c)** un plano que pasa por el origen, **d)** $\mathbb{R}^3$.

14. Sea $T: \mathbb{R}^3 \to V$. Demuestre que nu T es uno de los cuatro espacios enumerados en el problema 13.

15. Encuentre todas las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tales que la recta $y = 0$ se transforma en la recta $x = 0$.

16. Encuentre todas las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que llevan a la recta $y = ax$ a la recta $y = bx$.

17. Encuentre una transformación lineal T de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\text{nu } T = \{(x, y, z): 2x - y + z = 0\}.$$

18. Encuentre una transformación lineal T de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\text{imagen } T = \{(x, y, z): 2x - y + z = 0\}.$$

19. Defina $T: M_{nn} \to M_{nn}$ por $TA = A - A^t$. Demuestre que nu T = {matrices simétricas de $n \times n$} e imagen T = {matrices antisimétricas de $n \times n$}.

* Cálculo **20.** Defina $T: C^1[0, 1] \to C[0, 1]$ por $Tf(x) = xf'(x)$. Encuentre el núcleo y la imagen de T.

***21.** En el problema 5.1.42 se le pidió que demostrara que un conjunto de transformaciones lineales de un espacio vectorial V a un espacio vectorial W, denotadas por $L(V, W)$ es un espacio vectorial. Suponga que dim $V = n < \infty$ y dim $W = m < \infty$. Encuentre dim $L(V, W)$.

22. Sea H un subespacio de V donde dim $H = k$ y dim $V = n$. Sea U el subconjunto de $L(V, V)$ que tiene la propiedad de que si $T \in U$), entonces $T\mathbf{h} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{h} \in H$.
a. Demuestre que U es un subespacio de $L(V, V)$.
b. Encuentre dim U.

***23.** Sean S y T en $L(V, V)$ tales que ST es la transformación cero. Demuestre o contradiga que TS es la transformación cero.

5.3 REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Si A es una matriz de $m \times n$ y $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está definida por $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, entonces, como se vio en el ejemplo 5.1.7, página 469, T es una transformación lineal. Ahora se verá que para *toda* transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ existe una matriz A de $m \times n$ tal que $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Este hecho es sumamente útil. Como se dijo en la observación de la página 483, si $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, entonces nu $T = N_A$ e imagen $T = R_A$. Más aún, $\nu(T)$ = dim nu $T = \nu(A)$ y $\rho(T)$ = dim imagen $T = \rho(A)$. Así se puede determinar núcleo, imagen, nulidad y rango de una transformación lineal de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ determinando el espacio nulo y la imagen de la matriz correspondiente. Todavía más, una vez que se sabe que $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, se puede evaluar $T\mathbf{x}$ para cualquier $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ mediante una simple multiplicación de matrices.

Pero esto no es todo. Como se verá, cualquier transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita se puede representar por una matriz.

TEOREMA 1 Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces existe una matriz única de $m \times n$, A_T tal que

$$\boxed{T\mathbf{x} = A_T\mathbf{x} \qquad \text{para toda } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \tag{1}$$

Demostración Sea $\mathbf{w}_1 = T\mathbf{e}_1, \mathbf{w}_2 = T\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{w}_n = T\mathbf{e}_n$. Sea A_T la matriz cuyas columnas son $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ y hagamos que A_T denote también a la transformación de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, que premultiplica un vector en $\mathbb{R}^n$ por A_T. Si

$$\mathbf{w}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

entonces

$$A_T\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = \mathbf{w}_i$$

i-ésima posición

Así $A_T\mathbf{e}_i = \mathbf{w}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por el teorema 5.2.2, página 478, T y la transformación A_T son la misma porque coinciden en los vectores básicos.

Ahora se puede demostrar que A_T es única. suponga que $T\mathbf{x} = A_T\mathbf{x}$ y que $T\mathbf{x} = B_T\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Entonces $A_T\mathbf{x} = B_T\mathbf{x}$, o estableciendo $C_T = A_T - B_T$, se tiene que $C_T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. En particular, $C_T\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Pero como se deduce de la demostración de la primera parte del teorema, $C_T\mathbf{e}_i$ es la columna i de C_T. Así, cada una de las n columnas de C_T es el m-vector cero y $C_T = 0$, la matriz cero de $m \times n$. Esto muestra que $A_T = B_T$ y el teorema queda demostrado. ✦

Observación 1. En este teorema se supone que todo vector en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ está expresado en términos de los vectores de la base estándar en esos espacios. Si se eligen otras bases para $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, por supuesto, se obtendrá una matriz A_T diferente. Para ilustrar esto, vea el ejemplo 4.8.1, página 377 o enseguida, el ejemplo 8.

Observación 2. La demostración del teorema muestra que es sencillo obtener A_T como la matriz cuyas columnas son los vectores $T\mathbf{e}_i$.

DEFINICIÓN 1 **Matriz de transformación** La matriz A_T en el teorema 1 se llama **matriz de transformación** correspondiente a T o **representación matricial** de T.

Nota. La matriz de transformación A_T está definida usando las bases estándar tanto en $\mathbb{R}^n$ como en $\mathbb{R}^m$. Si se usan otras bases, se obtendrá una matriz de transformación diferente. Vea el teorema 3, página 490.

En la sección 5.2 se definieron la imagen, el rango, el núcleo y la nulidad de una transformación lineal. En la sección 4.7 se definieron la imagen, el rango, el espacio nulo y la nulidad de una matriz. La prueba del siguiente teorema es consecuencia del teorema 1 y se deja como ejercicio (vea el problema 36).

TEOREMA 2 Sea A_T la matriz de transformación correspondiente a la transformación lineal T. Entonces

i. imagen T = imagen $A = C_{A_T}$
ii. $\rho(T) = \rho(A_T)$
iii. nu $T = N_{A_T}$
iv. $\nu(T) = \nu(A_T)$ ◆

EJEMPLO 1 **Representación matricial de una transformación de proyección** Encuentre la matriz de transformación A_T correspondiente a la proyección de un vector en $\mathbb{R}^3$ sobre el plano xy.

Solución Aquí $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. En particular, $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Así, $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Observe que $A_T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. ◆

EJEMPLO 2 **Representación matricial de una transformación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$** Defina $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y + z \\ 2x - y - z \\ -x + y + 2z \end{pmatrix}$$

Encuentre A_T, nu T, imagen T, $\nu(T)$ y $\rho(T)$.

Solución $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$, y $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}$. Así

$$A_T=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Observe (a manera de verificación) que

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\ x+z\\ 2x-y-z\\ -x+y+2z\end{pmatrix}$$

Ahora se calculan el núcleo y la imagen de A. La forma escalonada por renglones de $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Esta forma tiene tres pivotes, de manera que

$$\rho(A)=3 \quad \text{y} \quad \nu(A)=\underset{\text{ya que }\rho(A)+\nu(A)=3}{\underbrace{3-3}}=0$$

Esto significa que nu $T=\{\mathbf{0}\}$, imagen $T=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$, $\nu(T)=0$ y $\rho(T)=3$. ◆

EJEMPLO 3 **Representación matricial de una transformación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$** Defina $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ por $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-y+3z\\ 4x-2y+6z\\ -6x+3y-9z\end{pmatrix}$. Encuentre A_T, nu T, imagen T, $\nu(T)$ y $\rho(T)$.

Solución Como $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\-9\end{pmatrix}$ se tiene

$$A_T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

teorema 2*ii*)

Del ejemplo 4.7.4, página 352, se ve que $\rho(A) = \rho(T) = 1$ e imagen $T = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}\right\}$.

Entonces $\nu(T) = 2$.

teorema 2*iii*)

Para encontrar $N_A = \text{nu}\ T$, se reduce por renglones para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esto significa que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in N_A$ si $2x - y + 3z = 0$, o sea, $y = 2x + 3z$. Estableciendo primero $x = 1$ $z = 0$ y después $x = 0$, $z = 1$, se obtiene una base para N_A:

$$\text{nu}\ T = N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

◆

EJEMPLO 4 **Representación matricial de una transformación cero** Es fácil verificar que si T es la transformación cero de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entonces A_T es la matriz cero de $m \times n$. De igual manera, si T es la transformación identidad de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, entonces $A_T = I_n$. ◆

EJEMPLO 5 **Representación matricial de una transformación de rotación** Se vio en el ejemplo 5.1.8, página 469, que si T es la función que rota a todo vector en $\mathbb{R}^2$ un ángulo θ, entonces $A_T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. ◆

Ahora se generalizará el concepto de representación matricial a espacios arbitrarios de dimensión finita.

TEOREMA 3 Sean V un espacio vectorial de dimensión n, W un espacio vectorial de dimensión m y $T: V \to W$ una transformación lineal. Sea $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para V y sea $B_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ una base para W. Entonces existe una matriz única A_T de $m \times n$ tal que

$$\boxed{(T\mathbf{x})_{B_2} = A_T(\mathbf{x})_{B_1}} \tag{2}$$

Observación 1. La notación (2) es la notación de la sección 4.8 (vea la página 375).

Si $\mathbf{x} \in V = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_m$, entonces $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Sea $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, entonces $A_T\mathbf{c}$

es un m-vector que se denotará por $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$. La ecuación (2) dice que $(T\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$

Es decir,

$$T\mathbf{x} = d_1\mathbf{w}_1 + d_2\mathbf{w}_2 + \cdots + d_m\mathbf{w}_m$$

Observación 2. Como en el teorema 1, la unicidad de A_T es relativa a las bases B_1 y B_2. Si se cambian las bases, A_T cambia (vea los ejemplo 8 y 9, y el teorema 5). Si se usan las bases estándar, entonces esta A_T es la A_T de la definición 1.

Demostración Sean $T\mathbf{v}_1 = \mathbf{y}_1, T\mathbf{v}_2 = \mathbf{y}_2, \ldots, T\mathbf{v}_n = \mathbf{y}_n$. Como $\mathbf{y}_i \in W$, se tiene que para $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\mathbf{y}_i = a_{1i}\mathbf{w}_1 + a_{2i}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mi}\mathbf{w}_m$$

para algún conjunto (único) de escalares $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}$, y se escribe

$$(\mathbf{y}_1)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, (\mathbf{y}_2)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, (\mathbf{y}_n)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

esto significa, por ejemplo, que $\mathbf{y}_1 = a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{w}_m$. Ahora se define

$$A_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Como

$$(\mathbf{v}_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, (\mathbf{v}_2)_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, (\mathbf{v}_n)_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

se tiene, como en la prueba del teorema 1,

$$A_T(\mathbf{v}_i)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = (\mathbf{y}_i)_{B_2}$$

i-ésima posición

Si **x** está en V, entonces

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

$$(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

y

$$A_T(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n \end{pmatrix}$$

$$= c_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= c_1(\mathbf{y}_1)_{B_2} + c_2(\mathbf{y}_2)_{B_2} + \cdots + c_n(\mathbf{y}_n)_{B_2}$$

De manera similar, $T\mathbf{x} = T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1T\mathbf{v}_1 + c_2T\mathbf{v}_2 + \cdots + c_nT\mathbf{v}_n = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n$, de manera que $T(\mathbf{x})_{B_2} = (c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n)_{B_2} = c_1(\mathbf{y}_1)_{B_2} + c_2(\mathbf{y}_2)_{B_2} + \cdots + c_n(\mathbf{y}_n)_{B_2} = A_T(\mathbf{x})_{B_1}$. Así, $(T\mathbf{x})_{B_2} = A_T(\mathbf{x})_{B_1}$. La prueba de la unicidad es exactamente igual que la prueba de unicidad en el teorema 1. ◆

El siguiente resultado útil es consecuencia inmediata del teorema 4.7.7, página 356, y generaliza el teorema 2. Su demostración se deja como ejercicio (vea el problema 37).

TEOREMA 4 Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con dim $V = n$. Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal y sea A_T una representación matricial de T respecto a las bases B_1 en V y B_2 en W. Entonces

i. $\rho(T) = \rho(A_T)$

ii. $\nu(T) = \nu(A_T)$

iii. $\nu(T) + \rho(T) = n$ ✦

Nota. *i)* y *ii)* implican que $\rho(A_T)$ y $\nu(A_T)$ son independientes de las bases B_1 y B_2.

EJEMPLO 6 **Representación matricial de una transformación de P_2 en P_3** Defina $T: P_2 \rightarrow P_3$ por $(Tp)(x) = xp(x)$. Encuentre A_T y úsela para determinar el núcleo y la imagen de T.

Solución Utilizando las bases estándar $B_1 = \{1, x, x^2\}$ en P_2 y $B_2 = \{1, x, x^2, x^3\}$ en P_3, se tiene $(T(1))_{B_2} = (x)_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(T(x))_{B_2} = (x^2)_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $(T(x^2))_{B_2} = (x^3)_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así, $A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es evidente que $\rho(A) = 3$ y que una base para R_A es $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Por lo tanto, imagen $T = \text{gen}\,\{x, x^2, x^3\}$. Como $\nu(A) = 3 - \rho(A) = 0$, se ve que nu $T = \{\mathbf{0}\}$. ✦

EJEMPLO 7 **Representación matricial de una transformación de P_3 en P_2** Defina $T: P_3 \rightarrow P_2$ por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + a_2x^2$. Calcule A_T y úsela para encontrar el núcleo y la imagen de T.

Solución Usando las bases estándar $B_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ en P_3 y $B_2 = \{1, x, x^2\}$ en P_2, de inmediato se ve que $(T(1))_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(T(x))_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(T(x^2))_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $(T(x^3))_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, por lo que

$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es evidente que $\rho(A) = 2$ y una base para R_A es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de manera que imagen T = gen $\{1, x^2\}$. Entonces, $\nu(A) = 4 - 2 = 2$, y si $A_T \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$. Por lo tanto a_0 y a_3 son arbitrarios y $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para N_A de manera que $\{1, x^3\}$ es una base para nu T. ✦

En todos lo ejemplos de esta sección se ha obtenido la matriz A_T usando la base estándar en cada espacio vectorial. No obstante, el teorema 3 se cumple para cualesquiera bases en V y W. El siguiente ejemplo ilustra esto.

EJEMPLO 8 **Representación matricial relativa a dos bases no estándar en $\mathbb{R}^2$** Defina T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$. Usando las bases $B_1 = B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, calcule A_T.

Solución Se tiene $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$. Como $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, se encuentra que $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$. De manera similar, $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} = 17\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ por lo que $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$. Así, $A_T = \begin{pmatrix} -6 & 17 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Para calcular, por ejemplo, $T\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ primero se escribe $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} = -13\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, de manera que $\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} -13 \\ -3 \end{pmatrix}$. Entonces $\left(T\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} \right)_{B_2} = A_T\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}_{B_1} = A_T\begin{pmatrix} -13 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 17 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -13 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 8 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $T\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} = 27\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix}$. Observe que $T\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 7 \\ -4 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix}$, los que verifica los cálculos.

Para evitar confusión, a menos que se establezca otra cosa explícitamente, siempre se calculará la matriz A_T respecto a la base canónica.† Si $T: V \to V$ es una transformación lineal y se usa alguna otra base B, entonces se hará referencia a A_T como *la matriz de transformación de T respecto a la base B*. Así en el último ejemplo, $A_T = \begin{pmatrix} -6 & 17 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ es la matriz de transformación de T respecto a la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Antes de terminar esta sección, debe responderse una pregunta obvia. ¿Para qué molestarse en usar otra base que no sea la estándar cuando los cálculos son, como en el ejemplo 8, bastante más complicados? La respuesta es que con frecuencia es posible encontrar una base B^* en $\mathbb{R}^n$ para la que la matriz de transformación respecto a B^* es una matriz diagonal. Es muy sencillo trabajar con matrices diagonales, como se verá en el capítulo 6, existen muchas ventajas al escribir una matriz en forma diagonal.

EJEMPLO 9 **La representación matricial de una transformación lineal respecto a dos bases no estándar en $\mathbb{R}^2$ puede ser diagonal** Defina $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x + 10y \\ -15x - 13y \end{pmatrix}$. Encuentre A_T respecto a las bases $B_1 = B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$.

Solución $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$. Entonces $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, así $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. De manera similar, $\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, así $\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Por lo tanto $A_T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Existe otra manera de resolver este problema. Los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ se expresan en términos de la base estándar $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Esto es $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ es la matriz cuyas primera y segunda columnas representan las expansiones de los vectores en B_1 en términos de la base estándar. A partir del procedimiento descrito en la página 377, la matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz de transición de S a B_1. De manera similar, la matriz A es la matriz de transición de B_1 a S (vea el problema 4.8.38, página 385). Ahora suponga que $\mathbf{x}$ está

† Esto es, en cualquier espacio en el que se haya definido la base estándar.

expresada en términos de B_1. Entonces $A\mathbf{x}$ es el mismo vector ahora escrito en términos de S. Sea $C=\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -15 & -13 \end{pmatrix}$. Entonces $CA\mathbf{x} = T(A\mathbf{x})$ es la imagen de $A\mathbf{x}$ escrita en términos de S. Por último, como se busca $T(A\mathbf{x})$ en términos de B_1 (ése era el problema), se premultiplica por la matriz de transición A^{-1} para obtener $(T\mathbf{x})_{B_1} = (A^{-1}CA)(\mathbf{x})_{B_1}$. Es decir,

$$A_T = A^{-1}CA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -15 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

como antes. Este resultado se resume a continuación. ◆

TEOREMA 5 Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Suponga que C es la matriz de transformación de T respecto a las bases estándar S_n y S_m en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Sea A_1 la matriz de transición de B_1 a la base S_n en $\mathbb{R}^n$ y sea A_2 la matriz de transición de B_2 a la base S_m en $\mathbb{R}^m$. Si A_T denota la matriz de transformación de T respecto a las bases B_1 y B_2, entonces

$$\boxed{A_T = A_2^{-1}CA_1} \qquad (3)$$

◆

En el ejemplo 9 se vio que al observar la transformación lineal T respecto a la nueva base, la matriz de transformación A_T resulta ser una matriz diagonal. Se regresará a este procedimiento de "diagonalización" en la sección 6.3. Se verá que dada una transformación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, con frecuencia es posible encontrar una base B tal que la matriz de transformación de T respecto a B es diagonal.

Geometría de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$

Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal con representación matricial A_T. Ahora se demostrará que si A_T es invertible, entonces T se puede escribir como una sucesión de una o más transformaciones especiales, llamadas **expansiones**, **compresiones**, **reflexiones**, y **cortes**.

Expansiones a lo largo de los ejes x o y. Una **expansión a lo largo del eje x** es una transformación lineal que multiplica a la coordenada x de un vector en $\mathbb{R}^2$ por una constante $c > 1$. Esto es

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ y \end{pmatrix}$$

Entonces $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, de manera que si $A_T=\begin{pmatrix}c & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, se tiene

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cx\\y\end{pmatrix}$$

De manera similar, una **expansión a lo largo del eje *y*** es una transformación lineal que multiplica la coordenada y de todo vector en $\mathbb{R}^2$ por una constante $c > 1$. Como antes,

si $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\cy\end{pmatrix}$, entonces la representación matricial de T es $A_T=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & c\end{pmatrix}$ de manera que $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\cy\end{pmatrix}$.

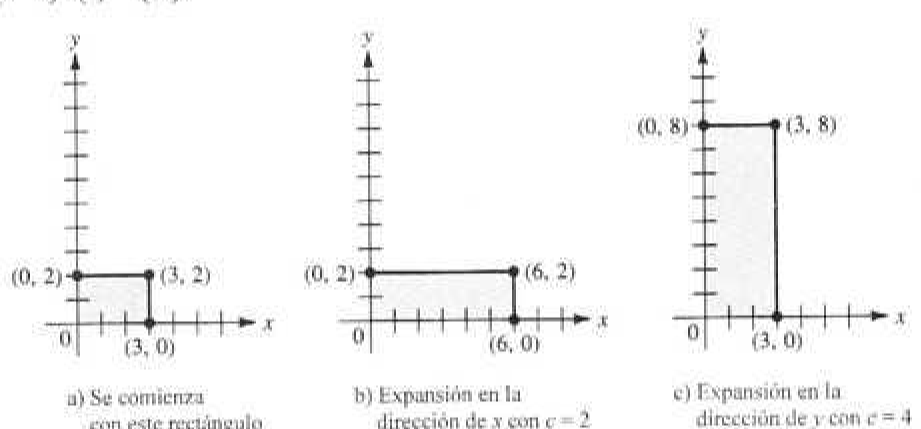


Figura 5.5 Dos expansiones

Compresión a lo largo de los ejes *x* o *y* Una **compresión** a lo largo de los ejes x o y es una transformación lineal que multiplica a la coordenada x o y de un vector en $\mathbb{R}^2$ por una constante positiva $c < 1$. La representación matricial de una compresión es la misma que para una expansión excepto que para la compresión $0 < c < 1$ mientras que para la expansión $c > 1$. En la figura 5.6 se ilustran dos compresiones.

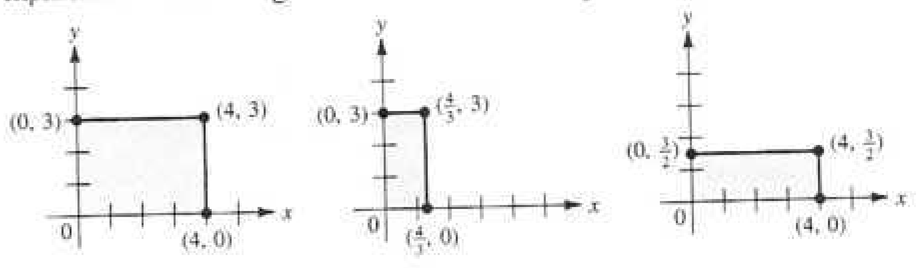


Figura 5.6 Dos compresiones

Reflexiones Existen tres tipos de reflexiones que serán de interés. En el ejemplo 5.1.1, página 465 se vio que la transformación

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

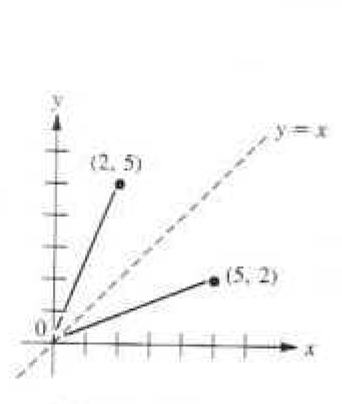
refleja al vector en $\mathbb{R}^2$ respecto al eje x (vea la figura 5.1). En el ejemplo 5.1.6, página 468, se vio que la transformación

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

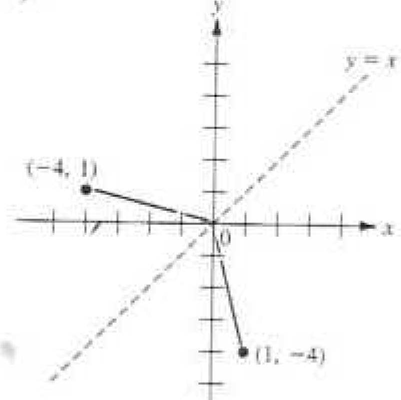
refleja al vector en $\mathbb{R}^2$ respecto al eje y (vea la figura 5.2). Ahora

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

de manera que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es la representación matricial de la reflexión respecto al eje x y $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la representación matricial de la reflexión respecto al eje y. Por último, el mapeo $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, que intercambia x y y, tiene el efecto de reflejar un vector en $\mathbb{R}^2$ **respecto a la recta** $y = x$ (vea la figura 5.7).



a) (2, 5) se obtiene reflejando (5, 2) respecto a la recta $y = x$

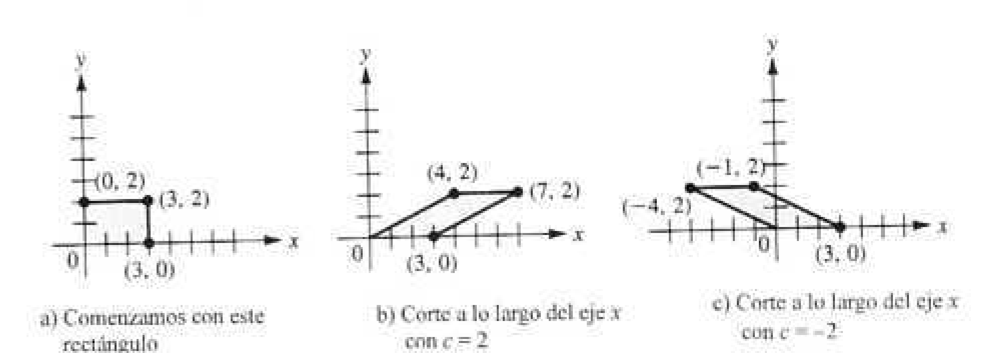


b) (1, −4) se obtiene reflejando (−4, 1) respecto a la recta $y = x$

Figura 5.7 Reflexión de un vector en $\mathbb{R}^2$ respecto a la recta $y = x$

Si $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, entonces $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, de manera que la representación matricial de la transformación lineal que refleja a un vector en $\mathbb{R}^2$ respecto a la recta $y = x$ es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cortes. Un **corte a lo largo del eje x** es una transformación que toma al vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y lo convierte en un nuevo vector $\begin{pmatrix} x + cy \\ y \end{pmatrix}$, donde c es una constante que puede ser positiva o negativa. En la figura 5.8 se ilustran dos cortes a lo largo del eje x.



a) Comenzamos con este rectángulo

b) Corte a lo largo del eje x con $c = 2$

c) Corte a lo largo del eje x con $c = -2$

Figura 5.8 Dos cortes a lo largo del eje x

Sea T un corte a lo largo del eje x. Entonces

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + c \cdot 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$$

de manera que la representación matricial T es $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por ejemplo, en la figura 5.8b, $c = 2$, así

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A_T\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En la figura 5.8c, $c = -2$, así, $A_T\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

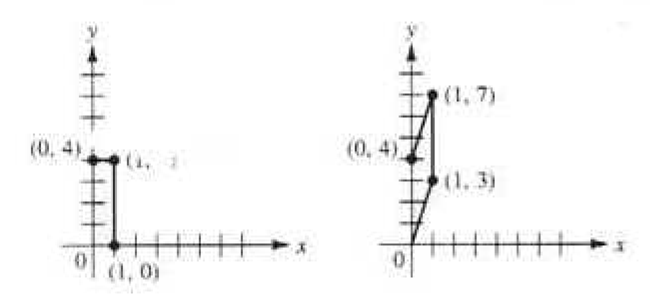
$$A_T\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y

$$A_T\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

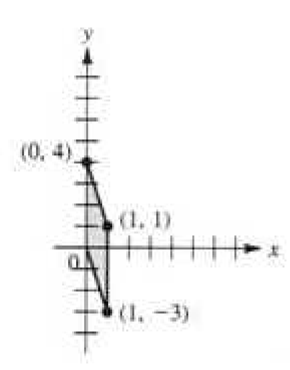
Observe que $A_T\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es decir, un corte a lo largo del eje x deja sin cambio a los vectores con coordenada y igual a cero.

Un **corte a lo largo del eje** y es una transformación que toma a un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y lo convierte en un nuevo vector $\begin{pmatrix} x \\ y + cx \end{pmatrix}$, donde c es una constante que puede ser positiva o negativa. En la figura 5.9 se ilustran dos cortes a lo largo del eje y.



a) Se comienza con este rectángulo

b) Corte a lo largo del eje y con $c = 3$



c) Corte a lo largo del eje y con $c = -3$

Figura 5.9 Dos cortes a lo largo del eje y

Si T es un corte a lo largo del eje y, entonces

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de manera que $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$. Por ejemplo, en la figura 5.9b, $c = 3$, así

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_T\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

En la figura 5.9*c*, $c = -3$, así

$$A_T\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$$

Observe que $A_T\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$. Esto es, los cortes a lo largo del eje y dejan sin cambio a los vectores con coordenadas x igual a cero.

En la tabla 5.1 se resumen estos tipos de transformaciones lineales.

Tabla 5.1 Transformaciones lineales especiales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$

Transformación	Representación matricial de la transformación: A_T
Expansión a lo largo del eje x	$\begin{pmatrix}c&0\\0&1\end{pmatrix}, c>1$
Expansión a lo largo del eje y	$\begin{pmatrix}1&0\\0&c\end{pmatrix}, c>1$
Compresión a lo largo del eje x	$\begin{pmatrix}c&0\\0&1\end{pmatrix}, 0<c<1$
Compresión a lo largo del eje y	$\begin{pmatrix}1&0\\0&c\end{pmatrix}, 0<c<1$
Reflexión respecto a la recta $y=x$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
Reflexión respecto al eje x	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
Reflexión respecto al eje y	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$
Corte a lo largo del eje x	$\begin{pmatrix}1&c\\0&1\end{pmatrix}$
Corte a lo largo del eje y	$\begin{pmatrix}1&0\\c&1\end{pmatrix}$

En la sección 1.10 se estudiaron las matrices elementales. La multiplicación de una matriz por una matriz elemental tiene el efecto de realizar una operación elemental con renglones en esa matriz. La tabla 5.2 enumera las matrices elementales en $\mathbb{R}^2$.

Tabla 5.2 Matrices elementales en $\mathbb{R}^2$

Operación elemental con renglones	Matriz elemental	Ilustración
$R_1 \to cR_1$	$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cx & cy \\ z & w \end{pmatrix}$
$R_2 \to cR_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ cz & cw \end{pmatrix}$
$R_1 \to R_1 + cR_2$	$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+cz & y+cw \\ z & w \end{pmatrix}$
$R_2 \to R_2 + cR_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ z+cx & w+cy \end{pmatrix}$
$R_1 \rightleftarrows R_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z & w \\ x & y \end{pmatrix}$

TEOREMA 6 Toda matriz elemental E de 2×2 es uno de los siguientes:

i. la representación matricial de una expansión a lo largo del eje x o y

ii. La representación matricial de una compresión a lo largo del eje x o y

iii. La representación matricial de una reflexión respecto a la recta $y = x$

iv. La representación matricial de un corte a lo largo del eje x o y

v. La representación matricial de una reflexión respecto del eje x o y

vi. El producto de la representación matricial de una reflexión respecto al eje x o y y la representación matricial de una expansión o compresión.

Demostración Se hará referencia a las tablas 5.1 y 5.2.

Caso 1: $E=\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c > 0$

Ésta es la representación matricial de una expansión a lo largo del eje x si $c > 1$ o una compresión a lo largo del eje x si $0 < c < 1$.

Caso 2: $E=\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c < 0$

Caso 2a: $c = -1$

Entonces $E=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que es la representación matricial de una reflexión respecto al eje y.

Caso 2b: $c < 0, c \neq -1$.

Entonces $-c > 0$ y

$$E=\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es el producto de la representación matricial de una reflexión respecto al eje y y la representación matricial de una expansión (si $-c > 1$) o compresión (si $0 < -c < 1$) a lo largo del eje x.

Caso 3: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $c > 0$ — Lo mismo que el caso 1 con el eje y en lugar del eje x.

Caso 4: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $c < 0$ — Lo mismo que el caso 2 con los ejes intercambiados.

Caso 5: $E = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — Ésta es la representación matricial de un corte a lo largo del eje x.

Caso 6: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ — Ésta es la representación matricial de un corte a lo largo del eje y.

Caso 7: $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ — Ésta es la representación matricial de una reflexión respecto a la recta $y = x$. ◆

En el teorema 1.10.3, página 130, se demostró que toda matriz invertible se puede expresar como el producto de matrices elementales. En el teorema 6 se demostró que toda matriz elemental en $\mathbb{R}^2$ se puede expresar como el producto de representaciones matriciales de expansiones, compresiones, cortes y reflexiones. Por esto, se tiene el siguientes resultado.

TEOREMA 7 Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que su representación matricial es invertible. Entonces T se puede obtener como una sucesión de expansiones, compresiones, cortes y reflexiones. ◆

Nota. Por el teorema de resumen en la página 360, A_T es invertible si y sólo si $\rho(A_T) = 2$. Pero por el teorema 4, $\rho(A_T) = \rho(T)$. Esto significa que A_T es invertible respecto a todas las bases en $\mathbb{R}^2$ o no es invertible respecto a ninguna.

EJEMPLO 10 **Descomposición de una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ en una sucesión de expansiones, compresiones, cortes y reflexiones** Considere la transformación $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con representación matricial $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Usando la técnica de la sección 1.10 (vea el ejemplo 3 de la página 131), A_T se puede escribir como el producto de tres matrices elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Ahora

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ representa un corte a lo largo del eje y (con $c = 3$)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ representa un corte a lo largo del eje x (con $c = 2$)

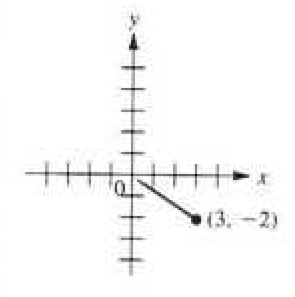
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ representa una expansión a lo largo del eje y (con $c = 2$) seguida de una reflexión respecto al eje x.

Así, para aplicar T a un vector en $\mathbb{R}^2$, se tiene que

i. Cortar a lo largo del eje x con $c = 2$.
ii. Expandir a largo del eje y con $c = 2$.
iii. Reflejar respecto al eje x.
iv. Cortar a lo largo del eje y con $c = 3$.

Observe que estas operaciones se realizan en el orden inverso en que se escriben las matrices en (4).

Para ilustrar esto, suponga que $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.



a) Se comienza con ese vector

Entonces

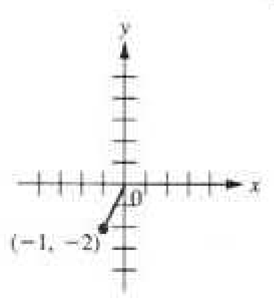
$$T\mathbf{v} = A_T\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Usando las operaciones (i) a (iv) se tiene

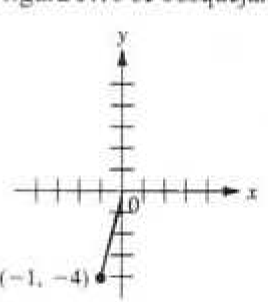
$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Corte}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Expansión}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Reflexión}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Corte}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

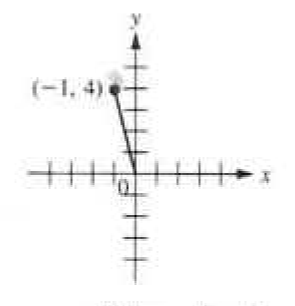
En la figura 5.10 se bosquejan estos pasos.



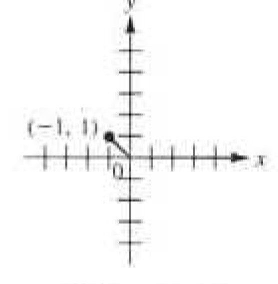
b) Vector obtenido por el corte a lo largo del eje x con $c = 2$



c) Vector obtenido al expandir a lo largo del eje y con $c = 2$



d) Vector obtenido al reflejar respecto al eje x



e) Vector obtenido por el corte a lo largo del eje y con $c = 3$

Figura 5.10 Descomposición de la transformación lineal $T\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en una sucesión de cortes, expansiones y reflexiones. ✦

PROBLEMAS 5.3

Autoevaluación

I. Si $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la transformación lineal $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -x \\ y \end{pmatrix}$, entonces $A_T =$

a. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

II. _____ representa(n) una expansión a lo largo del eje y.

a. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

III. _____ representa(n) un corte a lo largo del eje x.

a. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **e.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **f.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

En los problemas 1 al 30 encuentre la representación matricial A_T de la transformación lineal T, nu T, imagen T, $\nu(T)$ y $\rho(T)$. A menos que se especifique otra cosa, suponga que B_1 y B_2 son bases canónica.

1. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ -x + y \end{pmatrix}$

2. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$

3. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ -2x + 2y - 2z \end{pmatrix}$

4. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$

5. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 3x + y + 4z \\ 5x - y + 8z \end{pmatrix}$

6. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y + z \\ 2x - 4y - 2z \\ -3x + 6y + 3z \end{pmatrix}$

Respuestas a la autoevaluación

I. b **II.** c **III.** c, d

7. $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z + 3w \\ y + 4z + 3w \\ x + 6z + 6w \end{pmatrix}$

8. $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z + w \\ -x + z + 2w \\ x - 2y + 5z + 4w \\ 2x - y + z - w \end{pmatrix}$

9. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}$; $B_1 = B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

10. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$; $B_1 = B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

11. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ y - 3z \end{pmatrix}$;

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \; B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

12. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + y \\ y \end{pmatrix}$; $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$; $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

13. $T: P_2 \rightarrow P_3$; $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 - a_2x + a_0x^3$

14. $T: \mathbb{R} \rightarrow P_3$; $T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$

15. $T: P_3 \rightarrow \mathbb{R}$; $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_2$

16. $T: P_3 \rightarrow P_1$; $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (a_1 + a_3)x - a_2$

17. $T: P_3 \rightarrow P_2$; $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (a_0 - a_1 + 2a_2 + 3a_3) + (a_1 + 4a_2 + 3a_3)x + (a_0 + 6a_2 + 5a_3)x^2$

18. $T: M_{22} \rightarrow M_{22}$; $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b + 2c + d & -a + 2c + 2d \\ a - 2b + 5c + 4d & 2a - b + c - d \end{pmatrix}$

19. $T: M_{22} \rightarrow M_{22}$; $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + c + d & a + b + c \\ a + b & a \end{pmatrix}$

20. $T: P_2 \rightarrow P_3$; $T[p(x)] = xp(x)$; $B_1 = \{1, x, x^2\}$; $B_2 = \{1, (1 + x), (1 + x)^2, (1 + x)^3\}$

Cálculo **21.** $D: P_4 \rightarrow P_3$; $Dp(x) = p'(x)$

Cálculo **22.** $T: P_4 \rightarrow P_4$; $Tp(x) = xp'(x) - p(x)$

* **Cálculo** **23.** $D: P_n \rightarrow P_{n-1}$; $Dp(x) = p'(x)$

Cálculo **24.** $D: P_4 \rightarrow P_2$; $Dp(x) = p''(x)$

* **Cálculo** **25.** $T: P_4 \rightarrow P_4$; $Tp(x) = p''(x) + xp'(x) + 2p(x)$

* **Cálculo** **26.** $D: P_n \rightarrow P_{n-k}$; $Dp(x) = p^{(k)}(x)$

* **Cálculo** **27.** $T: P_n \rightarrow P_n$; $Tp(x) = x^np^{(n)}(x) + x^{n-1}p^{(n-1)}(x) + \cdots + xp'(x) + p(x)$

Cálculo **28.** $J: P_n \rightarrow \mathbb{R}$; $Jp = \int_0^1 p(x)\,dx$

29. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2$; $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + bx + cx^2$

30. $T: P_3 \to \mathbb{R}^3$; $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_3 - a_2 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 - a_1 \end{pmatrix}$

31. Defina $T: M_{mn} \to M_{nm}$ por $TA = A^t$. Encuentre A_T respecto a las bases canónica en M_{mn} y M_{nm}.

*32. Defina $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + iy \\ (1+i)y - x \end{pmatrix}$. Encuentre A_T.

Cálculo 33. Sea V = gen {1, sen x, cos x}. Encuentre A_D, donde $D: V \to V$ está definida por $Df(x) = f'(x)$. Encuentre imagen D y nu D.

Cálculo 34. Conteste las preguntas del problema 33 dado V = gen $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$.

35. Defina $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ por $T\mathbf{x} = \text{proy}_H\, \mathbf{x}$, donde $H = \text{gen}\{(1/\sqrt{2})(1, i)\}$. Encuentre A_T.

36. Demuestre el teorema 2.

37. Demuestre el teorema 4.

En los problemas 38 al 45 describa en palabras las transformaciones lineales $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tienen la representación matricial A_T.

38. $A_T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

39. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

40. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

41. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

42. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

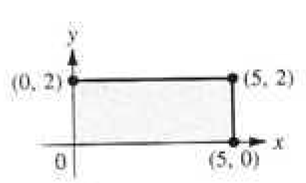
43. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

44. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

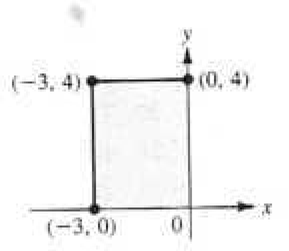
45. $A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

En los problemas 46 al 55 escriba la representación matricial de 2×2 de la transformación lineal dada y bosqueje la región obtenida al aplicar esa transformación al rectángulo dado.

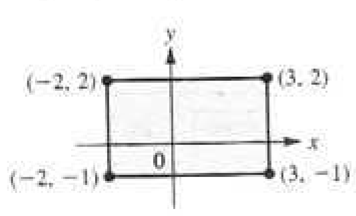
46. Expansión a lo largo del eje y con $c = 2$



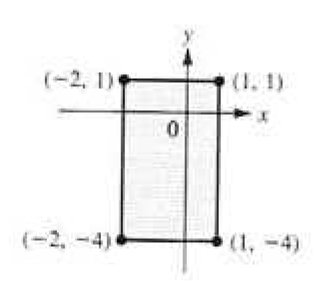
47. Compresión a lo largo del eje x con $c = \frac{1}{4}$



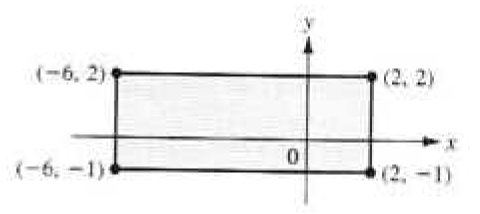
48. Corte a lo largo del eje x con $c = -2$



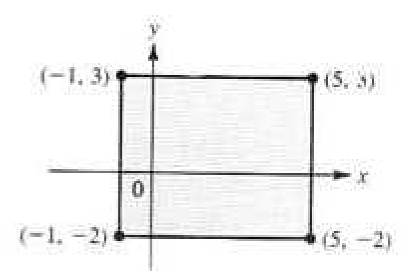
49. Corte a lo largo del eje y con $c = 3$



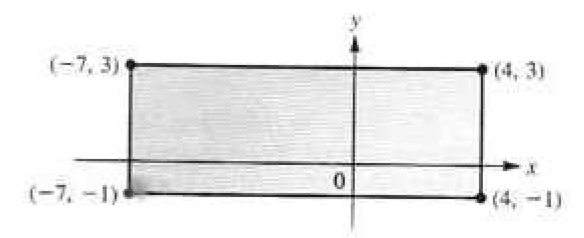
50. Corte a lo largo del eje y con $c = -\frac{1}{2}$



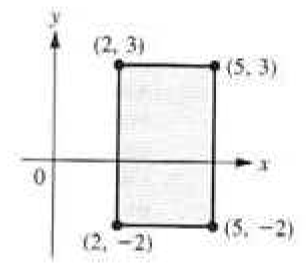
51. Corte a lo largo del eje x con $c = \frac{1}{3}$



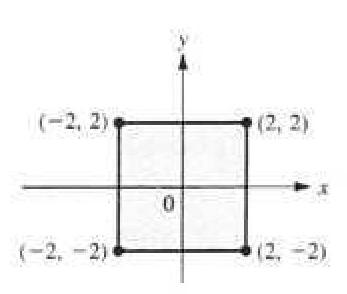
52. Reflexión respecto al eje x



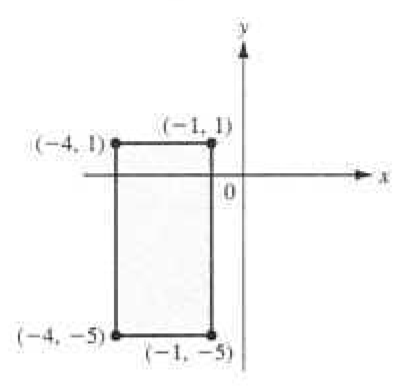
53. Reflexión respecto al eje y



54. Reflexión respecto a la recta $y = x$



55. Reflexión respecto a la recta $y = x$



En los problemas 56 al 63 exprese cada transformación lineal con matriz de transformación dada A_T, como una secesión de expansiones, compresiones, reflexiones y cortes.

56. $A_T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ **57.** $A_T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ **58.** $A_T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

59. $A_T = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ **60.** $A_T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **61.** $A_T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

62. $A_T = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$ **63.** $A_T = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

MATLAB 5.3

M En los problemas de esta sección se hace referencia al archivo *grafics* de MATLAB; se supone que trabajó los problema de MATLAB 5.1.

1. Considere el rectángulo en la figura 5.8a). Desarrolle una matriz de puntos y líneas para él.
   a. Sea T la transformación que expande a lo largo de eje y por un factor de 3 y comprime a lo largo del eje x por un factor de $\frac{1}{2}$. Encuentre su representación matricial y, sobre los mismos ejes, grafique el rectángulo original y su imagen transformada usando el archivo *grafics*.
   b. Usando las representaciones adecuadas y el archivo *grafics*, reproduzca las imágenes de las transformaciones de corte en las figuras 5.8b) y 5.8c).
   c. Con la representación matricial correcta y el archivo *grafics*, en los mimos ejes coordenados, grafique el rectángulo original y la imagen después de aplicar una transformación de corte a lo largo del eje y con $c = -2$.

2. La representación matricial de una composición de transformaciones lineales es el producto de las representaciones matriciales de las transformaciones individuales *en el orden adecuado*. Si $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con representación matricial A y $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con representación matricial B, entonces $T(S(\mathbf{x})) = AB\mathbf{x}$.
   a. (*Lápiz y papel*) Encuentre la matriz R que representa la rotación positiva (sentido contrario a las manecillas del reloj) alrededor del origen, un ángulo $\pi/2$ y la matriz E que representa la expansión a lo largo del eje x por un factor de 2.
   b. Introduzca las matrices de puntos y líneas para la figura dada en el problema 1a) de MATLAB 5.1. Usando el archivo *grafics*, en los mismos ejes, grafique la figura, la imagen de la figura después de rotar primero y luego expandir, y la imagen de la figura después de expandir primero y luego rotar. Utilice un color diferente y (símbolo para el punto) para cada gráfica. Necesitará la instrucción de **hold on** después de cada llamada a *grafics*. Tendrá que ajustar el parámetro M al llamar *grafics* hasta que las tres figuras se ajusten bien en la pantalla. No guarde esta gráfica. Lo que importa es encontrar la M adecuada.

   Con esa M encontrada, en el mismo conjunto de ejes, grafique la figura y la imagen de la rotación primero y después la expansión. Etiquete esta gráfica, asegurándose de decir qué imágenes se graficaron. [Use la ayuda para explorar los comandos **title** (título), **xlabel** (etiqueta x) y **ylabel** (etiqueta y).] Repita para la figura y la imagen con la expansión primero y la rotación después.

   Describa la comparación entre las dos gráficas. Explique al menos una característica de la geometría de las gráficas que permita saber qué tipo de transformación se realizó primero.

3. **Proyecciones** Sea $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbb{R}^n$ con longitud 1. Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$T(\mathbf{x}) = \text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{x} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})\mathbf{v}$$

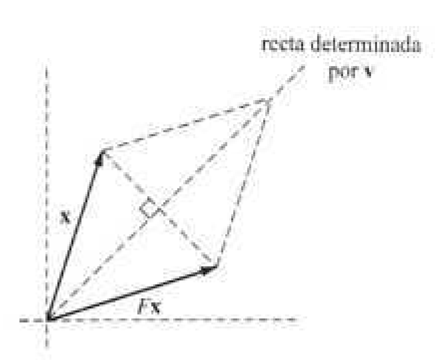
   a. (*Lápiz y papel*) Demuestre que T es lineal. Demuestre que la representación matricial, P, de T (respecto a la base canónica), está dada por

$$P = (v_1\mathbf{v} \quad v_2\mathbf{v} \quad \cdots \quad v_n\mathbf{v})$$

   Aquí v_i se refiere a la componente i de $\mathbf{v}$. Recuerde que se ha supuesto que $\mathbf{v}$ tiene longitud 1.
   b. Suponga que $\mathbf{v}$ es un vector de longitud 1 en $\mathbb{R}^2$ dado por $\mathbf{v} = (1 \quad 0)^t$.
      i. Utilice el archivo *grafics* para encontrar la matriz P que representa la proyección sobre $\mathbf{v}$. Introduzca las matrices de puntos y líneas del problema 1a) de MATLAB 5.1. Sobre el mismo conjunto de ejes, grafique la figura original y la imagen de la figura después de aplicar la transformación P. Use colores y/o símbolos distintos. Para cada punto clave en la figura original, identifique el punto de su imagen después de aplicar la transformación. Haga lo mismo para dos de los segmentos de recta de la figura original.
      ii. (*Lápiz y papel*) Utilice P para encontrar una base para el núcleo y la imagen de la transformación. Describa la forma en que la geometría de la proyección sobre $\mathbf{v}$ explica estos resultados.
   c. Repita las instrucciones del inciso b) para el vector $\mathbf{v}$ de longitud 1 en la dirección de $\mathbf{w} = (1 \quad 1)^t$. (Para encontrar $\mathbf{v}$, divida $\mathbf{w}$ entre su longitud.)
   d. Repita las instrucciones del inciso b) para el vector $\mathbf{v}$ de longitud 1 en la dirección de $\mathbf{w} = (-1 \quad 1)^t$.
   e. Repita los incisos b) a d) para una figura creada por usted.

4. **Reflexiones** Sea **v** un vector en $\mathbb{R}^2$ de longitud 1. La transformación que refleja un vector dado **x** en $\mathbb{R}^2$ a través de la recta determinada por **v** es una transformación lineal. Por lo tanto, tiene una representación matricial. Se llamará F a esta representación.

   a. (*Lápiz y papel*) Explique por qué $2\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{x} = \mathbf{x} + F\mathbf{x}$, usando el siguiente diagrama. Con esto, dé un razonamiento de por qué $F = 2P - I$, donde P es la representación matricial de la proyección sobre **v** e I es la matriz identidad de 2×2.



   b. Encuentre la matriz F, como en el análisis anterior, representando la transformación de la reflexión al otro lado del eje x. Aquí $\mathbf{v} = (1 \;\; 0)^t$.

   Use la matriz de puntos y líneas del problema 1a) de MATLAB 5.1 y el archivo *grafics* para dibujar, en los mismos ejes, la figura original y su imagen después de aplicar la reflexión dada. Para cada punto clave en la figura original, identifique su imagen bajo la transformación. Haga lo mismo para dos segmentos de recta de la figura original. Verifique que las imágenes son las reflexiones dadas de los segmentos originales.

   c. Repita las instrucciones del inciso b) para la reflexión respecto a la recta $y = -x$. Aquí el vector **v** es el vector de longitud 1 en la dirección de $\mathbf{w} = (-1 \;\; 1)^t$.

   d. Repita los incisos b) y c) para una figura creada por usted.

PROBLEMA PROYECTO

5. Cree un diseño o una figura usando una o dos figuras originales y aplicándoles varias transformaciones. Utilice *grafics* y la instrucción **hold on**. (Necesitará dar el comando **hold on** después de cada llamado a *grafics* ya que el archivo incluye un comando final de **hold off**.)

   Si grafica una figura transformada que decide desechar, la puede "borrar" volviendo a graficarla usando la opción de color invisible **'i'** al llamar *grafics*. Un problema, sin embargo, es que puede borrar partes de las líneas de otras figuras que sí quiera conservar. Si es así, simplemente vuelva a graficar las que quiera conservar que fueron afectadas.

   Si desea trasladar una figura a unidades en el la dirección x y b unidades en la dirección y y tiene n puntos, utilice la matriz de puntos dada por **newpts = pts + [a*ones(1,n); b*ones(1,n)]**, donde *pts* es la matriz de puntos original para la figura.

6. Sea $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal definida por

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\7\\2\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\6\\-2\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}3\\2\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\4\end{pmatrix},\qquad T\begin{pmatrix}4\\2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\17\\-10\end{pmatrix}$$

a. Verifique que el siguiente conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es una base para $\mathbb{R}^4$ y por lo tanto T está bien definida.

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

b. Encuentre la representación matricial, C, de T respecto a las bases canónica. Recuerde que necesita encontrar $T(\mathbf{e}_i)$ para $i = 1, \ldots, 4$ y que $T(\mathbf{e}_i)$ es una combinación lineal de $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_4)\}$, donde los coeficientes de las combinaciones lineales son las coordenadas de $\mathbf{e}_i$ respecto a la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.

c. Sea A la matriz $[\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \ \mathbf{v}_3\ \ \mathbf{v}_4]$ y sea B la matriz cuyas columnas son los lados derechos de la igualdades en la definición de T; es decir,

$$B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 5\\-1 & 0 & -1 & 1\\7 & 6 & 1 & 17\\2 & -2 & 4 & -10\end{pmatrix}.$$

Verifique que la representación matricial, C, de la transformación T satisface $C = BA^{-1}$. Explique por qué esto es cierto usando los conceptos de coordenadas y matrices de transición.

d. Usando C, encuentre una base para el núcleo y la imagen de T.

7. Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación definida por una rotación *negativa* de $\pi/4$ respecto al origen, después una expansión a lo largo del eje x por un factor de 2 y una expansión a lo largo del eje y por un factor de 3, seguidas de una rotación *positiva* de $\pi/4$ respecto al origen.

a. Encuentre la representación matricial de T respecto a la base canónica.

b. Encuentre la representación matricial de T respecto a la base.

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

c. Explique la manera en que se puede describir la geometría de T únicamente en términos de expansiones en ciertas direcciones.

5.4 ISOMORFISMOS

En esta sección se introduce una terminología importante y después se demuestra un teorema que dice que todos los espacios vectoriales de n dimensiones son "en esencia" el mismo.

DEFINICIÓN 1 **Transformación uno a uno** Sea $T: V \rightarrow W$ es una transformación lineal; entonces T es **uno a uno**, escrito 1-1, si

$$T\mathbf{v}_1 = T\mathbf{v}_2 \text{ implica que } \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \quad \textbf{(1)}$$

Es decir, T es 1-1 si y sólo si todo vector $\mathbf{w}$ en la imagen de T es la imagen de exactamente un vector en V.

Nota. Una transformación 1-1 se llama también **inyectiva**.

TEOREMA 1 Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces T es 1-1 si y sólo si nu $T = \{\mathbf{0}\}$.

Demostración Suponga que nu $T = \{\mathbf{0}\}$ y $T\mathbf{v}_1 = T\mathbf{v}_2$. Entonces $T\mathbf{v}_1 - T\mathbf{v}_2 = T(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$, lo que significa que $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \in$ nu $T = \{\mathbf{0}\}$. Así, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, por lo tanto $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, los que muestra que T es 1-1. Ahora se probará que si T es 1-1, entonces nu $T = \{\mathbf{0}\}$. Suponga que T es 1-1 y $\mathbf{v} \in$ nu T. Entonces $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Pero también $T\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Así, como T es 1-1, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Esto completa la prueba. ◆

EJEMPLO 1 **Una transformación 1-1 de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$** Defina $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + y \end{pmatrix}$. Es sencillo encontrar $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\rho(A_T) = 2$; así, $\nu(A_T) = 0$ y $N_{A_T} =$ nu $T = \{\mathbf{0}\}$. Por lo tanto T es 1-1. ◆

EJEMPLO 2 **Una transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que no es 1-1** Defina $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x - 2y \end{pmatrix}$. Entonces $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\rho(A_T) = 1$ y $\nu(A_T) = 1$; por lo tanto, $\nu(T) = 1$ y T no es 1-1. Observe, por ejemplo, que $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} = T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ◆

DEFINICIÓN 2 **Transformación sobre** Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces se dice que T es **sobre** W o simplemente **sobre**, si para todo $\mathbf{w} \in W$ existe al menos una $\mathbf{v} \in V$ tal que $T\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Es decir, *T es sobre W si y sólo si imagen $T = W$.*

Nota. Una transformación sobre se llama también **suprayectiva**.

EJEMPLO 3 **Cómo determinar si una transformación es sobre** En el ejemplo 1, $\rho(A_T) = 2$; entonces imagen $T = \mathbb{R}^2$ y T es sobre. En el ejemplo 2, $\rho(A_T) = 1$ e imagen $T =$ gen $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \neq \mathbb{R}^2$; por lo tanto, T no es sobre. ◆

TEOREMA 2 Sea $T: V \to W$ una transformación lineal y suponga que dim V = dim $W = n$.

i. Si T es 1-1 entonces T es sobre.
ii. Si T es sobre, entonces T es 1-1.

Demostración Sea A_T una representación matricial de T. Entonces si T es 1-1, nu $T = \{\mathbf{0}\}$ y $\nu(A_T) = 0$, lo que significa que $\rho(T) = \rho(A_T) = n - 0 = n$ de manera que imagen $T = W$. Si T es sobre, entonces $\rho(A_T) = n$, por lo tanto $\nu(T) = \nu(A_T) = 0$ y T es 1-1. ◆

TEOREMA 3 Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. suponga que dim $V = n$ y dim $W = m$. Entonces

i. Si $n > m$, T no es 1-1
ii. Si $m > n$, T no es sobre.

Demostración

i. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para V. Sea $\mathbf{w}_i = T\mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y observe el conjunto $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$. Como $m = \dim W < n$, el conjunto S es linealmente dependiente. Así, existen escalares, no todos cero, tales que $c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0}$. Sea $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$. Como los elementos $\mathbf{v}_i$ son linealmente independientes y como no todos los coeficientes c_i son cero, se ve que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Pero $T\mathbf{v} = T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1T\mathbf{v}_1 + c_2T\mathbf{v}_2 + \cdots + c_nT\mathbf{v}_n = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0}$. Por lo tanto, $\mathbf{v} \in$ nu T y nu $T \neq \{\mathbf{0}\}$.
ii. Si $\mathbf{v} \in V$, entonces $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ para algunos escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $T\mathbf{v} = a_1T\mathbf{v}_1 + a_2T\mathbf{v}_2 + \cdots + a_nT\mathbf{v}_n = a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + \cdots + a_n\mathbf{w}_n$. Así, $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\} = \{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, \ldots, T\mathbf{v}_n\}$ genera a la imagen de T. Entonces, del problema 4.6.29, página 346, $\rho(T) = \dim$ imagen $T \leq n$. Como $m > n$, esto muestra que imagen $T \neq W$. Entonces T no es sobre. ◆

EJEMPLO 4 **Una transformación de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ no es 1-1** Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Aquí $n = 3$ y $m = 2$, de manera que T no es 1-1. Para ver esto, observe que

$$T\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Es decir, dos vectores diferentes en $\mathbb{R}^3$ tienen la misma imagen en $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 5 **Una transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ no es sobre** Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. En este caso $n = 2$ y $m = 3$, por lo que T no es sobre. Para demostrar esto, debe encontrarse un vector en $\mathbb{R}^3$ que no esté en la imagen de T. Un ejemplo de un vector así es $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Esto es, no existe un vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $T\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Esto se prueba suponiendo que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \\ 5x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Reduciendo por renglones se tiene

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La última línea se lee $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$, por lo tanto, el sistema es inconsistente y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ no está en la imagen de T. ◆

DEFINICIÓN 3 **Isomorfismo** Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces T es un **isomorfismo** si T es 1-1 y sobre.

Nota. Una transformación que es 1-1 y sobre se llama **biyectiva**.

DEFINICIÓN 4 **Espacios vectoriales isomorfos** Se dice que los espacios vectoriales V y W son isomorfos si existe un isomorfismo T de V sobre W. En este caso se escribe $V \cong W$.

Observación. La palabra "isomorfismo" viene del griego *isomorphos* que significa "de igual forma" (*iso* = igual; *morphos* = forma). Después de unos ejemplos se verá la relación tan cercana que tienen las "formas" de los espacios vectoriales isomorfos.

Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y sea A_T la representación matricial de T. Ahora bien, T es 1-1 si y sólo si nu $T = \{\mathbf{0}\}$, lo que se cumple si y sólo si $\nu(A_T) = 0$ si y sólo si det $A_T \neq 0$. Entonces se puede extender el teorema de resumen (visto por última vez en la página 360) en otra dirección.

TEOREMA 4 **Teorema de resumen (punto de vista 7)** Sea A una matriz de $n \times n$; entonces las 11 afirmaciones siguientes son equivalentes, es decir, cada una implica las otras 10 (de manera que si una es cierta, todas son ciertas):

i. A es invertible.

ii. La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para todo n-vector $\mathbf{b}$.

iv. A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n de $n \times n$.

v. A se puede escribir como el producto de matrices elementales.

vi. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii. Los renglones (y columnas) de A son linealmente independientes.

viii. $\det A \neq 0$.

ix. $\nu(A) = 0$.

x. $\rho(A) = n$.

xi. La transformación lineal T de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ definida por $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ es un isomorfismo. ✦

Ahora se verán algunos ejemplos de isomorfismos entre otros pares de espacios vectoriales.

EJEMPLO 6 **Un isomorfismo entre $\mathbb{R}^3$ y P_2** Defina $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2$ por $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + bx + cx^2$. Es sencillo verificar que T es lineal. Suponga que $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{0} = 0 + 0x + 0x^2$. Entonces $a = b = c = 0$. Es decir, nu $T = \{\mathbf{0}\}$ y T es 1-1. Si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, entonces $p(x) = T\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Esto significa que imagen $T = P_2$ y T es sobre. Por lo tanto, $\mathbb{R}^3 \cong P_2$. ✦

Nota. dim $\mathbb{R}^3$ = dim $P_2 = 3$. Entonces por el teorema 2, una vez que se sabe que T es 1-1, también se sabe que es sobre. Se verificó que era sobre, pero no era necesario hacerlo.

EJEMPLO 7 Cálculo **Un isomorfismo entre dos espacios vectoriales de dimensión infinita** Sea $V = \{f \in C^1[0, 1]: f(0) = 0\}$ y $W = C[0, 1]$. Sea $D: V \rightarrow W$ está dado por $Df = f'$. Suponga que $Df = Dg$. Entonces $f' = g'$ o $(f - g)' = 0$ y $f(x) - g(x) = c$, una constante. Pero

$f(0) = g(0) = 0$, de manera que $c = 0$ y $f = g$. Entonces D es 1-1. Sea $g \in C[0, 1]$ y sea $f(x) = \int_0^x g(t)\, dt$. Entonces, por el teorema fundamental de cálculo, $f \in C^1[0, 1]$ y $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Más aún, como $\int_0^0 g(t)\, dt = 0$, se tiene que $f(0) = 0$. Por lo tanto, para todo g en W existe una $f \in V$ tal que $Df = g$. Así, D es sobre y se ha demostrado que $V \cong W$. ✦

El siguiente teorema ilustra la similitud de dos espacios vectoriales isomorfos.

TEOREMA 5 Sea $T: V \rightarrow W$ un isomorfismo:

i. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ genera a V, entonces $T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, \ldots, T\mathbf{v}_n$ genera a W.

ii. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes en V, entonces $T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, \ldots, T\mathbf{v}_n$ son linealmente independientes en W.

iii. Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base en V, entonces $\{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, \ldots, T\mathbf{v}_n\}$ es una base en W.

iv. Si V tiene dimensión finita, entonces W tiene dimensión finita y $\dim V = \dim W$.

Demostración

i. Sea $\mathbf{w} \in W$. Entonces como T es sobre, existe un vector $\mathbf{v} \in V$ tal que $T\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Como los vectores $\mathbf{v}_i$ generan a V, se puede escribir $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ de manera que $\mathbf{w} = T\mathbf{v} = a_1T\mathbf{v}_1 + a_2T\mathbf{v}_2 + \cdots + a_nT\mathbf{v}_n$, y esto muestra que $\{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, \ldots, T\mathbf{v}_n\}$ genera a W.

ii. Suponga que $c_1T\mathbf{v}_1 + c_2T\mathbf{v}_2 + \cdots + c_nT\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. Entonces $T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$. Así, como T es 1-1, $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, lo que implica que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ ya que los vectores $\mathbf{v}_i$ son independientes.

iii. Esto se deduce de las partes *i*) y *ii*).

iv. Esto se deduce de la parte *iii*). ✦

En general es difícil demostrar que dos espacios vectoriales de dimensión infinita son isomorfos. Sin embargo, para los espacios de dimensión finita es sorprendentemente sencillo. El teorema 3 dice que si $\dim V \neq \dim W$, entonces V y W no son isomorfos. El siguiente teorema muestra que si $\dim V = \dim W$, y si V y W son espacios vectoriales reales, entonces V y W son isomorfos. Esto es,

Dos espacios reales de dimensión finita de la misma dimensión son isomorfos.

TEOREMA 6 Sean V y W dos espacios reales† de dimensión finita con $\dim V = \dim W$. Entonces $V \cong W$.

Demostración Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para V y sea $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ una base para W. Defina la transformación lineal T por

$$T\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

Por el teorema 5.2.2, página 478 existe exactamente una transformación lineal que satisface la ecuación (2). Suponga que $\mathbf{v} \in V$ y $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Entonces si $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$, se tiene que $T\mathbf{v} = c_1T\mathbf{v}_1 + c_2T\mathbf{v}_2 + \cdots + c_nT\mathbf{v}_n = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0}$. Pero como $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ son linealmente independientes, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Por lo tanto, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ y T es 1-1. Como V y W tienen dimensión finita y $\dim V = \dim W$, T es sobre por el teorema 2 y la prueba queda completa. ◆

Este último resultado es uno de los resultados esenciales en álgebra lineal. Dice que si se conoce un espacio real vectorial de dimensión n, se conocen todos los espacios vectoriales reales de dimensión n. Es decir, si se asocian todos los espacios vectoriales isomorfos, entonces $\mathbb{R}^n$ es el único espacio de dimensión n sobre los reales.

PROBLEMAS 5.4

Autoevaluación

Falso-verdadero

I. Una transformación lineal de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $n \neq m$ no puede ser 1-1 y sobre a la vez.

II. Si $\dim V = 5$ y $\dim W = 7$, es posible encontrar un isomorfismo T de V en W.

III. Si T es 1-1, entonces nu $T = \{\mathbf{0}\}$.

IV. Si T es un isomorfismo de un espacio vectorial V en $\mathbb{R}^6$, entonces $\rho(T) = 6$.

V. Si A_T es una matriz de transformación de un isomorfismo de $\mathbb{R}^8$ en $\mathbb{R}^8$, entonces $\det A_T \neq 0$.

Respuestas a la autoevaluación

I. V **II.** F **III.** V **IV.** V **V.** V

† Es necesaria la palabra "reales" porque es importante que los conjuntos de escalares en V y W sean el mismo. De otra manera, la condición $T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v}$ puede no cumplirse porque $\mathbf{v} \in V$, $T\mathbf{v} \in W$, y $\alpha\mathbf{v}$ o $\alpha T\mathbf{v}$ pueden no estar definidas. El teorema 6 es cierto si se omite la palabra "real" y en su lugar se imponen las condiciones de que V y W estén [illegible] (como $\mathbb{C}$ por ejemplo).

1. Demuestre que $T: M_{mn} \rightarrow M_{nm}$ definida por $TA = A^t$ es un isomorfismo.
2. Demuestre que $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo si y sólo si A_T es invertible.

*3. Sean V y W dos espacios vectoriales reales de dimensión n y sean B_1 y B_2 dos bases para V y W, respectivamente. Sea A_T la matriz de transformación relativa a las bases B_1 y B_2. Demuestre que $T: V \rightarrow W$ es un isomorfismo si y sólo si $\det A_T \neq 0$.

4. Encuentre un isomorfismo entre D_n, las matrices diagonales de $n \times n$ con elementos reales, y $\mathbb{R}^n$. [*Sugerencia:* Analice primero el caso $n = 2$.]
5. ¿Para qué valor de m es isomorfo a $\mathbb{R}^m$ el conjunto de matrices simétricas de $n \times n$?
6. Demuestre que el conjunto de matrices simétricas de $n \times n$ es isomorfo al conjunto de matrices triangulares superiores de $n \times n$.
7. Sea $V = P_4$ y $W = \{p \in P_5: p(0) = 0\}$. Demuestre que $V \cong W$.

Cálculo

8. Defina $T: P_n \rightarrow P_n$ por $Tp = p + p'$. Demuestre que T es un isomorfismo.
9. Encuentre una condición sobre los números m, n, p, q tales que $M_{mn} \cong M_{pq}$.
10. Demuestre que $D_n \cong P_{n-1}$.
11. Pruebe que cualesquiera espacios vectoriales complejos de dimensión finita V y W con $\dim V = \dim W$ son isomorfos.
12. Defina $T: C[0, 1] \rightarrow C[3, 4]$ por $Tf(x) = f(x - 3)$. Demuestre que T es un isomorfismo.
13. Sea B una matriz invertible de $n \times n$. Demuestre que $T: M_{nn} \rightarrow M_{nn}$ definida por $TA = AB$ es un isomorfismo.

Cálculo

14. Demuestre que la transformación $Tp(x) = xp'(x)$ no es un isomorfismo de P_n en P_n.
15. Sea H un subespacio del espacio V de dimensión finita con producto interno. Demuestre que $T: V \rightarrow H$ definida por $T\mathbf{v} = \text{proy}_H \mathbf{v}$ es sobre. ¿Bajo qué circunstancias será 1-1?
16. Demuestre que si $T: V \rightarrow W$ es un isomorfismo, entonces existe un isomorfismo $S: W \rightarrow V$ tal que $S(T\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Aquí S se llama **transformación inversa** de T y se denota por T^{-1}.
17. Demuestre que si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ está definido por $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ y si T es un isomorfismo, entonces A es invertible y la transformación inversa T^{-1} está dada por $T^{-1}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}$.
18. Encuentre T^{-1} para el isomorfismo del problema 7.

*19. Considere el espacio $C = \{z = a + ib$, donde a y b son números reales e $i^2 = -1\}$. Demuestre que si los escalares se toman como reales, entonces $C \cong \mathbb{R}^2$.

*20. Considere el espacio $\mathbf{C}_{\mathbb{R}}^n = \{(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n): \mathbf{c}_i \in C$ y los escalares son reales$\}$. Demuestre que $\mathbf{C}_{\mathbb{R}}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. [*Sugerencia:* vea el problema 19.]

MATLAB 5.4

1. Sea $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una transformación definida por $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ para $i = 1, \ldots, 4$, donde

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

a. Verifique que el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es una base para $\mathbb{R}^4$ y, por lo tanto, que T está bien definida.

b. Verifique que el conjunto $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ es una base para $\mathbb{R}^4$. ¿Por qué se puede concluir que T es un isomorfismo?

c. Encuentre la representación matricial, A, de T respecto a la base canónica. (Vea el problema 6 de MATLAB 5.3.) Utilice la representación matricial para encontrar una base para el núcleo y la imagen de T y verifique así, que T es un isomorfismo. Verifique que A es invertible.

d. Suponga que $S: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es la transformación definida por $S(\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_i$, para $i = 1, \ldots, 4$. Encuentre una representación matricial, B, de S y verifique que $B = A^{-1}$.

5.5 ISOMETRÍAS

En esta sección se describe un tipo especial de transformación lineal entre espacios vectoriales. Se comienza con un resultado sumamente útil.

TEOREMA 1 Sea A una matriz de $m \times n$ con elementos reales.† Entonces para cualesquiera dos vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$:

$$\boxed{(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A^t\mathbf{y})} \qquad (1)$$

Demostración

Ecuación (6), p. 124 — Teorema 1.i), p. 122 — Ley asociativa para la multiplicación de matrices

$$A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (A\mathbf{x})^t\mathbf{y} = (\mathbf{x}^tA^t)\mathbf{y} = \mathbf{x}^t(A^t\mathbf{y})$$

Ecuación (6), p. 124

$$= \mathbf{x} \cdot (A^t\mathbf{y})$$ ◆

Recuerde de la sección 4.9, página 399, que la matriz Q con elementos reales es **ortogonal** si Q es invertible y $Q^{-1} = Q^t$. En el teorema 4.9.3, página 399, se demostró

† Este resultado se puede extender fácilmente a matrices con componentes complejas. Vea el problema 21.

que Q es ortogonal si y sólo si las columnas de Q forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$. Ahora sea Q una matriz ortogonal de $n \times n$ y sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal definida por $T\mathbf{x} = Q\mathbf{x}$. Entonces, usando la ecuación (1), se calcula

$$(T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{y}) = Q\mathbf{x} \cdot Q\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (Q^tQ\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (I\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

En particular, si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, se ve que $T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ o sea

$$|T\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$$

para todo $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN 1 **Isometría** Una transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se llama una **isometría** si para cada $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$,

$$\boxed{|T\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|} \tag{2}$$

Debido a la ecuación (2) se puede decir que: una isometría en $\mathbb{R}^n$ es una transformación lineal que preserva la longitud en $\mathbb{R}^n$. Note que (2) implica que

$$\boxed{|T\mathbf{x} - T\mathbf{y}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \tag{3}$$

[ya que $T\mathbf{x} - T\mathbf{y} = T(x - \mathbf{y})$].

TEOREMA 2 Sea T una isometría de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y suponga que $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\boxed{T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} \tag{4}$$

Esto es, una isometría en $\mathbb{R}^n$ preserva el producto escalar.

Demostración

$$|T\mathbf{x} - T\mathbf{y}|^2 = (T\mathbf{x} - T\mathbf{y}) \cdot (T\mathbf{x} - T\mathbf{y}) = |T\mathbf{x}|^2 - 2T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{y} + |T\mathbf{y}|^2 \tag{5}$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2 \tag{6}$$

Como $|T\mathbf{x} - T\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$, $|T\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}|^2$ y $|T\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{y}|^2$, las ecuaciones (5) y (6) muestran que

$$-2T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{y} = -2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad \text{o} \quad T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$ ◆

En el desarrollo de la ecuación (2) se demostró que si la representación matricial de T es una matriz ortogonal, entonces T es una isometría. Inversamente, suponga que

T es una isometría. Si A es la representación matricial de T, entonces para cualesquiera $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \overset{\text{de (4)}}{=} T\mathbf{x}\cdot T\mathbf{y} = A\mathbf{x}\cdot A\mathbf{y} \overset{\text{de (1)}}{=} \mathbf{x}\cdot A^tA\mathbf{y}$$

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} - \mathbf{x}\cdot A^tA\mathbf{y} = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{x}\cdot(\mathbf{y} - A^tA\mathbf{y}) = 0$$

Entonces (vea la página 402)

$$\mathbf{y} - A^tA\mathbf{y} \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{\mathbf{0}\}$$

Se ve que para toda $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{y} = A^tA\mathbf{y} \tag{7}$$

Esto implica que $A^tA = I$, de manera que A es ortogonal.

Se ha demostrado el siguiente teorema:

TEOREMA 3 Una transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría si y sólo si la representación matricial de T es ortogonal. ✦

Isometrías de $\mathbb{R}^2$

Sea T una isometría de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Sea

$$\mathbf{u}_1 = T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 = T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Entonces $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son vectores unitarios [por la ecuación (2)] y

$$\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2 \overset{\text{de (4)}}{=} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0$$

Por lo tanto, $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son ortogonales. De la ecuación (3.1.7), página 235, existe un número θ, con $0 \le \theta < 2\pi$ tal que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\end{pmatrix}$$

Como $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son ortogonales,

$$\text{Dirección de } \mathbf{u}_2 = \text{dirección de } \mathbf{u}_1 \pm \frac{\pi}{2}$$

En el primer caso

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \\ \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

En el segundo caso

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ \\ \operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Con lo que la representación matricial de T es

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Del ejemplo 5.1.8, página 469, se ve que Q_1 es la representación matricial de una transformación de rotación (un ángulo θ en el sentido contrario a las manecillas del reloj). Es fácil verificar que

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

pero la transformación $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

es una reflexión de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ respecto al eje x (vea el ejemplo 5.1.1, página 465). Entonces se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA 4 Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una isometría. Entonces T es

i. una transformación de rotación
o bien

ii. una reflexión respecto al eje x seguida de una transformación de rotación. ✦

Las isometrías tienen algunas propiedades interesantes.

TEOREMA 5 Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una isometría. Entonces

i. Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ es un conjunto ortogonal, entonces $T\mathbf{u}_1, T\mathbf{u}_2, \ldots, T\mathbf{u}_n$ es un conjunto ortogonal.

ii. T es un isomorfismo.

Demostración

i. Si $i \neq j$ y $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$, entonces $(T\mathbf{u}_i) \cdot (T\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$, lo que prueba i).

ii. Sea $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$. Entonces por la parte i) y el hecho de que $|T\mathbf{u}_i| = |\mathbf{u}_i| = 1$, se encuentra que $T\mathbf{u}_1, T\mathbf{u}_2, \ldots, T\mathbf{u}_n$ es un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$. Por el teorema 4.9.1, página 394, estos vectores son linealmente independientes y por lo tanto forman una base para $\mathbb{R}^n$. Entonces imagen $T = \mathbb{R}^n$, lo que prueba que nu $T = \{\mathbf{0}\}$ [ya que $\nu(T) + \rho(T) = n$]. ✦

Se concluye esta sección con una descripción de cómo extender el concepto de isometría a un espacio arbitrario con producto interno. Recuerde de la página 441 que en un espacio V con producto interno

$$\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2}$$

(Recuerde que con el fin de evitar confusiones, se usan dobles barras para denotar una norma.)

DEFINICIÓN 2 **Isometría** Sean V y W dos espacios vectoriales reales (o complejos) con producto interno y sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces T es una **isometría** si para todo $\mathbf{v} \in V$

$$\|\mathbf{v}\|_V = \|T\mathbf{v}\|_W \tag{8}$$

Los siguientes dos hechos son consecuencia inmediata: primero, como $T(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = T\mathbf{v}_1 - T\mathbf{v}_2$, se tiene que para todo $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en V

$$\|T\mathbf{v}_1 - T\mathbf{v}_2\|_W = \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V$$

Segundo,

TEOREMA 6 Sea $T: V \rightarrow W$ una isometría. Entonces para todo $\mathbf{v}_1$ y b$\mathbf{v}_2$ en V

$$(T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \tag{9}$$

Es decir, una isometría preserva los productos internos.

La demostración del teorema 6 es idéntica a la prueba del teorema 2 con productos internos en V y W en lugar de producto escalar en $\mathbb{R}^n$. ✦

DEFINICIÓN 3 **Espacios vectoriales isométricamente isomorfos** Se dice que dos espacios vectoriales V y W con el mismo conjunto de escalares son **isométricamente isomorfos** si existe una transformación lineal $T: V \to W$ que sea tanto isometría como isomorfismo.

TEOREMA 7 Cualesquiera dos espacios reales de dimensión n con producto interno son isométricamente isomorfos.

Demostración Sean $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ dos base ortonormales para V y W, respectivamente. Sea $T: V \to W$ la transformación lineal definida por $T\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Si se puede demostrar que T es una isometría, entonces la demostración queda completa, ya que siguiendo en razonamiento del teorema 5 se llega a que T es también un isomorfismo. Sean $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en V. Entonces existen conjuntos de números reales $c_1, c_2, \ldots, c_n$ y $d_1, d_2, \ldots, d_n$ tales que $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$ y $\mathbf{y} = d_1\mathbf{u}_1 + d_2\mathbf{u}_2 + \cdots + d_n\mathbf{u}_n$. Como los $\mathbf{u}_i$ son ortonormales, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ((c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n), (d_1\mathbf{u}_1 + d_2\mathbf{u}_2 + \cdots + d_n\mathbf{u}_n)) = c_1d_1 + c_2d_2 + \cdots + c_nd_n$. De manera similar, como $T\mathbf{x} = c_1T\mathbf{u}_1 + c_2T\mathbf{u}_2 + \cdots + c_nT\mathbf{u}_n = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n$, se obtiene $(T\mathbf{x}, T\mathbf{y}) = ((c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n), (d_1\mathbf{w}_1 + d_2\mathbf{w}_2 + \cdots + d_n\mathbf{w}_n)) = c_1d_1 + c_2d_2 + \cdots + c_nd_n$ porque los $\mathbf{w}_i$ son ortonormales. Esto completa la prueba. ✦

EJEMPLO 1 **Una isometría entre $\mathbb{R}^3$ y $P_2[0, 1]$** Este teorema se ilustra mostrando que $\mathbb{R}^3$ y $P_2[0, 1]$ son isométricamente isomorfos. En $\mathbb{R}^3$ se usa la base estándar $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. En P_2 se usa la base ortonormal $\{1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2-6x+1)\}$. (Vea el ejemplo 4.11.8, página 442.) Sea $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}$ y $\mathbf{y} = \begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Entonces $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$. Recuerde que en $P_2[0, 1]$ se definió $(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$. Defina $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1$, $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \sqrt{3}(2x-1)$, y $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \sqrt{5}(6x^2-6x+1)$; por lo tanto

$$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = a + b\sqrt{3}(2x-1) + c\sqrt{5}(6x^2-6x+1)$$

y

$$(T\mathbf{x}, T\mathbf{y}) = \int_0^1 [a_1 + b_1\sqrt{3}(2x-1) + c_1\sqrt{5}(6x^2-6x+1)]$$

$$\times [a_2 + b_2\sqrt{3}(2x-1) + c_2\sqrt{5}(6x^2-6x+1)]\,dx$$

$$= a_1a_2\int_0^1 dx + \int_0^1 b_1b_2 3(2x-1)^2\,dx + \int_0^1 c_1c_2[5(6x^2-6x+1)^2]\,dx$$

$$+ (a_1b_2 + a_2b_1)\int_0^1 \sqrt{3}(2x-1)\,dx$$

$$+ (a_1c_2 + a_2c_1)\int_0^1 \sqrt{5}(6x^2-6x+1)\,dx$$

$$+ (b_1c_2 + b_2c_1)\int_0^1 [\sqrt{3}(2x-1)][\sqrt{5}(6x^2-6x+1)]\,dx$$

$$= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

Aquí se ahorró tiempo usando el hecho de que $\{1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2-6x+1)\}$ es un conjunto ortonormal. Por lo tanto, $T: \mathbb{R}^3 \to P_2[0, 1]$ es una isometría. ◆

PROBLEMAS 5.5

Autoevaluación

Falso-verdadero

I. La transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría si $\|T\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ para todo $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}$.

II. La transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría si las columnas de su representación matricial son ortogonales por pares.

III. La transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría si las columnas de su representación matricial son ortogonales por pares y cada columna tiene norma 1.

IV. Si $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría, entonces $T\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ es ortogonal a $T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

V. Si $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo, entonces T es una isometría.

VI. Si $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría, entonces T es un isomorfismo.

Respuestas a la autoevaluación

I. V **II.** F **III.** V **IV.** V **V.** F **VI.** V

1. Demuestre que para cualquier número real θ, la transformación $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una isometría.

2. Haga lo mismo para la transformación T, donde

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

3. Sean A y B matrices ortogonales de $n \times n$. Demuestre que $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $T\mathbf{x} = AB\mathbf{x}$ es una isometría.

4. Encuentre A_T si T es la transformación de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Demuestre que A_T es ortogonal.

5. Demuestre el teorema 6.

6. Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una isometría. Demuestre que T preserva los ángulos. Es decir, (ángulo entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$) = (ángulo entre $T\mathbf{x}$ y $T\mathbf{y}$).

7. Dé un ejemplo de una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$ que preserve los ángulos y *no* sea una isometría.

8. Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y} \neq 0$, defina: (ángulo entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$) = $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \cos^{-1}[(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})/|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|]$. Demuestre que si $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría, entonces T preserva los ángulos.

9. Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una isometría y sea $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$. Demuestre que $S\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}$ es una isometría.

En los problemas 10 al 14 encuentre una isometría entre los pares de espacios dados.

Cálculo **10.** $P_1[-1, 1]$, $\mathbb{R}^2$

* Cálculo **11.** $P_3[-1, 1]$, $\mathbb{R}^4$

12. M_{22}, $\mathbb{R}^4$

* Cálculo **13.** M_{22}, $P_3[-1, 1]$

14. D_n y $\mathbb{R}^n$ (D_n = conjunto de matrices diagonales de $n \times n$)

15. Sea A una matriz de $n \times n$ con elementos complejos. Entonces la **transpuesta conjugada** de A, denotada por A^*, está definida por $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Calcule A^* si $A = \begin{pmatrix} 1+i & -4+2i \\ 3 & 6-3i \end{pmatrix}$.

16. La matriz compleja A de $n \times n$ se llama **hermitiana**† si $A^* = A$. Demuestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 3-2i \\ 3+2i & 6 \end{pmatrix}$ es hermitiana.

17. Demuestre que si A es hermitiana, entonces las componentes de la diagonal de A son reales.

† Llamada así en honor del matemático francés Charles Hermite (1822-1901).

18. La matriz compleja A de $n \times n$ se llama **unitaria** si $A^* = A^{-1}$. Demuestre que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1+i}{2} & \dfrac{3-2i}{\sqrt{26}} \\ \dfrac{1+i}{2} & \dfrac{-3+2i}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}$$

es unitaria.

19. Demuestre que A es unitaria si y sólo si las columnas de A forman una base ortonormal en $\mathbb{C}^n$.

20. Demuestre que si A es unitaria, entonces $|\det A| = 1$.

21. Sea A una matriz de $n \times n$ con componentes complejas. En $\mathbb{C}^n$, si $\mathbf{x} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ y $\mathbf{y} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, defina el producto interno $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c_1\bar{d}_1 + c_2\bar{d}_2 + \cdots + c_n\bar{d}_n$. (Vea el ejemplo 4.11.2) Pruebe que $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^*\mathbf{y})$.

*22. Demuestre que cualesquiera dos espacios vectoriales complejos con producto interno de la misma dimensión (finita) son isométricamente isomorfos.

MATLAB 5.5

1. a. (*Lápiz y papel*) Considere la *definición* de isometría y explique, usando geometría, por qué la rotación respecto al origen y la reflexión a través de una recta determinada por un vector de longitud 1 en $\mathbb{R}^2$ son isometrías.

   b. Elija tres valores para un ángulo θ y verifique para cada uno que la representación matricial (respecto a la base canónica) de la rotación positiva por un ángulo θ es una matriz ortogonal.

   Genere tres vectores aleatorios $\mathbf{v}$ de longitud 1. Para cada uno, verifique que la representación matricial (respecto a la base canónica) de la reflexión a través de $\mathbf{v}$ es una matriz ortogonal. Refiérase al problema 4 de MATLAB 5.3 para el análisis de la reflexión.

   c. (*Lápiz y papel*) Pruebe en general que la representación matricial de una rotación es una matriz ortogonal y que la representación matricial de una reflexión es un matriz ortogonal.

   d. La teoría de isometrías de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ implica que una reflexión a través de un vector $\mathbf{v}$ de longitud 1 debe ser una reflexión a través del eje x seguida de una rotación. Un vector de longitud 1 se puede representar como $(\cos(\alpha)\ \text{sen}(\alpha))'$. Genere un vector aleatorio $\mathbf{w}$ y divídalo entre su longitud para producir un vector $\mathbf{v}$ de longitud 1. Encuentre α mediante **alpha = a tan(v(2)/v(1))**. (Si la primera componente de $\mathbf{v}$ es cero, entonces $\alpha = \pm\pi/2$.) Encuentre la representación matricial F de una reflexión a través de $\mathbf{v}$ y verifique que $F = RX$, donde R es la representación matricial para una rotación positiva de $\theta = 2\alpha$, y X es la representación matricial de una reflexión respecto al eje x. Repita para otros dos vectores $\mathbf{w}$.

   e. (*Lápiz y papel*) Pruebe el resultado del inciso d). *Sugerencia:* encuentre una expresión general para F en términos de α y utilice las identidades trigonométricas.

2. Trabaje el problema 4 anterior. Además, verifique que la transformación T mapea una base ortonormal sobre una base ortonormal. ¿Es siempre cierto esto para una isometría? ¿Por qué?

RESUMEN

- ***Transformación lineal***

  Sean V y W dos espacios vectoriales. Una **transformación lineal** T de V en W es una función que asigna a cada vector $\mathbf{v} \in V$ un vector único $T\mathbf{v} \in W$ y que satisface, para cada $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V y cada escalar α, (p. 467)

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v}$$

  y

$$T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v}$$

- ***Propiedades básicas de las transformaciones lineales***

  Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces para todo vector $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en V y todo escalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (p. 478)

  i. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
  ii. $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T\mathbf{u} - T\mathbf{v}$
  iii. $T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1 T\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n T\mathbf{v}_n$

- ***Núcleo e imagen de una transformación lineal***

  Sean V y W dos espacios vectoriales y sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces el **núcleo** de T, denotado por nu T, está dado por (pp. 481, 482)

$$\text{nu } T = \{\mathbf{v} \in V: T\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

  La **imagen** de T, denotada por imagen T, está dada por

$$\text{imagen } T = \{\mathbf{w} \in W: \mathbf{w} = T\mathbf{v} \text{ para algún } \mathbf{v} \in V\}$$

  nu T es un subespacio de V e imagen T es un subespacio de W.

- ***Nulidad y rango de una transformación lineal***

  Si T es una transformación lineal de V en W, entonces (p.482)

$$\textbf{nulidad} \text{ de } T = \nu(T) = \dim \text{nu } T$$
$$\textbf{rango de } T = \rho(T) = \dim \text{imagen } T$$

- ***Matriz de transformación***

  Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces existe una matriz única de $m \times n$, A_T, tal que (pp. 486, 487)

$$T\mathbf{x} = A_T\mathbf{x} \quad \text{para toda } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

  La matriz A_T se llama **matriz de transformación** de T.

- Sea A_T la matriz de transformación correspondiente a una transformación lineal T. Entonces (p. 487)

  i. imagen $T = R_{A_T} = C_{A_T}$
  ii. $\rho(T) = \rho(A_T)$
  iii. nu $T = N_{A_T}$
  iv. $\nu(T) = \nu(A_T)$

- ***Representación matricial de una transformación lineal***

  Sea V un espacio vectorial real de dimensión n, W un espacio vectorial real de dimensión m y $T: V \to W$ una transformación lineal. Sean $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para V y $B_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ una base para W. Entonces existe una matriz única A_T de $m \times n$, tal que (p. 490)

  $$(T\mathbf{x})_{B_2} = A_T(\mathbf{x})_{B_1}$$

  A_T se llama **representación matricial** de T respecto a las bases B_1 y B_2.

- Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita con dim $V = n$. Sea $T: V \to W$ una transformación lineal y sea A_T una representación matricial de T. Entonces (p. 492)

  i. $\rho(T) = \rho(A_T)$
  ii. $\nu(T) = \nu(A_T)$
  iii. $\nu(T) + \rho(T) = n$

- ***Transformación uno a uno***

  Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Se dice que T es **uno a uno,** escrito 1-1, si $T\mathbf{v}_1 = T\mathbf{v}_2$ implica que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$. Esto es, T es 1-1 si todo vector $\mathbf{w}$ en el imagen de T es la imagen de exactamente un vector en V. (p. 512)

- Sea $T: V \to W$ una transformación lineal; entonces T es 1-1 si y sólo si nu $T = \{\mathbf{0}\}$ (p. 512)

- ***Transformación sobre***

  Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Se dice que T es **sobre** W o simplemente **sobre**, si para todo $\mathbf{w} \in W$ existe al menos un $\mathbf{v} \in V$ tal que $T\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Es decir, *T es sobre W si y sólo si imagen $T = W$.* (p. 512)

- Sea $T: V \to W$ una transformación lineal y suponga que dim V = dim $W = n$: (p. 513)

  i. Si T es 1-1, entonces T es sobre.
  ii. Si T es sobre, entonces T es 1-1.

- Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Suponga que dim $V = n$ y dim $W = m$. Entonces (p. 513)

  i. Si $n > m$, T no es 1-1.
  ii. Si $m > n$, T no es sobre.

- ***Isomorfismo***

  Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Se dice que T es un **isomorfismo** si T es 1-1 y sobre. (p. 514)

- ***Espacios vectoriales isomorfos***

  Se dice que los espacios vectoriales V y W son isomorfos si existe un isomorfismo T de V sobre W. En este caso, se escribe $V \cong W$. (p. 514)

- Cualesquiera dos espacios vectoriales reales de dimensión finita con la misma dimensión son isomorfos. (p. 517)

- ***Teorema de resumen***

  Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes 11 afirmaciones son equivalentes: (p. 515)

  i. A es invertible.
  ii. La única solución al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.
iv. A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.
v. A se puede expresar como el producto de matrices elementales.
vi. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.
vii. Los renglones (y columnas) de A son linealmente independientes.
viii. $\det A \neq 0$
ix. $\nu(A) = 0$.
x. $\rho(A) = n$.
xi. La transformación lineal T de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ definida por $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ es un isomorfismo.

- Sea $T: V \to W$ un isomorfismo: (p. 516)
  i. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ genera a V, entonces $T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, \ldots, T\mathbf{v}_n$ genera a W.
  ii. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes en V, entonces $T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, \ldots, T\mathbf{v}_n$ son linealmente independientes en W.
  iii. Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base en V, entonces $\{T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, \ldots, T\mathbf{v}_n\}$ es una base en W.
  iv. Si la dimensión de V es finita, entonces la dimensión de W es finita y $\dim V = \dim W$.

- ***Isometría***

  Una transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se llama **isometría** si para todo $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ (p. 520)

$$|T\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$$

- Si T es una isometría de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, entonces para todo $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$, (p. 520)

$$|T\mathbf{x} - T\mathbf{y}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{y} \quad T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

- Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una isometría. Entonces: (p. 523)
  i. Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ es un conjunto ortogonal, entonces $T\mathbf{u}_1, T\mathbf{u}_2, \ldots, T\mathbf{u}_n$ es un conjunto ortogonal.
  ii. T es un isomorfismo.

- Una transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría si y sólo si la representación matricial de T es ortogonal. (p. 521)

- ***Isometría***

  Sean V y W dos espacios vectoriales reales (complejos) con producto interno y sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces T es una **isometría** si para cada $\mathbf{v} \in V$ (p. 523)

$$\|\mathbf{v}\|_V = \|T\mathbf{v}\|_W$$

- ***Espacios vectoriales isométricamente isomorfos***

  Se dice que dos espacios vectoriales V y W son **isométricamente isomorfos** si existe una transformación lineal $T: V \to W$ que es tanto un isomorfismo como una isometría. (p. 524)

- Cualesquiera dos espacios reales de dimensión n con producto interno son isométricamente isomorfos (p. 524)

EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 al 6 determine si la transformación dada de V a W es lineal.

1. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (0, -y)$
2. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $T(x, y, z) = (1, y, z)$
3. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $T(x, y) = x/y$
4. $T: P_1 \to P_2$; $(Tp)(x) = xp(x)$
5. $T: P_2 \to P_2$; $(Tp)(x) = 1 + p(x)$
6. $T: C[0, 1] \to C[0, 1]$; $Tf(x) = f(1)$

En los ejercicios 7 al 12 encuentre el núcleo, imagen, rango y nulidad de la transformación lineal dada.

7. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
8. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
9. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$
10. $T: P_2 \to P_4$; $Tp(x) = x^2p(x)$
11. $T: M_{22} \to M_{22}$; $T(A) = AB$, donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
12. $T: C[0, 1] \to \mathbb{R}$; $Tf = f(1)$

En los ejercicios 13 al 18 encuentre la representación matricial de la transformación lineal dada y encuentre su núcleo, imagen, nulidad y rango.

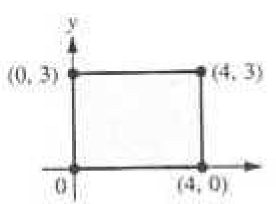
13. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (0, -y)$
14. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $T(x, y, z) = (y, z)$
15. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$; $T(x, y, z, w) = (x - 2z, 2y + 3w)$
16. $T: P_3 \to P_4$; $(Tp)(x) = xp(x)$
17. $T: M_{22} \to M_{22}$; $TA = AB$, donde $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
18. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (x - y, 2x + 3y)$; $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$; $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

En los ejercicios 19 al 22 describa en palabras la transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con la representación matricial A_T dada.

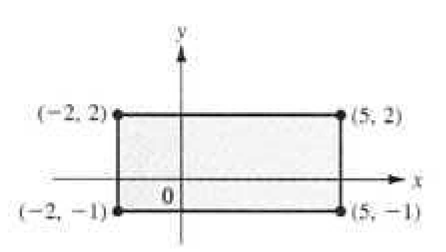
19. $A_T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
20. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$
21. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
22. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 23 al 26 escriba la representación matricial de 2×2 de las transformaciones lineales dadas y haga un bosquejo de la región obtenida cuando se aplica la transformación al rectángulo dado.

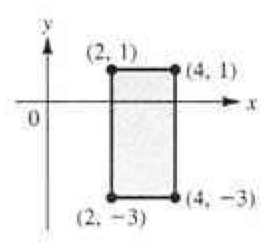
23. Expansión a lo largo del eje x con $c = 3$



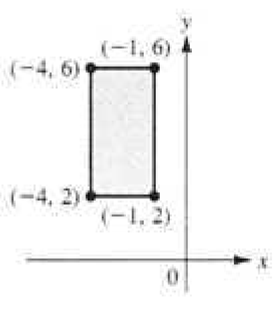
24. Compresión a lo largo del eje y con $c = \frac{1}{3}$



25. Reflexión respecto a la recta $y = x$



26. Corte a lo largo del eje x con $c = -3$

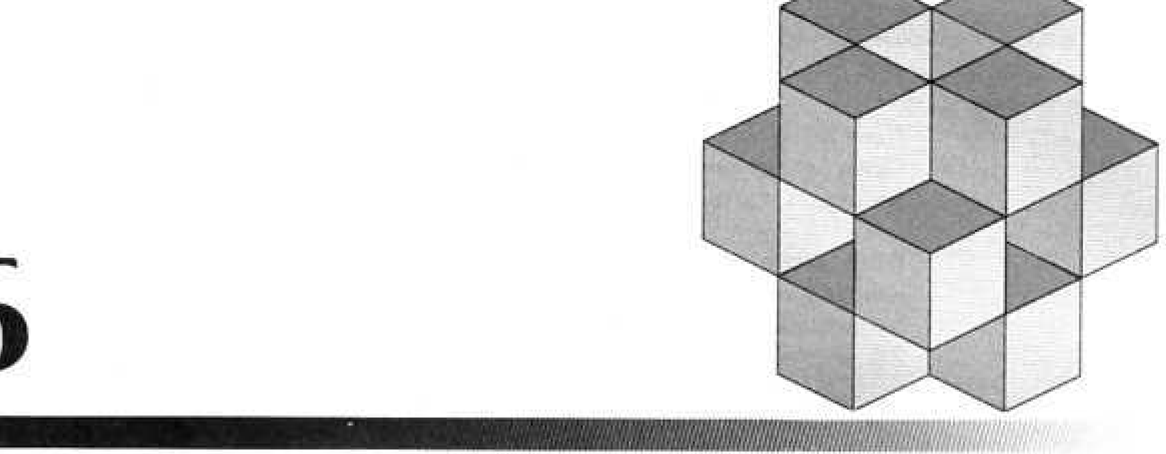


En los ejercicios 27 al 30 escriba cada matriz de transformación A_T como una sucesión de expansiones, compresiones, reflexiones y cortes.

27. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ **28.** $A_T = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ **29.** $A_T = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **30.** $A_T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

31. Encuentre un isomorfismo $T: P_2 \to \mathbb{R}^3$.

Cálculo **32.** Encuentre una isometría $T: \mathbb{R}^2 \to P_1[-1, 1]$.



6

Eigenvalores, eigenvectores y formas canónicas

6.1 EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

Sea $T: V \rightarrow V$ una transformación lineal. En muchas aplicaciones (una de las cuales se da en la siguiente sección) es útil encontrar un vector $\mathbf{v}$ en V tal que $T\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos. Es decir, se busca un vector $\mathbf{v}$ y un escalar λ tal que

$$T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{1}$$

Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y λ satisface (1), entonces λ se llama un *eigenvalor* de T y $\mathbf{v}$ se llama un *eigenvector* de T correspondiente al eigenvalor λ. El propósito de este capítulo es investigar las propiedades de los eigenvalores y eigenvectores. Si V tiene dimensión finita, entonces T se puede representar por una matriz A_T. Por esta razón se estudiarán los eigenvalores y eigenvectores de las matrices de $n \times n$.

DEFINICIÓN 1 **Eigenvalor y eigenvector** Sea A una matriz de $n \times n$ con componentes reales†. El número λ (real o complejo) se llama **eigenvalor** de A si existe un vector *diferente de cero* $\mathbf{v}$ en $\mathbb{C}^n$ tal que

$$\boxed{A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}} \tag{2}$$

El vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ se llama **eigenvector** *de A correspondiente al eigenvalor λ.*

† Esta definición es válida si A tiene componentes complejas; pero como las matrices que se manejarán tienen, en su mayoría, componentes reales, la definición es suficiente para nuestros propósitos.

Nota. La palabra "eigen" es la palabra alemana para "propio". Los eigenvalores también se llaman **valores propios** o **valores característicos** y los eigenvectores reciben el nombre de **vectores propios** o **vectores característicos**.

Observación. Como se verá (ejemplo 6) una matriz con componentes reales puede tener valores y vectores propios complejos. Por eso, en la definición, se asegura que $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$. No se usarán muchos hechos sobre los números complejos en este libro. En el apéndice 2 se hace una presentación de unos cuantos de ellos que sí se necesitan.

EJEMPLO 1 **Eigenvalores y eigenvectores de una matriz de 2 × 2** Sea $A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$. Entonces $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así, $\lambda_1 = 1$ es un valor propio de A con el correspondiente vector propio $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. De manera similar, $A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ de manera que $\lambda_2 = -2$ es un valor propio de A con el correspondiente vector propio $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Como se verá enseguida, estos son los únicos valores propios de A. ◆

EJEMPLO 2 **Eigenvalores y eigenvectores de la matriz identidad** Sea $A = I$, entonces para cualquier $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, $A\mathbf{v} = I\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Así, 1 es el único valor propio de A y todo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$ es un vector propio de I. ◆

Se calcularán los valores y vectores propios de muchas matrices en esta sección. Pero primero es necesario probar algunas técnicas que simplificarán estos cálculos.

Suponga que λ es un valor propio de A. Entonces existe un vector diferente de cero $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} = \lambda I\mathbf{v}$. Rescribiendo esto se tiene

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{3}$$

Si A es una matriz de $n \times n$, la ecuación (3) corresponde a un sistema homogéneo de n ecuaciones con las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Como se ha supuesto que el sistema tiene soluciones no triviales, se concluye que $\det(A - \lambda I) = 0$. Inversamente, si $\det(A - \lambda I) = 0$, entonces la ecuación (3) tiene soluciones no triviales y λ es el valor propio de A. Por otro lado, si $\det(A - \lambda I) \neq 0$, entonces la única solución a (3) es $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ de manera que λ *no* es un eigenvalor de A. Resumiendo estos hechos, se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA 1 Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces λ es un valor propio de A si y sólo si

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \tag{4}$$

◆

DEFINICIÓN 2 **Ecuación y polinomio característicos** La ecuación (4) se llama la **ecuación característica** de A; $p(\lambda)$ se llama el **polinomio característico** de A.

Como será evidente en los ejemplos, $p(\lambda)$ es un polinomio de grado n en λ. Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $A - \lambda I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$ y $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$.

Según el **teorema fundamental del álgebra**, cualquier polinomio de grado n con coeficientes reales o complejos tiene exactamente n raíces (contando multiplicidades). Esto significa, por ejemplo, que el polinomio $(\lambda - 1)^5$ tiene cinco raíces, todas iguales al número 1. Como cualquier eigenvalor de A es una raíz de la ecuación característica de A, se concluye que

Contando multiplicidades, toda matriz de $n \times n$ tiene exactamente n eigenvalores.

TEOREMA 2 Sea λ un valor propio de la matriz A de $n \times n$ y sea $E_\lambda = \{\mathbf{v}: A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$. Entonces E_λ es un subespacio de $\mathbb{C}^n$.

Demostración Si $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, entonces $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Así E_λ es el espacio nulo de la matriz $A - \lambda I$, que por el ejemplo 4.6.10, página 343, es un subespacio† de $\mathbb{C}^n$. ◆

DEFINICIÓN 3 **Espacio propio** Sea λ un valor propio de A. El subespacio E_λ se llama **espacio propio**‡ de A correspondiente al valor propio λ.

† En el ejemplo 4.6.10, página 343 se vio que N_A es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ si A es una matriz real. La extensión de este resultado a $\mathbb{C}^n$ no presenta dificultades.

‡ Observe que $\mathbf{0} \in E_\lambda$ ya que E_λ es un subespacio. Sin embargo, $\mathbf{0}$ no es un vector propio.

Ahora se probará otro resultado útil.

TEOREMA 3 Sea A una matriz de $n \times n$ y sea $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ valores propios distintos de A (es decir, $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$) con vectores propios correspondientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son linealmente independientes. Esto es: *los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes.*

Demostración Se hará la demostración por inducción matemática. Comenzando con $m = 2$, suponga que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \tag{5}$$

Multiplicando ambos lados de (5) por A se tiene

$$\mathbf{0} = A(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1A\mathbf{v}_1 + c_2A\mathbf{v}_2$$

o sea (como $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2$)

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \tag{6}$$

Se multiplica (5) por λ_1 y se resta de (6) para obtener

$$(c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2) - (c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_1\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$$

o sea

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

Como $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ (por definición de vector propio) y como $\lambda_2 \neq \lambda_1$, se concluye que $c_2 = 0$. Entonces sustituyendo $c_2 = 0$ en (5), se ve que $c_1 = 0$, lo que prueba el teorema en el caso $m = 2$. Ahora suponga que el teorema se cumple para $m = k$. Esto es, se supone que k vectores propios correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes. Ahora se prueba el teorema para $m = k + 1$. Así que se supone que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0} \tag{7}$$

Multiplicando ambos lados de (7) por A y usando el hecho de que $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$, se obtiene

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\lambda_k\mathbf{v}_k + c_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0} \tag{8}$$

Se multiplican ambos lados de (7) por λ_{k+1} y se resta de (8):

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Pero por la suposición de inducción, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son linealmente independientes. Así, $c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = \cdots = c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$; y como $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, se concluye que $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$. Pero de (7) esto significa que $c_{k+1} = 0$. Por lo tanto el teorema se cumple para $m = k + 1$ y la prueba queda completa. ◆

Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

y $p(\lambda) = 0$ se puede escribir en la forma

$$p(\lambda) = (-1)^n[\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0] = 0 \qquad \textbf{(9)}$$

La ecuación (9) tiene n raíces, algunas de ellas repetidas. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ son las diferentes raíces de (9) con multiplicidades $r_1, r_2, \ldots, r_m$, respectivamente, entonces (9) se puede factorizar para obtener

$$(-1)^n p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{r_m} = 0 \qquad \textbf{(10)}$$

Multiplicidad algebraica

Los números $r_1, r_2, \ldots, r_m$ se llaman **multiplicidades algebraicas** de los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, respectivamente.

Ahora se pueden calcular los valores propios y sus espacios propios correspondientes. Para esto se realiza un procedimiento de tres pasos:

Procedimiento para calcular valores propios y vectores propios

i. Se encuentra $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

ii. Se encuentran las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de $p(\lambda) = 0$.

iii. Se resuelve el sistema homogéneo $(A - \lambda_i I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, correspondiente a cada valor propio λ_i.

Observación 1. Por lo general el paso *ii*) es el más difícil.

Observación 2. En los problemas 35 y 36 se sugiere una manera relativamente sencilla de encontrar los valores y vectores propios de matrices de 2 × 2.

EJEMPLO 3 **Cálculo de valores y vectores propios** Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces det $(A - \lambda I) =$ $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$. Entonces los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 6$. Para $\lambda_1 = 1$ se resuelve $(A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ o $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es claro que cualquier vector propio correspondiente a $\lambda_1 = 1$ satisface $3x_1 + 2x_2 = 0$. Un vector propio de este tipo es $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Así, $E_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$. De manera similar, la ecuación $(A - 6I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ significa que $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o $x_1 = x_2$.

Entonces $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio correspondiente a $\lambda_2 = 6$ y $E_6 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Observe que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes ya que uno no es múltiplo del otro.

Nota. No importa si se establece $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 6$ o $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 1$. Los resultados son los mismos. ✦

EJEMPLO 4 **Una matriz de 3 × 3 con valores propios distintos** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$$

Por lo tanto, los valores propios de A son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = 3$. Para $\lambda_1 = 1$ se tiene

$$(A - I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reduciendo renglones se obtiene, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Así, $x_1 = -x_3$, $x_2 = 4x_3$, un vector propio es $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ y $E_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$. Para $\lambda_2 = -2$ se tiene $[A - (-2I)]\mathbf{v} = (A + 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, o sea

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\3 & 4 & -1\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Esto lleva a

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & 4 & 0\\3 & 4 & -1 & 0\\2 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & 4 & 0\\15 & 0 & 15 & 0\\5 & 0 & 5 & 0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & 4 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\5 & 0 & 5 & 0\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Entonces $x_2 = -x_1$, $x_3 = -x_1$ y un vector propio es $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$. Entonces $E_{-2} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. Por último, para $\lambda_3 = 3$ se tiene

$$(A - 3I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix}-2 & -1 & 4\\3 & -1 & -1\\2 & 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

y

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -1 & 4 & 0\\3 & -1 & -1 & 0\\2 & 1 & -4 & 0\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -1 & 4 & 0\\5 & 0 & -5 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -1 & 4 & 0\\1 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 0 & 0\\1 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Por lo tanto, $x_3 = x_1$, $x_2 = 2x_1$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ de manera que $E_3 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$. ✦

Observación. En este y otros ejemplos existe un número infinito de maneras de elegir el vector propio. Se seleccionó arbitrariamente uno sencillo haciendo una o más de las x_i igual a un número conveniente. En este caso, una de las x_i se hizo igual 1. Otra elección común es escalar el vector propio para que sea unitario.

EJEMPLO 5 **Una matriz de 2 × 2 con uno de sus valores propios iguales a cero** Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4)$. Así, los eigenvalores son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 4$. El espacio propio correspondiente a cero es simplemente el espacio nulo de A. Se calcula $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de manera que $2x_1 = x_2$ y un eigenvector es $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $E_0 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$. Al analizar lo que corresponde a $\lambda_2 = 4$ se tiene $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de manera que $E_4 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$. ◆

EJEMPLO 6 **Una matriz de 2 × 2 con valores propios conjugados complejos** Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ y

$$\lambda = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Así, $\lambda_1 = 1 + i$ y $\lambda_2 = 1 - i$. Se calcula

$$[A - (1+i)I]\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y se obtiene $(2 - i)x_1 - 5x_2 = 0$ y $x_1 + (-2 - i)x_2 = 0$. Entonces $x_1 = (2 + i)x_2$, lo que lleva al vector propio $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$ y $E_{1+i} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. De manera similar, $[A - (1 - i)I]\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2+i & -5 \\ 1 & -2+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o $x_1 + (-2 + i)x_2 = 0$, lo que lleva a $x_1 = (2 - i)x_2$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}$, y $E_{1-i} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. ◆

† Observe que las columnas de esta matriz son linealmente dependientes porque $\begin{pmatrix} -5 \\ -2-i \end{pmatrix} = (-2-i)\begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Observación 1. Este ejemplo ilustra que una matriz real puede tener valores y vectores propios complejos. Algunos libros definen los valores propios de matrices reales como las raíces *reales* de la ecuación característica. Con esta definición la matriz del último ejemplo *no* tiene valores propios. Esto puede hacer que los cálculos sean más sencillos, pero también reduce mucho la utilidad de la teoría de eigenvalores y eigenvectores. En la sección 6.7 se verá una ilustración importante del uso de los valores propios complejos.

Observación 2. Note que $\lambda_2 = 1 - i$ es el conjugado complejo de $\lambda_1 = 1 + i$. Además, las componentes de $\mathbf{v}_2$ son conjugados complejos de las componentes de $\mathbf{v}_1$. Esto no es coincidencia. En el problema 33 se pide que se pruebe que

> Los valores propios de una matriz *real* ocurren en pares conjugados complejos
> y
> los vectores propios correspondientes son conjugados complejos entre sí.

Antes de dar más ejemplos, se demostrará un teorema que en algunos casos especiales simplifica los cálculos de los valores propios.

TEOREMA 4 Los valores propios de una matriz triangular son las componentes diagonales de la matriz.

Demostración Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, entonces $A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$

y como el determinante de una matriz triangular es igual al producto de las componentes de la diagonal (vea la página 178), se ve que $\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$ con ceros $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. La demostración para una matriz triangular inferior es prácticamente idéntica. ✦

EJEMPLO 7 Valores propios de una matriz triangular Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces $\det (A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & 6 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda)(5-\lambda)$ con ceros (y valores propios) 2, −3 y 5. ✦

Ahora se darán más ejemplos del cálculo de los valores y vectores propios para matrices que no son triangulares.

EJEMPLO 8 **Una matriz de 2 × 2 con un valor propio y dos vectores propios linealmente independientes** Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2 = 0$; así, $\lambda = 4$ es un valor propio de multiplicidad algebraica 2. Como $A = 4I$, se sabe que $A\mathbf{v} = 4\mathbf{v}$ para todo vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ de manera que $E_4 = \mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. ◆

EJEMPLO 9 **Una matriz de 2 × 2 con un valor propio y sólo un vector propio linealmente independiente** Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2 = 0$; así, $\lambda = 4$ es un valor propio de multiplicidad algebraica 2. Pero esta vez se tiene $(A - 4I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $x_2 = 0$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector propio y $E_4 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. ◆

EJEMPLO 10 **Una matriz de 3 × 3 con dos valores propios distintos y tres vectores propios linealmente independientes** Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8^{\dagger} = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 8) = 0$ de manera que los valores propios son $\lambda_1 = 8$ y $\lambda_2 = -1$ (con multiplicidad algebraica 2). Para $\lambda_1 = 8$, se obtiene

$$(A - 8I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o reduciendo por renglones, se tiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 4 & 0 \\ -18 & 0 & 18 & 0 \\ 9 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

† Este cálculo no es obvio. No se dan los detalles algebraicos para un determinante de 3 × 3. De aquí en adelante se seguirá esta política.

Entonces, $x_3 = 2x_2$ y $x_1 = x_3$ y se obtiene el vector propio $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $E_8 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$. Para $\lambda_2 = -1$ se tiene $(A + I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, lo que da la ecuación única $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ o $x_2 = -2x_1 - 2x_3$. Si $x_1 = 1$ y $x_3 = 0$, se obtiene $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si $x_1 = 0$ y $x_3 = 1$, se obtiene $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $E_{-1} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Existen otras elecciones convenientes para los vectores propios, por ejemplo, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ está en E_{-1} ya que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$.

◆

EJEMPLO 11 **Una matriz de 3 × 3 con un valor propio y sólo un vector propio linealmente independiente** Sea $A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$; entonces $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & -5 & -9 \\ 8 & 9-\lambda & 18 \\ -2 & -3 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda + 1)^3 = 0$. Así, $\lambda = -1$ es un valor propio de multiplicidad algebraica 3. Para calcular E_{-1} se establece $(A + I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -9 \\ 8 & 10 & 18 \\ -2 & -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y se reduce por renglones para obtener, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -5 & -9 & 0 \\ 8 & 10 & 18 & 0 \\ -2 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ -2 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Esto conduce a $x_2 = -3x_3$ y $2x_1 = 3x_3$. Estableciendo $x_3 = 2$, se obtiene sólo un vector propio linealmente independiente: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $E_{-1} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

◆

EJEMPLO 12 **Una matriz de 3 × 3 con un valor propio y dos vectores propios linealmente independientes** Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$; entonces $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & -9 \\ 0 & 5-\lambda & 18 \\ 0 & -2 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^3 = 0$. Así, igual que en el ejemplo 10, $\lambda = -1$ es un valor propio de multiplicidad algebraica 3. Para encontrar E_{-1}, se calcula $(A + I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $-2x_2 - 6x_3 = 0$ o $x_2 = -3x_3$, y x_1 es arbitrario. Haciendo $x_1 = 0$, $x_3 = 1$, se obtiene $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Haciendo $x_1 = 1$, $x_3 = 1$, se llega a $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. De esta manera $E_{-1} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

◆

En cada uno de los últimos cinco ejemplos se encontró un valor propio con una multiplicidad algebraica de 2 o más. Pero como se vio en los ejemplos 9, 11 y 12, el número de vectores propios linealmente independientes no necesariamente es igual a la multiplicidad algebraica del eigenvalor (como fue el caso en los ejemplos 8 y 10). Esta observación lleva a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4 **Multiplicidad geométrica** Sea λ un valor propio de la matriz A; entonces la **multiplicidad geométrica** de λ es la dimensión del espacio propio correspondiente a λ (que es la nulidad de la matriz $A - \lambda I$). Esto es,

$$\text{Multiplicidad geométrica de } \lambda = \dim E_\lambda = \nu(A - \lambda I)$$

En los ejemplos 8 y 10 se vio que para los valores propios de multiplicidad algebraica 2 las multiplicidades geométricas eran también 2. En el ejemplo 9 la multiplicidad geométrica de $\lambda = 4$ era 1 mientras que la multiplicidad algebraica era 2. En el ejemplo 11 la multiplicidad algebraica era 3 y la multiplicidad geométrica 1. En el ejemplo 12 la multiplicidad algebraica era 3 y la geométrica 2. Estos ejemplos ilustran el hecho de que si la multiplicidad algebraica de λ es mayor que 1, entonces no se puede predecir la multiplicidad geométrica de λ sin información adicional.

Si A es una matriz de 2×2 y λ es un valor propio con multiplicidad algebraica 2, entonces la multiplicidad geométrica de λ es ≤ 2 ya que puede haber a lo más dos vectores linealmente independientes en un espacio de dos dimensiones. Sea A una matriz de 3×3 que tiene dos valores propios λ_1 y λ_2 con multiplicidades algebraicas 1 y 2, respectivamente. Entonces la multiplicidad geométrica de λ_2 es ≤ 2 porque de otra manera se tendrían cuatro vectores linealmente independientes en un espacio de tres dimensiones. De hecho, la multiplicidad geométrica de un valor propio es siempre menor o igual que su multiplicidad algebraica. La demostración del siguiente teorema no es difícil si se prueban algunos otros hechos sobre los determinantes. Como esto nos llevaría más allá del alcance de este libro, se omite la prueba.†

TEOREMA 5 Sea λ un valor propio de A. Entonces

Multiplicidad geométrica de $\lambda \leq$ multiplicidad algebraica de λ ◆

Nota. La multiplicidad geométrica de un valor propio nunca es cero. Esto se deduce de la definición 1, que establece que si λ es un valor propio, entonces existe un vector propio *diferente de cero* que corresponde a λ.

En el resto de este capítulo, un problema importante será determinar si una matriz de $n \times n$ dada tiene o no n vectores propios linealmente independientes. Con lo que se ha estudiado en esta sección, se vuelve evidente el siguiente teorema.

TEOREMA 6 Sea A una matriz de $n \times n$; entonces A tiene n vectores propios linealmente independientes si y sólo si la multiplicidad geométrica de cada valor propio es igual a su multiplicidad algebraica. En particular, A tiene n vectores propios linealmente independientes si todos los valores propios son distintos (ya que entonces la multiplicidad algebraica de cada valor propio es 1). ◆

En el ejemplo 5 se vio una matriz para la que un valor propio era cero. En realidad, por el teorema 1 es evidente que cero es un valor propio de A si y sólo si $\det A = \det (A - 0I) = 0$. Esto permite extender, por última vez, el teorema de resumen (vea el teorema 5.4.4, página 515).

---

† Una demostración se puede encontrar en el teorema 11.2.6 en el libro *Advanced Engineering Mathematics* (Nueva York: McGraw-Hill, Inc., 1975) de C. R. Wylie.

TEOREMA 7 **Teorema de resumen (punto de vista 8)** Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes 12 afirmaciones son equivalentes; es decir, cada una implica a las otras 11 (de manera que si una es cierta, todas las demás son ciertas):

i. A es invertible

ii. La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

iv. A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n.

v. A se puede escribir como el producto de matrices elementales.

vi. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii. Los renglones (y columnas) de A son linealmente independientes.

viii. $\det A \neq 0$.

ix. $\nu(A) = 0$.

x. $\rho(A) = n$.

xi. La transformación lineal T de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ definida por $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ es un isomorfismo.

xii. Cero *no* es un valor propio de A. ◆

PROBLEMAS 6.1

Autoevaluación

Falso-verdadero

I. Los valores propios de una matriz triangular son los números en la diagonal de la matriz.

II. Si la matriz real A de 3×3 tiene tres valores propios distintos, entonces los vectores propios correspondientes a esos valores propios constituyen una base para $\mathbb{R}^3$.

III. Si la matriz A de 3×3 tiene dos valores propios distintos, entonces A tiene a lo más dos vectores propios linealmente independientes.

IV. Si A tiene elementos reales, entonces A puede tener exactamente un valor propio complejo (es decir, un eigenvalor $a + ib$ con $b \neq 0$).

V. Si $\det A = 0$, entonces 0 es un valor propio de A.

Selección múltiple

VI. 1 es un valor propio de la matriz identidad de 3×3. Su multiplicidad geométrica es _____.

a. 1 **b.** 2 **c.** 3

VII. 1 es el único valor propio de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Su multiplicidad geométrica es ______.

a. 1 **b.** 2 **c.** 3

En los problemas 1 al 20 calcule los valores propios y los espacios propios de la matriz dada. Si la multiplicidad algebraica de un valor propio es mayor que 1, calcule su multiplicidad geométrica.

1. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -12 & 7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$; $b \neq 0$

19. $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$; $bc \neq 0$

20. $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & a & d \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$; $bcd \neq 0$

21. Demuestre que para cualesquiera números reales a y b, la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ tiene vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Respuestas a la autoevaluación

I. V **II.** V **III.** F **IV.** F **V.** V **VI.** c **VII.** b

En los problemas 22 al 28 suponga que la matriz A tiene valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

22. Demuestre que los valores propios de A^t son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

23. Demuestre que los valores propios de αA son $\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \ldots, \alpha\lambda_k$.

24. Demuestre que A^{-1} existe si y sólo si $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_k \neq 0$.

***25.** Si A^{-1} existe, demuestre que los valores propios de A^{-1} son $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \ldots, 1/\lambda_k$.

26. Demuestre que la matriz $A - \alpha I$ tiene valores propios $\lambda_1 - \alpha, \lambda_2 - \alpha, \ldots, \lambda_k - \alpha$.

***27.** Demuestre que los valores propios de A^2 son $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_k^2$.

***28.** Demuestre que los valores propios de A^m son $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots, \lambda_k^m$ para $m = 1, 2, 3, \ldots$.

29. Sea λ un valor propio de A con $\mathbf{v}$ como el vector propio correspondiente. Sea $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n$. Defina la matriz $p(A)$ por $p(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$. Demuestre que $p(A)\mathbf{v} = p(\lambda)\mathbf{v}$.

30. Usando el resultado del problema 29, demuestre que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son valores propios de A, entonces $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_k)$ son vectores propios de $p(A)$.

31. Demuestre que si A es una matriz diagonal, entonces los valores propios de A son las componentes de la diagonal de A.

32. Sea $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Demuestre que para cada matriz $\lambda = 2$ es un valor propio con multiplicidad algebraica 4. En cada caso calcule la multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$.

***33.** Sea A una matriz real de $n \times n$. Demuestre que si λ_1 es un valor propio complejo de A con vector propio $\mathbf{v}_1$, entonces $\bar{\lambda}_1$ es un valor propio de A con vector propio $\bar{\mathbf{v}}_1$.

***34.** Una **matriz de probabilidad** es una matriz de $n \times n$ que tiene dos propiedades:

i. $a_{ij} \geq 0$ para toda i y j.
ii. La suma de las componentes en cada columna es 1.

Demuestre que 1 es un valor propio de toda matriz de probabilidad.

***35.** Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz de 2×2. Suponga que $b \neq 0$. Sea m una raíz (real o compleja) de la ecuación

$$bm^2 + (a - d)m - c = 0$$

demuestre que $a + bm$ es un valor propio de A con vector propio correspondiente $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$. Esto proporciona un método sencillo para calcular los valores y vectores propios de las matrices de 2×2. [Este procedimiento apareció en el artículo "A Simple Algorithm for Finding Eigenvalues and Eigenvectors for 2 × 2 Matrices" de Tyre A. Newton en el *American Mathematical Monthly*, 97(1), enero 1990, 57-60.]

36. Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz de 2 × 2. Demuestre que d es un valor propio de A con vector propio correspondiente $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

MANEJO DE CALCULADORA

TI-85

Los valores y vectores propios se pueden obtener directamente en la TI-85. Suponga que se introduce una matriz cuadrada A. Entonces la siguiente secuencia de teclas dará los valores propios de A:

[2nd] [MATRX] [F3] (MATH)

[F4] (eigVl) [ALPHA] [A] [ENTER]

Por ejemplo, si $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ como en el ejemplo 4, el resultado es {3 −2 1}. Si $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como en el ejemplo 6, entonces aparece {(1, 1) (1, −1)}. Esto indica que los valores propios son los números complejos $1 + i$ y $1 - i$.

Para obtener el conjunto de vectores propios, oprima la tecla [F5] (eig Vc). Para la matriz A_1 anterior el resultado es

```
[[-.442325868465  -.714920352984   -.527046276694]
 [-.884651736929   .714920352984   2.10818510678 ]
 [-.442325868465   .714920352984    .527046276695]]
```

Observe que cada columna es un vector propio. La tercera columna es un múltiplo de $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. La segunda columna es un múltiplo de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y la primera columna es un múltiplo de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Para la matriz A_2 el resultado es

```
[[(-1, 2)  (-1, -2)]
 [ (0, 1)   (0, -1) ]]
```

Ahora las columnas corresponden a los vectores propios $\begin{pmatrix} -1 + 2i \\ i \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 - 2i \\ -i \end{pmatrix}$, respectivamente. Observe que $-i\begin{pmatrix} -1 + 2i \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + i \\ 1 \end{pmatrix}$, un vector propio encontrado en el ejemplo 6.

La multiplicidad geométrica de un valor propio se puede encontrar contando los vectores propios linealmente independientes que corresponden a ese valor propio.

En los problemas 37 al 40 encuentre, con una calculadora, los valores propios y un conjunto correspondiente de vectores propios para cada matriz.

37. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

38. $\begin{pmatrix} 102 & -11 & 56 \\ 38 & -49 & 75 \\ 83 & 123 & -67 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} -0.031 & 0.082 & 0.095 \\ -0.046 & 0.067 & -0.081 \\ 0.055 & -0.077 & 0.038 \end{pmatrix}$

40. $\begin{pmatrix} 13 & 16 & 12 & 14 & 18 \\ 26 & 21 & 19 & 27 & 16 \\ 31 & 29 & 37 & 41 & 56 \\ 51 & 38 & 29 & 46 & 33 \\ 61 & 41 & 29 & 38 & 50 \end{pmatrix}$

En los problemas 41 al 45 existe un valor propio de multiplicidad algebraica 6. Determine su multiplicidad geométrica. Observe que un número como $4E-13 = 4 \times 10^{-13}$ es, en efecto, igual a cero.

41. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

42. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

44. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

MATLAB 6.1

1. Considere la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 38 & -95 & 55 \\ 35 & -92 & 55 \\ 35 & -95 & 58 \end{pmatrix}$$

a. Verifique que $\mathbf{x} = (1\ \ 1\ \ 1)^t$ es un vector propio de A con valor propio $\lambda = -2$, que $\mathbf{y} = (3\ \ 4\ \ 5)^t$ es un vector propio de A con valor propio $\mu = 3$ y que $\mathbf{z} = (4\ \ 9\ \ 13)^t$ es un vector propio de A con valor propio $\mu = 3$. (*Nota*. La mejor manera de demostrar que $\mathbf{w}$ es un vector propio de A con valor propio c es demostrar que $(A - cI)\,\mathbf{w} = \mathbf{0}$.)

b. Seleccione un valor aleatorio para el escalar a. Verifique que $a\mathbf{x}$ es un vector propio para A con valor propio $\lambda = -2$. Verifique que $a\mathbf{y}$ y $a\mathbf{z}$ son vectores propios para A con valor propio $\mu = 3$. Repita para otros tres valores de a.

c. Seleccione valores aleatorios para los escalares a y b. Verifique que $\mathbf{w} = a\mathbf{y} + b\mathbf{z}$ es un vector propio de A con valor propio $\mu = 3$. Repita para otros tres juegos de a y b.

d. (*Lápiz y papel*) ¿Qué propiedad de los valores y vectores propios se ilustra con los incisos b) y c)?

2. Considere la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & .5 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1.5 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Verifique que $\mathbf{x} = (1\ \ i\ \ 0\ \ -i)^t$ y $\mathbf{v} = (0\ \ i\ \ 2\ \ 1{+}i)^t$ son vectores propios de A con valor propio $\lambda = 1 + 2i$ y que $\mathbf{y} = (1\ \ -i\ \ 0\ \ i)^t$ y $\mathbf{z} = (0\ \ -i\ \ 2\ \ 1{-}i)^t$ son vectores propios de A con valor propio $\mu = 1 - 2i$. (Para encontrar la transpuesta de una matriz compleja A utilice **A.'**)

b. Seleccione un valor aleatorio *complejo* para el escalar a. (Por ejemplo, **a = 5*(2*rand(1)–1)+i*3*rand(1))**.) Verifique que $a\mathbf{x}$ y $a\mathbf{v}$ son vectores propios de A con valor propio $\lambda = 1 + 2i$. Verifique que $a\mathbf{y}$ y $a\mathbf{z}$ son vectores propios de A con valor propio $\mu = 1 - 2i$. Repita para otros tres valores de a.

c. Seleccione valores aleatorios *complejos* para los escalares a y b. Verifique que $\mathbf{u} = a\mathbf{x} + b\mathbf{v}$ es un vector propio de A con valor propio $\lambda = 2 + i$. Verifique que $\mathbf{w} = a\mathbf{y} + b\mathbf{z}$ es un vector propio de A con valor propio $\mu = 2 - i$. Repita para otros tres juegos de a y b.

d. (*Lápiz y papel*) ¿Qué propiedad de los valores y vectores propios se ilustra en los incisos b) y c)?

3. Siga las instrucciones para cada matriz A en los problemas 1, 6, 8 y 13 anteriores.

a. Encuentre el polinomio característico *a mano* y verifique encontrando **c = (– 1)^n*poly(A)**. (Aquí n es el tamaño de la matriz.) Dé **help poly** para obtener ayuda en la interpretación del resultado de **poly** y explique por qué se incluyó el factor $(-1)^n$.

b. Encuentre los valores propios obteniendo las raíces del polinomio característico *a mano*. Verifique encontrando **r = roots(c)**.

c. Para cada valor propio λ encontrado, resuelva $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *a mano* y verifique usando **rref(A – r(k)*eye(n))** para $k = 1, \ldots, n$, donde **r** es el vector que contiene los valores propios y n es el tamaño de la matriz.

d. Verifique que existen n valores propios distintos (donde n es el tamaño de la matriz) y que el conjunto de vectores propios es linealmente independiente.

e. Dé **[V,D] = eig(A)**. Para $k = 1, \ldots, n$, verifique que

(A–D(k,k)*eye(n))*V(:,k) = 0

Escriba una conclusión interpretando esto en el lenguaje de los valores y vectores propios.

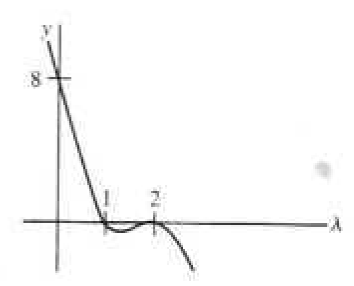
La rutina **eig** encuentra vectores propios de longitud 1. Como cada valor propio tiene multiplicidad algebraica y geométrica 1, los vectores encontrados en el inciso c), normalizados a 1, deben coincidir con las columnas de V hasta un posible múltiplo por un número complejo de módulo 1 (por lo general 1, –1, i o $-i$). Verifique esto.

4. Los cálculos de valores propios (y los vectores propios asociados) son sensibles a errores de redondeo, en especial cuando el eigenvalor tiene multiplicidad algebraica mayor que 1.
   a. (*Lápiz y papel*) Para la siguiente matriz, calcule los valores y vectores propios a mano. Verifique que $\lambda = 2$ es un valor propio con multiplicidad algebraica 2 (y multiplicidad geométrica 1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   b. Encuentre **c = poly(A)** y compare con sus cálculos manuales. Dé **format long**. Encuentre **r = roots(c)**. ¿Qué observa sobre los valores propios? Intente encontrar los vectores propios con **rref(A–r(k)*eye(3))** para $k = 1, 2$, y 3. ¿Tuvo éxito?
   c. La rutina **eig** es más estable numéricamente que **roots**. (Utiliza un proceso diferente al teórico que se describió en esta sección.) Sin embargo, no puede evitar el hecho básico sobre raíces múltiples y los errores de redondeo estudiados en el inciso c). De todas maneras, usando **format long**, encuentre **[V,D] = eig(A)**. Compare los valores propios en D con los valores propios verdaderos y con los valores propios calculados en el inciso b). Argumente por qué el cálculo con **eig** es un poco más cercano a los verdaderos valores.
   d. Para $k = 1, 2$ y 3, verifique que **(A–D(k,k)*eye(3))*V(:,k)** es cercano a cero. ¿De qué manera llevaría esto a decir que aun cuando hay inexactitudes, en cierto sentido los cálculos no están tan mal?

   Con pequeñas perturbaciones en los cálculos de los vectores propios se puede llegar a que son linealmente independientes; encuentre **rref(V)**. Examine V, ¿ve alguna evidencia de que los vectores propios asociados con los valores propios cercanos a $\lambda = 2$ sean "casi" dependientes?
   e. (*Lápiz y papel*) Este inciso da una explicación general de los problemas asociados con aproximaciones numéricas de raíces múltiples (en este contexto, las raíces del polinomio característico con multiplicidad algebraica mayor que 1). Enseguida se da un bosquejo del polinomio característico $y = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$.



   El error de redondeo perturba un poco los valores. Suponga que la perturbación es tal que la gráfica está un poco corrida hacia abajo. Vuelva a dibujarla y explique por qué ya no se tiene una raíz de la función en $\lambda = 2$ y por qué, de hecho, se crearon dos raíces complejas donde había una raíz real. Suponga que la gráfica está un poco corrida hacia arriba. Vuelva a dibujarla y explique qué le ocurre a la raíz múltiple en $\lambda = 2$. Describa la manera en que se observaron estos efectos en los incisos anteriores de este problema.

5. **a.** Para las matrices A en los problemas 6, 8, 12, 13 y 16 de esta sección, encuentre **poly(A)–poly(A')**. Respecto a números pequeños como cero (siempre hay errores de

redondeo), formule una conclusión sobre las características de los polinomios de A y A'. ¿Qué implica esto sobre los valores propios?

b. (*Lápiz y papel*) Pruebe su conclusión.

6. **a.** Genere una matriz aleatoria no invertible A. [Comience con una A aleatoria y cámbiela sustituyendo algunas columnas (o renglones) por combinaciones lineales de algunas otras columnas (o renglones).] Encuentre **d = eig(A)**. (Si da **eig** a una sola variable de salida, resulta un solo vector que contiene valores propios.) Repita para otras tres matrices no invertibles. ¿Qué tienen en común los conjuntos de valores propios de estas matrices? Explique por qué debe ser así.

b. **i.** Para las matrices A en los problemas 1, 2 y 8 y la siguiente matriz, encuentre **d = eig(A)** y **e = eig(inv(A))**.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9.5 & -2 & -10.5 \\ -10 & -42.5 & 10 & 44.5 \\ 6 & 23.5 & -5 & -24.5 \\ -10 & -43 & 10 & 45 \end{pmatrix}$$

ii. Ignore el orden en el que aparecen los vectores **d** y **e**, y obtenga una conclusión sobre la relación entre los valores propios de A y A^{-1}. Explique la evidencia que tiene para su conclusión. Complete la siguiente afirmación: si λ es un valor propio de A, entonces ___ es un valor propio de A^{-1}.

iii. Pruebe su conclusión sobre las matrices en los problemas 3, 6 y 13.

c. Para cada matriz considerada en el inciso b), compare las formas escalonadas reducidas por renglón de $A - \lambda I$ y $A^{-1} - \mu I$, donde λ es un valor propio de A y μ es el valor propio correspondiente de A^{-1} obtenido en el inciso b). Explique qué le dice esta comparación sobre los valores propios correspondientes.

d. (*Lápiz y papel*) Formule una conclusión sobre la relación entre los valores propios y los vectores propios de A y de A^{-1} y pruebe su conclusión. [*Sugerencia:* considere $AA^{-1}\mathbf{v}$, donde **v** es un vector propio de A.]

7. Siga las instrucciones del problema 6 de esta sección de MATLAB, incisos b) a d), pero remplace A^{-1} con A^2 e **inv(A)** con **A*A**.

8. Para cada matriz A en los problemas 6, 7, 8 y 13 de esta sección y una matriz aleatoria A de 4×4, genere una matriz aleatoria invertible C del mismo tamaño de A y forme $B = CAC^{-1}$. Ignore el orden en que aparecen los valores (y considere los números pequeños como cero) para comparar los valores propios de A, **eig(A)**, con los valores propios de B, **eig(B)**. Describa cualquier conclusión a la que pueda llegar partiendo de estas comparaciones.

9. Se ha visto que los valores propios de una matriz aleatoria real de $n \times n$ puede ser cualquier número real o complejo siempre que los números complejos ocurran en pares conjugados complejos. Se examinarán algunas categorías especiales de matrices reales para ver si estas clases tienen restricciones especiales sobre los tipos posibles de valores propios. (Debido a las consideraciones de errores de redondeo suponga que los números pequeños son cero.)

a. Genere una matriz aleatoria real *simétrica* de $n \times n$ para algún valor de n. (Sea B una matriz aleatoria de $n \times n$. Sea **A = triu(B)+triu(B)'**.) Encuentre **eig(A)**. Repita para otras cuatro matrices simétricas A. (Utilice más de un valor de n.) Concluya una propiedad de los valores propios de las matrices simétricas.

b. Una clase especial de matrices simétricas reales es la de las matrices C formadas por $C = AA'$ para cualquier matriz A. Genere cinco matrices de este tipo. (No use matrices

del mismo tamaño.) Encuentre **eig(C)** para cada una. Dé una conclusión sobre una propiedad de los valores propios de las matrices de la forma AA^t.

10. Se vio que si una matriz tiene valores propios distintos, entonces los vectores propios son linealmente independientes. Una clase de vectores linealmente independientes es la clase de los vectores ortogonales. Genere una matriz aleatoria *simétrica* real A igual que en el problema 9 de este MATLAB. Encuentre **[V,D] = eig(A)** y verifique que los valores propios son distintos y que los vectores propios son ortogonales. Repita para otras cuatro matrices A. (Utilice tamaños diferentes.)

11. Teoría de gráficas Para una gráfica de vértices y aristas como se muestra en la siguiente figura, se define la **matriz de adyacencia** A de la gráfica como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ y } j \text{ están conectados por una arista} \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Se usa la convención de que $a_{ii} = 0$.

Se define el **número cromático** de la gráfica como el número mínimo de colores necesarios para colorear los vértices de la gráfica de manera que dos vértices adyacentes no tengan asignado el mismo color. Los vértices son **adyacentes** si están conectados por una arista.

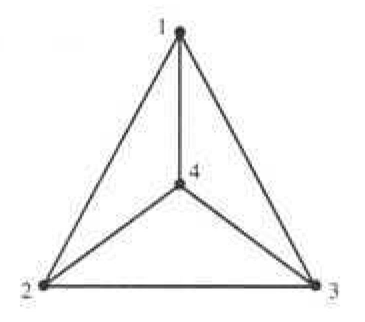
La matriz de adyacencia de una gráfica es simétrica. (¿Por qué?) Entonces, los valores propios serán valores reales (vea la sección 6.3 o el problema 9 anterior) y por lo tanto se pueden ordenar de mayor a menor. (En este caso se ordena como se haría con los números sobre la recta real; *no* se ordena sólo por magnitud.) Sea λ_1 el valor propio más grande y sea λ_n el valor propio más pequeño. Resultará que λ_1 es positivo y que λ_n es negativo.

Suponga que la gráfica es **conexa**; es decir, existe una trayectoria de cada vértice a cualquier otro, quizá a través de otros vértices. Sea χ el número cromático. Entonces se puede demostrar que

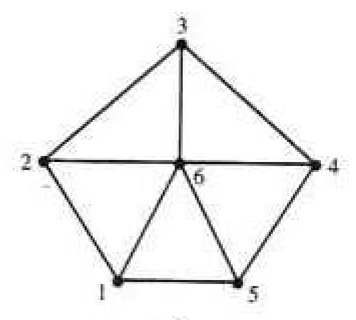
$$1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \le \chi \le 1 + \lambda_1$$

Usando este teorema, encuentre cotas sobre los números cromáticos para las gráficas conexas que siguen. Verifique el resultado volviendo a dibujar las gráficas y pintando los vértices con los colores adecuados. Para los incisos a) a c), con base en la gráfica, intente dar algún argumento de por qué no se pueden colorear los vértices con menos colores que los indicados por el teorema. (*Nota:* Recuerde que el número cromático es un entero, de manera que se buscan enteros que estén entre las cotas dadas por el teorema.)

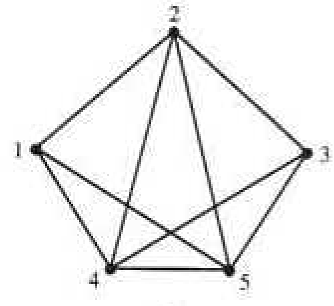
a.



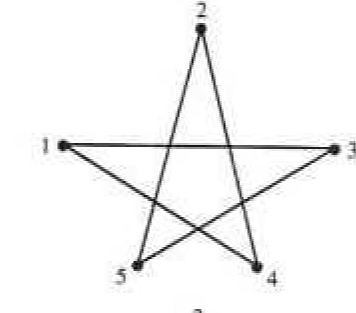
b.



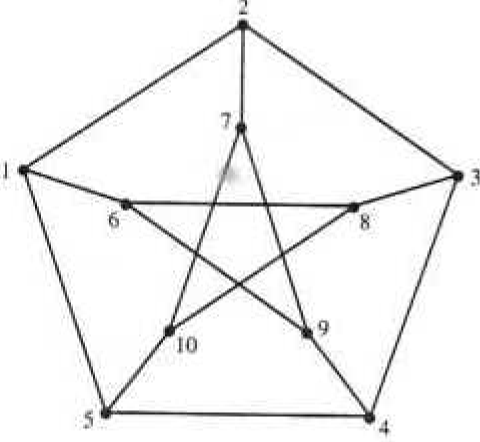
c.



d.



e.



f. Dibuje sus propias gráficas siguiendo las instrucciones anteriores.

12. Geología Una de las propiedades más importantes de las rocas deformadas es su deformación interna. Una medida de deformación está basada en la maclación mecánica de calcita. La forma inicial de la calcita se conoce como cristalografía de la calcita y se puede medir la forma de la deformación. Las medidas se hacen a partir de cortes delgados de muestras de la roca que contiene calcita. Se calculan ciertos números que representan las medidas de deformación respecto a un sistema de coordenadas determinado por el corte delgado, y se colocan en una matriz de 3×3. Los vectores propios de esta matriz representan las direcciones de los ejes principales de la deformación. Los valores propios asociados dan las magnitudes de las deformaciones en la dirección de los ejes principales, con los valores propios positivos se indica extensión y los valores propios negativos significan compresión.

a. Para cada una de las siguientes matrices de medidas de deformación, encuentre la dirección (vector unitario) del eje principal de máxima extensión y la dirección (vector unitario) del eje principal de máxima compresión:

$$A = \begin{pmatrix} -.01969633 & .01057339 & -.005030409 \\ .01057339 & .008020058 & -.006818069 \\ -.005030409 & -.006818069 & .01158627 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -.01470626 & .01001909 & -.004158314 \\ .01001901 & .007722046 & -.004482362 \\ -.004158314 & -.004482362 & .006984212 \end{pmatrix}$$

b. Para cada matriz del inciso a), encuentre el ángulo que forma el eje principal de máxima deformación compresiva con el eje x (en las coordenadas del corte delgado). [*Nota:* el eje x está representado por el vector $(1\ \ 0\ \ 0)^t$. Recuerde que el coseno del ángulo entre los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}/|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|$. Utilice la función **acos** de MATLAB y multiplique por $180/\pi$ para convertir a grados.]

c. En un pliegue, la deformación de maclación está relacionada con la deformación total del pliegue. La adecuación de un modelo de pliegue para explicar su estructura se puede probar usando los datos de deformación. Un modelo es el *deslizamiento simple paralelo a la estratificación*. (Aquí la estratificación es paralela al eje x en las coordenadas del corte delgado.) Para las localizaciones de las que se obtuvieron los datos del inciso a), el modelo de deslizamiento simple paralelo a la estratificación predice que el ángulo agudo entre las *rectas* determinadas por las capas (el eje x) y el eje principal de máxima deformación compresiva es bastante grande, cerca de 45° en muchos lugares. Usando los resultados del inciso b) argumente por qué este modelo es inadecuado para explicar la estructura de pliegues para el pliegue del que se obtuvieron los datos.

Reconocimiento. Los datos y las interpretaciones que forman la base de este problema se derivaron del trabajo del Dr. Richard Groshong, University of Alabama.

6.2 UN MODELO DE CRECIMIENTO DE POBLACIÓN (Opcional)

En esta sección se muestra la manera en que se puede usar la teoría de los valores y vectores propios para analizar un modelo de crecimiento de una población de pájaros.† Primero se estudiará un modelo sencillo de crecimiento de la población. Se supone que

† El material de esta sección está basado en un artículo de D. Cooke: "A 2×2 Matrix Model of Population Growth", *Mathematical Gazette* 61(416): 120-123.

cierta especie crece a una tasa constante; es decir, la población de la especie después de un periodo (que puede ser una hora, una semana, un mes, un año, etc.) es un múltiplo constante de la población del periodo anterior. Una forma de que esto suceda, por ejemplo, es que cada generación es distinta y cada organismo produce r críos y después muere. Si p_n denota la población después de n periodos, se puede tener

$$p_n = rp_{n-1}$$

Por ejemplo, este modelo puede describir una población de bacterias, donde, en un tiempo dado, un organismo se divide en dos organismos separados. Entonces $r = 2$. Sea p_0 la población inicial. Entonces $p_1 = rp_0$, $p_2 = rp_1 = r(rp_0) = r^2p_0$, $p_3 = rp_2 = r(r^2p_0) = r^3p_0$, y así sucesivamente, de manera que

$$p_n = r^np_0 \quad (1)$$

De este modelo se ve que la población aumenta sin cota si $r > 1$ y disminuye a cero si $r < 1$. Si $r = 1$ la población permanece en un valor constante p_0.

Es evidente que este modelo es simplista. Una objeción obvia es que el número de críos producidos depende, en muchos casos, de las edades de los adultos. Por ejemplo, en una población humana las hembras adultas de más de 50 años promedio sin duda producirán menos niños que las hembras de 21 años promedio. Para manejar esta dificultad, se introduce un modelo que permita agrupar por edades y asignar tasas de fertilidad diferentes.

Se estudiará un modelo de crecimiento de la población para una especie de pájaros. En esta población se supone que el número de pájaros hembras es igual al número de machos. Sea $p_{j,n-1}$ la población juvenil (inmadura) de hembras en el año $(n-1)$ y sea $p_{a,n-1}$ el número de hembras adultas en el mismo año. Algunos de los pájaros jóvenes morirán durante el año. Se supone que cierta proporción α de los pájaros jóvenes sobrevivirán para llegar a adultos en la primavera del año n. Cada hembra que sobrevive produce huevos en la primavera, los incuban y producen, en promedio, k pájaros hembras jóvenes en la siguiente primavera. Los adultos también mueren y la proporción de adultos que sobreviven de una primavera a la siguiente es β.

Esta tasa constante de supervivencia de los pájaros no es una suposición simplista. Parece que ocurre en la mayoría de las poblaciones de pájaros naturales que se han estudiado. Esto significa que la tasa de supervivencia de los adultos en muchas especies de pájaros es independiente de la edad. Quizá muy pocos pájaros en su hábitat natural sobreviven lo suficiente para exhibir los efectos de la edad. Más aún, en muchas especies la edad de la madre parece no influir en el número de críos.

En la notación introducida $p_{j,n}$ y $p_{a,n}$ representan, respectivamente, la población de hembras jóvenes y adultas en el año n. Incorporando toda la información se llega al siguiente sistema de 2×2:

$$\begin{aligned} p_{j,n} &= \phantom{\alpha p_{j,n-1} + {}} kp_{a,n-1} \\ p_{a,n} &= \alpha p_{j,n-1} + \beta p_{a,n-1} \end{aligned} \quad (2)$$

o

$$\mathbf{p}_n = A\mathbf{p}_{n-1} \quad (3)$$

donde $\mathbf{p}_n = \begin{pmatrix} p_{j,n} \\ p_{a,n} \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Es evidente de (3) que $\mathbf{p}_1 = A\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_2 = A\mathbf{p}_1 = A(A\mathbf{p}_0) = A^2\mathbf{p}_0, \ldots$, y así sucesivamente. Entonces

$$\boxed{\mathbf{p}_n = A^n\mathbf{p}_0} \tag{4}$$

donde $\mathbf{p}_0$ es el vector de las poblaciones iniciales de hembras jóvenes y adultas.

La ecuación (4) es parecida a la ecuación (1), pero ahora se puede distinguir entre las tasas de supervivencia de pájaros jóvenes y adultos.

EJEMPLO 1 **Una ilustración del modelo aplicado durante 20 generaciones** Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$. Esto significa que cada hembra adulta produce dos críos hembras y como se supone que el número de machos es igual al número de hembras, al menos cuatro huevos —y tal vez muchos más ya que es probable que las pérdidas de pajaritos recién nacidos sean altas. Del modelo se ve que α y β están en el intervalo [0, 1]. Como no es tan probable que sobrevivan los pájaros jóvenes como los adultos, se debe tener $\alpha < \beta$.

En la tabla 6.1 se supone que, en un principio, hay 10 hembras (y 10 machos) adultos y no hay jóvenes. Los cálculos se hicieron en una computadora, pero el trabajo no es demasiado oneroso con una calculadora de bolsillo. Por ejemplo, $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$ de manera que $p_{j,1} = 20$, $p_{a,1} = 5$, el total de población de hembras después de un

Tabla 6.1

Año n	Núm. de jóvenes $p_{j,n}$	Núm. de adultos $p_{a,n}$	Población total de hembras T_n en el año n	$p_{j,n}/p_{a,n}$†	T_n/T_{n-1}†
0	0	10	10	0	–
1	20	5	25	4.00	2.50
2	10	8	18	1.18	0.74
3	17	7	24	2.34	1.31
4	14	8	22	1.66	0.96
5	17	8	25	2.00	1.13
10	22	12	34	1.87	1.06
11	24	12	36	1.88	1.07
12	25	13	38	1.88	1.06
20	42	22	64	1.88	1.06

† Las cifras en estas columnas se obtuvieron antes de redondear los números en las columnas anteriores. Entonces, por ejemplo, en el año 2, $p_{j,2}/p_{a,2} = 10/8.5 \approx 1.176470588 \approx 1.18$.

año es 25 y la razón de hembras jóvenes a adultos es 4 a 1. En el segundo año $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8.5 \end{pmatrix}$, que se redondea a $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ ya que no se puede tener $8\frac{1}{2}$ pájaros adultos. La tabla 6.1 presenta las razones $p_{j,n}/p_{a,n}$ y las razones T_n/T_{n-1} del total de hembras en los años sucesivos. ✦

Se percibe en la tabla 6.1 que la razón $p_{j,n}/p_{a,n}$ se acerca a la constante 1.88 mientras que la población total parece aumentar a una tasa constante de 6% anual. Se verá si se puede determinar por qué ocurre esto.

Primero, regresamos al caso general [ecuación (4)]. Suponga que A tiene los valores propios reales distintos λ_1 y λ_2 con los vectores propios correspondientes $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Como $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes, forman una base para $\mathbb{R}^2$ y se puede escribir

$$\mathbf{p}_0 = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 \tag{5}$$

para algunos números reales a_1 y a_2. Entonces (4) se convierte en

$$\mathbf{p}_n = A^n(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2) \tag{6}$$

Pero $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ y $A^2\mathbf{v}_1 = A(A\mathbf{v}_1) = A(\lambda_1\mathbf{v}_1) = \lambda_1 A\mathbf{v}_1 = \lambda_1(\lambda_1\mathbf{v}_1) = \lambda_1^2\mathbf{v}_1$. Así, se puede ver que $A^n\mathbf{v}_1 = \lambda_1^n\mathbf{v}_1$, $A^n\mathbf{v}_2 = \lambda_2^n\mathbf{v}_2$ y de (6)

$$\mathbf{p}_n = a_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2 \tag{7}$$

La ecuación característica de A es $\begin{vmatrix} -\lambda & k \\ \alpha & \beta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \beta\lambda - k\alpha = 0$, o sea, $\lambda = (\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha k})/2$. Por suposición, $k > 0$, $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$. Entonces $4\alpha k > 0$ y $\beta^2 + 4\alpha k > 0$; esto significa que, sin duda, los valores propios son reales y diferentes y que un valor propio, λ_1, es positivo; el otro, λ_2, es negativo y $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. La ecuación (7) se puede escribir como

$$\mathbf{p}_n = \lambda_1^n\left[a_1\mathbf{v}_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n a_2\mathbf{v}_2\right] \tag{8}$$

Como $|\lambda_2/\lambda_1| < 1$, es evidente que $(\lambda_2/\lambda_1)^n$ se vuelve muy pequeña cuando n crece. Entonces para n grande

$$\mathbf{p}_n \approx a_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 \tag{9}$$

Esto quiere decir que, a la larga, la distribución de edades se estabiliza y es proporcional a $\mathbf{v}_1$. Cada grupo de edad cambiará por un factor de λ_1 cada año. Así, a la larga, la ecuación (4) actúa igual que la ecuación (1). En el corto plazo –es decir, antes de alcanzar la "estabilidad"– los números oscilan. La magnitud de esta oscilación depende de la magnitud de λ_2/λ_1 (que es negativa, con lo que se explica la oscilación).

EJEMPLO 1 (continuación) **Los valores y vectores propios de A determinan el comportamiento de generaciones futuras** Para $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$, se tiene $\lambda^2 - 0.5\lambda - 0.6 = 0$, o sea, $\lambda = (0.5 \pm$

$\sqrt{0.25 + 2.4})/2 = (0.5 \pm \sqrt{2.65})/2$ de manera que $\lambda_1 \approx 1.06$ y $\lambda_2 \approx -0.56$. Esto explica el 6% de aumento en la población que se observa en la última columna de la tabla 6.1. Correspondiente al valor propio $\lambda_1 = 1.06$, se calcula $(A - 1.06I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1.06 & 2 \\ 0.3 & -0.56 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o $1.06x_1 = 2x_2$ de manera que $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.53 \end{pmatrix}$ es un vector propio.

De manera similar, $(A + 0.56)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.56 & 2 \\ 0.3 & 1.06 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de modo que $0.56x_1 + 2x_2 = 0$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.28 \end{pmatrix}$ es un segundo vector propio. Observe que en $\mathbf{v}_1$ se tiene $1/0.53 \approx 1.88$. Esto explica la razón $p_{j,n}/p_{a,n}$ en la quinta columna de la tabla. ◆

Observación. En los cálculos anteriores se perdió la precisión porque se redondeó a sólo dos decimales de exactitud. Se obtiene una exactitud mayor usando una calculadora de mano o una computadora. Por ejemplo, al usar una calculadora, es fácil calcular

$\lambda_1 = 1.06394103$, $\lambda_2 = -0.5639410298$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.531970515 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.2819705149 \end{pmatrix}$

y se ve que la razón de $p_{j,n}$ a $p_{a,n}$ es $1/0.5319710515 \approx 1.879801537$.

Es notable con cuánta información se cuenta a partir de un sencillo cálculo de valores propios. Es de gran interés saber si la población eventualmente crecerá o decrecerá. Aumentará si $\lambda_1 > 1$, y la condición para que esto ocurra es $(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha k})/2 > 1$ o $\sqrt{\beta^2 + 4\alpha k} > 2 - \beta$ o $\beta^2 + 4\alpha k > (2 - \beta)^2 = 4 - 4\beta + \beta^2$. Esto conduce a $4\alpha k > 4 - 4\beta$, o sea

$$k > \frac{1 - \beta}{\alpha} \tag{10}$$

En el ejemplo 1 se tenía $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.3$; entonces (10) se cumple si $k > 0.5/0.3 \approx 1.67$.

Antes de cerrar esta sección deben hacerse notar dos limitaciones de este modelo:

i. Las tasas de nacimiento y muerte cambian con frecuencia de un año a otro y dependen particularmente del clima. Este modelo supone un medio ambiente constante.

ii. Los ecologistas han encontrado que para muchas especies las tasas de nacimiento y muerte varían con el tamaño de la población. En particular, una población no puede crecer cuando llega a cierto tamaño debido a los efectos de una alimentación limitada y a la sobrepoblación. Es evidente que una población no puede crecer en forma indefinida a una tasa constante. De otra manera, esa población dominaría la tierra.

PROBLEMAS 6.2

En los problemas 1 al 3 encuentre el número de pájaros hembras jóvenes y adultos después de 1, 2, 5, 10, 19 y 20 años. Después encuentre las razones a la larga de $p_{j,n}$ a $p_{a,n}$ y de T_n a T_{n-1}. [*Sugerencia:* Utilice las ecuaciones (7) y (9) y una calculadora y redondee a tres decimales.]

1. $\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$; $k = 3$, $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.6$
2. $\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix}$; $k = 1$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.4$
3. $\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}$; $k = 4$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.8$
4. Demuestre que si $\alpha = \beta$ y $\alpha > \frac{1}{2}$ entonces, a la larga, la población de pájaros aumentará siempre si cada hembra adulto produce al menos una hembra entre sus crios.
5. Demuestre que, a la larga, la razón $p_{j,n}/p_{a,n}$ se acerca al valor límite k/λ_1.
6. Suponga que se divide la población de pájaros adultos en dos grupos de edad: los que tienen entre 1 y 5 años de edad y los mayores de 5 años. Suponga que la tasa de supervivencia para los pájaros del primer grupo es β, mientras que para el segundo grupo es γ (y $\beta > \gamma$). Suponga que los pájaros del primer grupo se distribuyen en grupos del mismo tamaño en cuanto a su edad. (Esto es, si hay 100 pájaros en el grupo, 20 tienen 1 año, 20 tienen 2 años, etcétera.) Formule un modelo usando una matriz de 3×3 para representar esta situación.

MATLAB 6.2

1. Considere la población de pájaros dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ .4 & .6 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

   a. Encuentre el número de pájaros hembras adultos y jóvenes después de 2, 5, 10 y 20 años.
   b. Encuentre estas cantidades después de 21 años y calcule $p_{j,n}/p_{a,n}$ y T_n/T_{n-1} para $n = 21$. [*Sugerencia:* Use el comando **sum** de MATLAB para encontrar T_n.] Repita para $n = 22$, 23, 24 y 25. ¿Cuál es su conclusión para $\lim_{n\to\infty} p_{j,n}/p_{a,n}$ y $\lim_{n\to\infty} T_n/T_{n-1}$?
   c. Encuentre **[V,D] = eig(A)**. Verifique que el valor propio de mayor magnitud es positivo con multiplicidad algebraica 1, que existe un vector propio asociado cuyas componentes son todas positivas y que el otro valor propio es estrictamente menor en magnitud. Compare este valor propio mayor con $\lim_{n\to\infty} T_n/T_{n-1}$. Explique por qué estos números indican que la población está creciendo.

      Sea **w** el vector propio asociado con este valor propio mayor. Compare w_1/w_2 con $\lim_{n\to\infty} p_{j,n}/p_{a,n}$ y con k/λ, donde $k = 3$ y λ es el valor propio de mayor magnitud. Escriba una conclusión sobre estas comparaciones.

2. Considere la población de pájaros dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ .3 & .15 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

a. Calcule **[V,D] = eig(A)** y use esta información para encontrar $\lim_{n\to\infty} p_{j,n}/p_{a,n}$ y $\lim_{n\to\infty} T_n/T_{n-1}$. Explique qué propiedades de V y D justifican su procedimiento.

b. Demuestre que las razones $p_{j,n}/p_{a,n}$ y T_n/T_{n-1} todavía no se han estabilizado después de 25 años. Calcule las razones para $n = 46$ a 50 y demuestre que después de 50 años se estabilizan.

c. (*Lápiz y papel*) Verifique que para esta población el segundo valor propio (el de menor magnitud) esté más cercano al valor propio de mayor magnitud que en el problema 1 de esta sección de MATLAB. Describa de qué manera esto explica por qué las razones de población tardan más en estabilizarse.

3. Suponga que la información que sigue representa una población de venados hembras:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ .6 & .8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

a. Demuestre que a la larga la población crecerá por un factor aproximado de 1.27. Justifique su procedimiento.

b. (*Lápiz y papel*) Los granjeros y otras personas del área no quieren que la población crezca. Pueden controlar la población "cosechándola" (permitiendo la caza). Si h es la proporción de población cosechada en cada periodo, analice por qué la matriz de este modelo sería

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ .6 & .8 - h \end{pmatrix}$$

c. Demuestre que $h = .6$ es una cosecha demasiado grande; es decir, la población de venados se extinguiría. (Las personas del área no quieren que se extinga.) Dé dos argumentos sobre esto: analizando $A^n\mathbf{p}_0$ cuando n crece y analizando los valores propios.

d. Es posible seleccionar h de manera que la población no crezca ni desaparezca. Experimente con varios valores de h: examine $A^n\mathbf{p}_0$ cuando n crece y examine los valores propios de A. ¿Qué se puede decir sobre los valores propios de A cuando se encuentra la h deseada?

e. (*Lápiz y papel*) Explique los resultados observados en el inciso d) en términos de la teoría presentada en esta sección.

4. Considere una población de pájaros (hembras) agrupados en tres clases de edad: jóvenes, 1 a 5 años y más de 5 años. Suponga que la matriz A siguiente es un modelo para el crecimiento de la población y que $\mathbf{p}_0$ es el vector de población inicial, donde el primer renglón representa a los jóvenes; el segundo al grupo de edad entre 1 y 5 años y el tercero al de más de 5 años.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ .6 & 0 & 0 \\ 0 & .6 & .4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

a. (*Lápiz y papel*) Explique lo que representa cada elemento de la matriz A.

b. Calcule cuántos pájaros (hembras) de cada grupo habrá en la población después de 30 años. Para $n = 31$ a 35 encuentre, usando el comando **sum** de MATLAB, T_n/T_{n-1} y $\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n/\textbf{sum}(\mathbf{v}_n)$, donde $\mathbf{v}_n = A^n\mathbf{p}_0$. Explique cómo $\mathbf{w}_n$ da la proporción de la población total en cada grupo después de n años.

¿Cuál parece ser el valor de $\lim_{n\to\infty} T_n/T_{n-1}$? ¿Cuál es la interpretación de este límite? ¿Cuál parece ser el valor de $\lim_{n\to\infty} \mathbf{w}_n$? ¿Cuál es la interpretación de este límite?

c. Encuentre **[V,D] = eig(A)**. Verifique que existe un valor propio positivo de mayor magnitud y con multiplicidad 1 (y que los otros valores propios son estrictamente menores en magnitud) y que este valor propio "mayor" tiene un vector propio asociado cuyas componentes son todas positivas. Encuentre **zz = z/sum(z)**, donde **z** es el vector

propio asociado con el valor propio más grande. Compare el valor propio con el límite proyectado de T_n/T_{n-1} del inciso b) y compare **zz** con el límite de $\mathbf{w}_n$. Describa las conclusiones que pueda obtener de esta comparación.

d. (*Lápiz y papel*) Extienda la teoría presentada en esta sección, dé un argumento para explicar sus observaciones sobre los incisos anteriores de este problema.

5. a. Vuelva a trabajar en el problema 14, incisos a) a c) de MATLAB 1.6. Por construcción, la matriz P en este problema es **estocástica**; es decir, los elementos en cada columna de P suman 1.

b. Encuentre **[V,D] = eig(P)**. Verifique que existe un valor propio positivo de mayor magnitud con multiplicidad 1 (y que los otros valores propios son estrictamente menores en magnitud) y que este valor propio "mayor" tiene un vector propio asociado cuyas componentes son todas positivas. ¿Cuál es el mayor valor propio? ¿Cómo explica el comportamiento observado en el inciso a), es decir, el hecho de que parezca que $P^n\mathbf{x}$ converge a un vector fijo **y**?

Encuentre 3000**z/sum(z)**, donde **z** es el vector propio asociado con el valor propio mayor. ¿Cuál es su comparación con el vector límite **y**? ¿Cuál es la interpretación de **y**?

c. Usando los valores y vectores propios encontrados en el inciso b), encuentre la distribución de automóviles a la larga para el problema 14g) de MATLAB 1.6. Justifique su procedimiento. Verifique su respuesta calculando $P^n\mathbf{x}$ cuando n crece, donde P es la matriz estocástica que modela el problema y **x** es algún vector de distribución inicial de automóviles cuyas componentes suman 1000.

d. (*Lápiz y papel*) Suponga que P es una matriz estocástica de 3×3; es decir, los elementos en cada *columna* de P suman 1. Argumente por qué

$$P^t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

¿Qué dice esto sobre los valores propios de P^t? A su vez, ¿qué dice esto sobre los valores propios de P? ¿Qué relevancia tiene esto en los incisos anteriores de este problema?

6. Teoría de gráficas La definición de **matriz de adyacencia** y otras definiciones relacionadas se encuentran en el problema 11 de MATLAB 6.1. Para gráficas conexas, la matriz de adyacencia tiene las propiedades de que todos los valores propios son reales, de que existe un valor propio positivo de mayor magnitud, λ_1, con multiplicidad algebraica 1, de que existe un vector propio asociado cuyas componentes son todas positivas y de que los otros valores propios son estrictamente menores en magnitud. Así, se tendría que, para un vector dado **x**, $A^n\mathbf{x} \approx \lambda_1^n a_1\mathbf{u}_1$ para n grande, donde $\mathbf{u}_1$ es el vector propio asociado con λ_1. (Aquí a_1 es la coordenada de **x** respecto a la base de vectores propios que contiene a $\mathbf{u}_1$ como el primer vector de la base.)

a. (*Lápiz y papel*) Explique por qué se puede concluir que la razón de una componente de $A^n\mathbf{x}$ entre la suma de las componentes es aproximadamente igual a la razón de la componente correspondiente de $\mathbf{u}_1$ entre la suma de sus componentes.

b. (*Lápiz y papel*) $(A^n)_{ij}$ se puede interpretar como el número de trayectorias de longitud n que conectan el vértice i con el vértice j. (Vea la sección 1.12. Por ejemplo, una trayectoria de longitud 2 que conecta a i con j consistiría en una arista que conecta a i con algún vértice k y después una arista que conecta al vértice k con j.) Si **x** es un vector con componentes iguales a 1, explique por qué la i-ésima componente de $A^n\mathbf{x}$ representa el número total de trayectorias de longitud n que conectan al vértice i con todos los

demás vértices. Explique cómo se puede concluir que las razones de las componentes de $A^n\mathbf{x}$ entre la suma de las componentes da alguna indicación de la "*importancia*" relativa de los vértices de la gráfica. Explique por qué y cómo se pueden usar las razones de las componentes de $\mathbf{u}_1$ entre la suma de las componentes como un índice de la "*importancia*" de cada vértice de la gráfica. (Un argumento más sofisticado para el uso del vector propio correspondiente al valor propio de mayor magnitud se conoce como el **índice de Gold**).

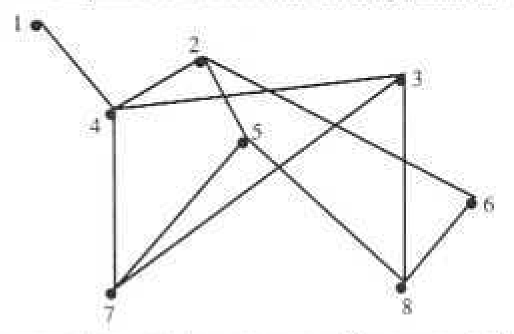
c. Para cada una de las gráficas siguientes, verifique que la matriz de adyacencia tenga las propiedades establecidas en la presentación anterior al inciso a) y analice la "*importancia*" relativa de los vértices de la gráfica. Para las gráficas *i*) a *iii*), use su intuición para argumentar, viendo la gráfica, por qué tienen sentido sus resultados. [*Nota:* para que sea sencilla la introducción de la matriz de adyacencia, consulte la presentación del problema 2 de MATLAB 1.5.]

i. La gráfica en el problema 11a) de MATLAB 6.1.

ii. La gráfica en el problema 11b) de MATLAB 6.1.

iii. La gráfica en el problema 11c) de MATLAB 6.1.

iv. Suponga que consideramos la siguiente gráfica como la representación de las rutas de líneas aéreas entre ciudades. Una compañía desea elegir una ciudad para localizar su oficina matriz. Después de analizar la gráfica, escriba un informe al director de la compañía con su recomendación (y justificación).



PROBLEMA PROYECTO

v. Dibuje un mapa de su estado, cree una gráfica cuyos vértices sean las ciudades importantes y cuyas aristas sean las carreteras principales que las conectan. Determine la "*importancia*" relativa de cada ciudad. Justifique y explique su procedimiento.

6.3 MATRICES SEMEJANTES Y DIAGONALIZACIÓN

En esta sección se describe una relación interesante y útil que se puede cumplir entre dos matrices.

DEFINICIÓN 1 **Matrices semejantes** Se dice que dos matrices A y B de $n \times n$ son **semejantes** si existe una matriz invertible C de $n \times n$ tal que

$$\boxed{B = C^{-1}AC} \tag{1}$$

Transformación de semejanza

La función definida por (1) que lleva la matriz A en la matriz B se llama **transformación de semejanza**. Se puede escribir esta transformación lineal como

$$T(A) = C^{-1}AC$$

Nota. $C^{-1}(A_1 + A_2)C = C^{-1}A_1C + C^{-1}A_2C$ y $C^{-1}(\alpha A)C = \alpha C^{-1}AC$ de manera que la función definida por (1) es, de hecho, una transformación lineal. Esto explica el uso de la palabra "transformación".

El propósito de esta sección es demostrar que: 1) las matrices semejantes tienen varias propiedades importantes comunes y 2) la mayoría de las matrices son semejantes a las matrices diagonales. (Vea la observación en la página 569.)

Nota. Suponga que $B = C^{-1}AC$. Entonces al multiplicar por la izquierda por C, se obtiene $CB = CC^{-1}AC$, o sea

$$CB = AC \tag{2}$$

La ecuación (2) con frecuencia se toma como una definición alternativa de semejanza:

> **Definición alternativa de semejanza**
> A y B son semejantes si y sólo si existe una matriz invertible C tal que
> $CB = AC$

EJEMPLO 1 **Dos matrices semejantes** Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $CB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Así, $CB = AC$. Como $\det C = 1 \neq 0$, C es invertible. Esto muestra, por la ecuación (2), que A y B son semejantes. ✦

EJEMPLO 2 **Una matriz semejante a una matriz diagonal** Sea $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -25 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. C es invertible porque $\det C = 3 \neq 0$. Después calculamos:

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & -3 & -25 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

Entonces $CA = DC$ y $A = C^{-1}DC$, por lo tanto A y D son semejantes. ♦

Nota. En los ejemplos 1 y 2 no fue necesario calcular C^{-1}. Sólo fue necesario saber que C era no singular.

TEOREMA 1 Si A y B son matrices semejantes de $n \times n$, entonces A y B tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, tienen los mismos valores propios.

Demostración Como A y B son semejantes, $B = C^{-1}AC$ y

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det(C^{-1}AC - \lambda I) = \det[C^{-1}AC - C^{-1}(\lambda I)C] \\ &= \det[C^{-1}(A - \lambda I)C] = \det(C^{-1})\det(A - \lambda I)\det(C) \\ &= \det(C^{-1})\det(C)\det(A - \lambda I) = \det(C^{-1}C)\det(A - \lambda I) \\ &= \det I \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I) \end{aligned}$$

Esto significa que A y B tienen la misma ecuación característica, y como los valores propios son raíces de la ecuación característica, tienen los mismos valores propios. ♦

EJEMPLO 3 **Los valores propios de matrices semejantes son los mismos** En el ejemplo 2 es obvio que los valores propios de $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ son 1, −1 y 2. Entonces éstos son los valores propios de $A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -25 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Verifique esto viendo si se cumple que $\det(A - I) = \det(A + I) = \det(A - 2I) = 0$. ♦

En muchas aplicaciones resulta útil "diagonalizar" una matriz A, es decir, encontrar una matriz diagonal semejante a A.

DEFINICIÓN 2 **Matriz diagonalizable** Una matriz A de $n \times n$ es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D.

Observación. Si D es una matriz diagonal, entonces los valores propios son sus componentes en la diagonal (vea la página 541). Si A es semejante a D, entonces A y D tienen los mismos valores propios (por el teorema 1). Uniendo estos dos hechos se

observa que si A es diagonalizable, entonces A es semejante a una matriz diagonal cuyas componentes en la diagonal son los valores propios de A.

El siguiente teorema establece cuándo una matriz es diagonalizable.

TEOREMA 2 Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores propios linealmente independientes. En tal caso, la matriz diagonal D semejante a A está dada por

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A. Si C es una matriz cuyas columnas son vectores propios linealmente independientes de A, entonces

$$\boxed{D = C^{-1}AC} \qquad \textbf{(3)}$$

Demostración Primero se supone que A tiene n vectores propios linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ que corresponden a los valores propios (no necesariamente diferentes) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Sea

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \ \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}$$

y sea

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces C es invertible ya que sus columnas son linealmente independientes. Ahora bien

$$AC = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

y se ve que la columna i de AC es $A\begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix} = A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$. Así, AC es la matriz cuya columna i es $\lambda_i\mathbf{v}_i$ y

$$AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_2 c_{12} & \cdots & \lambda_n c_{1n} \\ \lambda_1 c_{21} & \lambda_2 c_{22} & \cdots & \lambda_n c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 c_{n1} & \lambda_2 c_{n2} & \cdots & \lambda_n c_{nn} \end{pmatrix}$$

Pero

$$CD = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_2 c_{12} & \cdots & \lambda_n c_{1n} \\ \lambda_1 c_{21} & \lambda_2 c_{22} & \cdots & \lambda_n c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 c_{n1} & \lambda_2 c_{n2} & \cdots & \lambda_n c_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$AC = CD \tag{4}$$

y como C es invertible, se pueden multiplicar ambos lados de (4) por la izquierda por C^{-1} para obtener

$$D = C^{-1}AC \tag{5}$$

Esto prueba que si A tiene n vectores propios linealmente independientes, entonces A es diagonalizable. Inversamente, suponga que A es diagonalizable; esto es, suponga que (5) se cumple para alguna matriz invertible C. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ las columnas de C. Entonces $AC = CD$, e invirtiendo los argumentos anteriores, se ve de inmediato que $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son los vectores propios de A y son linealmente independientes porque C es invertible. ✦

Notación. Para indicar que D es la matriz diagonal con componentes diagonales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, se escribirá $D = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

El teorema 2 tiene un corolario útil que se deduce directamente del teorema 6.1.3, página 535.

COROLARIO Si la matriz A de $n \times n$ tiene n valores propios diferentes, entonces A es diagonalizable. ◆

Observación. Si se seleccionan al azar los coeficientes reales de un polinomio de grado n entonces, con probabilidad 1, el polinomio tendrá n raíces diferentes. No es difícil ver, intuitivamente, por qué se cumple esto. Si $n = 2$, por ejemplo, entonces la ecuación $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ tiene raíces reales si y sólo si $a^2 = 4b$ —un evento muy improbable si a y b se eligen aleatoriamente. Por supuesto, se pueden escribir polinomios que tienen raíces de multiplicidad algebraica mayor que 1, pero son excepcionales. Por lo tanto, sin pretender precisión matemática, es posible decir que la *mayoría* de los polinomios tienen raíces distintas. Así, la *mayoría* de las matrices tienen valores propios distintos y como se estableció al principio de esta sección, la *mayor parte* de las matrices son diagonalizables.

EJEMPLO 4 **Diagonalización de una matriz de 2 × 2** Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. En el ejemplo 6.1.3, página 538 se encontraron dos vectores propios linealmente independientes $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Después, haciendo $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, se encontró que

$$C^{-1}AC = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

que es la matriz cuyas componentes en la diagonal son los valores propios de A. ◆

EJEMPLO 5 **Diagonalización de una matriz de 3 × 3 con tres valores propios distintos** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. En el ejemplo 6.1.4, página 538, se calcularon tres vectores propios linealmente independientes $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$C^{-1}AC = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

con valores propios 1, −2 y 3. ✦

Observación. Como existe un número infinito de maneras en que se puede elegir un vector propio, existe un número infinito de maneras de escoger la matriz de diagonalización C. El único consejo es elegir los vectores propios y la matriz C que sean los de más sencillo manejo aritmético. En general, esto quiere decir que debe insertarse el mayor número de ceros y unos posible.

EJEMPLO 6 **Diagonalización de una matriz de 3 × 3 con dos valores propios distintos y tres vectores propios linealmente independientes** Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces, del ejemplo 6.1.10, página 542, se tienen tres vectores propios linealmente independientes $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Estableciendo $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se obtiene

$$C^{-1}AC = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & 2 \\ 16 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -72 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Este ejemplo ilustra que A es diagonalizable aun cuando sus valores propios no sean diferentes. ✦

EJEMPLO 7 **Una matriz de 2 × 2 con sólo un vector propio linealmente independiente que no se puede diagonalizar** Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. En el ejemplo 6.1.9, página 542, se vio que A

no tiene dos vectores propios linealmente independientes. Suponga que A fuera diagonalizable (lo que contradice el teorema 2). Entonces $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y existiría una matriz invertible C tal que $C^{-1}AC = D$. Multiplicando esta ecuación por la izquierda por C y por la derecha por C^{-1}, se encuentra que $A = CDC^{-1} = C\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}C^{-1} = C(4I)C^{-1} = 4CIC^{-1} = 4CC^{-1} = 4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = D$. Pero $A \neq D$ y por lo tanto no existe tal C. ◆

Se ha visto que muchas matrices son semejantes a las matrices diagonales. Sin embargo, quedan dos preguntas pendientes:

i. ¿Es posible determinar si una matriz dada es diagonalizable sin calcular los valores y vectores propios?

ii. ¿Qué se hace si A no es diagonalizable?

En la siguiente sección se dará una respuesta parcial a la primera pregunta y una respuesta completa a la segunda en la sección 6.6. En la sección 6.7 se verá una aplicación importante del procedimiento de diagonalización.

Al principio de este capítulo se definieron los valores y vectores propios para una transformación lineal $T: V \to V$, donde dim $V = n$. Se estableció después que T se puede representar por una matriz de $n \times n$, se limitará el análisis a los valores y vectores propios de matrices de $n \times n$.

Sin embargo, la transformación lineal se puede representar mediante muchas matrices de $n \times n$ diferentes –una para cada base elegida. ¿Tienen los mismos valores propios estas matrices? La respuesta es sí, y se demuestra en el siguiente teorema.

TEOREMA 3 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con bases $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $B_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$. Sea $T: V \to V$ una transformación lineal. Si A_T es la representación matricial de T respecto a la base B_1 y si C_T es la representación matricial de T respecto a la base B_2, entonces A_T y C_T son semejantes.

Demostración T es una transformación lineal de V en sí mismo. Del teorema 5.3.3, página 490, se tiene

$$(T\mathbf{x})_{B_1} = A_T(\mathbf{x})_{B_1} \tag{6}$$

y

$$(T\mathbf{x})_{B_2} = C_T(\mathbf{x})_{B_2} \tag{7}$$

Sea M la matriz de transición de B_1 a B_2. Entonces por el teorema 4.8.1, página 376

$$(\mathbf{x})_{B_2} = M(\mathbf{x})_{B_1} \tag{8}$$

para todo **x** en V. Además,

$$(T\mathbf{x})_{B_2} = M(T\mathbf{x})_{B_1} \tag{9}$$

Sustituyendo (8) y (9) en (7) se llega a

$$M(T\mathbf{x})_{B_1} = C_T M(\mathbf{x})_{B_1} \tag{10}$$

La matriz M es invertible por el resultado del teorema 4.8.2, página 377. Si se multiplican ambos lados de (10) por M^{-1} (que es la matriz de transición de B_2 a B_1), se obtiene

$$(T\mathbf{x})_{B_1} = M^{-1}C_T M(\mathbf{x})_{B_1} \tag{11}$$

Comparando (6) y (11), se tiene

$$A_T(\mathbf{x})_{B_1} = M^{-1}C_T M(\mathbf{x})_{B_1} \tag{12}$$

Como (12) se cumple para toda $\mathbf{x} \in V$, se concluye que

$$A_T = M^{-1}C_T M$$

Es decir, A_T y C_T son semejantes. ✦

PROBLEMAS 6.3

Autoevaluación

Falso-verdadero

I. Si una matriz de $n \times n$ tiene n valores propios diferentes, se puede diagonalizar.

II. Si la matriz A de 5×5 tiene tres valores propios diferentes, entonces A no puede ser semejante a la matriz diagonal.

III. Si A es semejante a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, entonces sus valores propios son 1, 2 y 3.

En los problemas 1 al 15 determine si la matriz dada A es diagonalizable. Si lo es, encuentre una matriz C tal que $C^{-1}AC = D$. Verifique que $AC = CD$ y que los elementos distintos de cero de D sean los valores propios de A.

1. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Respuestas a la autoevaluación

I. V **II.** F **III.** V

7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

16. Demuestre que si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

17. Si A es semejante a B, demuestre que A^n es semejante a B^n para cualquier entero positivo n.

*18. Si A es semejante a B, demuestre que $\rho(A) = \rho(B)$ y $\nu(A) = \nu(B)$. [*Sugerencia:* Primero demuestre que si C es invertible, entonces $\nu(CA) = \nu(A)$ demostrando que $\mathbf{x} \in N_A$ si y sólo si $\mathbf{x} \in N_{CA}$. Después demuestre que $\rho(AC) = \rho(A)$ demostrando que $R_A = R_{AC}$. Concluya que $\rho(AC) = \rho(CA) = \rho(A)$. Por último, use el hecho de que C^{-1} es invertible para demostrar que $\rho(C^{-1}AC) = \rho(A)$.]

19. Sea $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule D^{20}.

20. Si A es semejante a B, demuestre que $\det A = \det B$.

21. Suponga que $C^{-1}AC = D$. Demuestre que para cualquier entero n, $A^n = CD^nC^{-1}$. Esto proporciona una forma sencilla para calcular las potencias de una matriz diagonalizable.

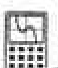
22. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Calcule A^{20}. [*Sugerencia:* Encuentre C tal que $A = CDC^{-1}$.]

*23. Sea A una matriz de $n \times n$ cuya ecuación característica es $(\lambda - c)^n = 0$. Demuestre que A es diagonalizable si y sólo si $A = cI$.

24. Use el resultado del problema 21 y el ejemplo 6 para calcular A^{10}, si $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

*25. Sean A y B dos matrices reales de $n \times n$ con valores propios distintos. Demuestre que $AB = BA$ si y sólo si A y B tienen los mismos vectores propios.

26. Si A es diagonalizable, demuestre que $\det A = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A.



MANEJO DE CALCULADORA

TI-85

Es sencillo diagonalizar una matriz en la TI-85. Se comienza con la matriz A de $n \times n$ y se encuentran sus valores y vectores propios. Si se tienen n vectores propios linealmente independientes (lo que debe ocurrir si A tiene n valores propios distintos), entonces A es diagonalizable. La TI-85 da los vectores propios como columnas de una matriz. Almacene esta matriz

en la memoria C, por ejemplo. Después la siguiente secuencia de teclas dará como resultado una matriz diagonal cuyas componentes son los valores propios de A.

ALPHA C 2nd x^{-1} × ALPHA A × ALPHA C ENTER

Antes de presionar ENTER se despliega $C^{-1} * A * C$.

Observe que, como en la página 550, un número como −2.2E − 13 es en realidad un cero. Note además que una vez almacenada la matriz C, se puede determinar si sus columnas (vectores propios) son linealmente independientes calculando ya sea su determinante (que será diferente de cero) o su rango (que será igual a n).

En los problemas 27 al 30 encuentre una matriz C tal que $C^{-1}AC$ sea una matriz diagonal.

27. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 102 & -11 & 56 \\ 38 & -49 & 75 \\ 83 & 123 & -67 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} -0.031 & 0.082 & 0.095 \\ -0.046 & 0.067 & -0.081 \\ 0.055 & -0.077 & 0.038 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 13 & 16 & 12 & 14 & 18 \\ 26 & 21 & 19 & 27 & 16 \\ 31 & 29 & 37 & 41 & 56 \\ 51 & 38 & 29 & 46 & 33 \\ 61 & 41 & 29 & 38 & 50 \end{pmatrix}$

MATLAB 6.3

1. Vuelva a trabajar en el problema 8 de MATLAB 6.1
2. Genere tres matrices aleatorias de 4 × 4 y tres matrices aleatorias de 5 × 5. Encuentre los valores y vectores propios de cada una usando **[V,D] = eig(A)**.
   a. ¿Con qué frecuencia son distintos los valores propios? ¿Por qué piensa que esto es cierto?
   b. Para las matrices para las que V es invertible, verifique que $A = VDV^{-1}$.
3. a. Para la matriz en el problema 1 de MATLAB 6.1, usando la información que da el problema (no use **eig**), verifique que los vectores propios forman una base para $\mathbb{R}^3$ y encuentre matrices C y D, con D diagonal, tales que $A = CDC^{-1}$. Confirme su respuesta verificando que $A = CDC^{-1}$.
   b. Siga las instrucciones del inciso a), pero use la matriz y la información del problema 2 de MATLAB 6.1. [En éste caso los vectores propios formarán una base para $\mathbb{C}^4$.]
4. a. Considere la matriz A dada enseguida

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Forme **d = eig(A)** y **dd = d.^20**. (Observe el punto antes de "^", es importante.) Forme **E = diag(dd)**. Encuentre **[V,D] = eig(A)**. Verifique que $E = D^{20}$. Explique por qué se cumple esto. Demuestre que $A^{20} = VEV^{-1}$.

b. Repita las instrucciones del inciso a) para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9.5 & -2 & -10.5 \\ -10 & -42.5 & 10 & 44.5 \\ 6 & 23.5 & -5 & -24.5 \\ -10 & -43 & 10 & 45 \end{pmatrix}$$

c. (*Lápiz y papel*) Trabaje el problema 21 anterior.

5. Geometría Una matriz A de $n \times n$ define una transformación lineal T de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Nos interesa describir la geometría de esas transformaciones lineales.

a. (*Lápiz y papel*) Si $\mathbf{x}$ es un vector propio de A con valor propio λ entonces $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Si $\lambda > 0$, ¿cuál es la interpretación geométrica del efecto de la transformación lineal sobre $\mathbf{x}$?

b. (*Lápiz y papel*) Explique por qué y cómo es cierta la siguiente afirmación. Si A es diagonalizable con valores propios positivos, entonces la geometría de la transformación lineal dada por A se puede describir por completo en términos de expansiones y compresiones a lo largo de los vectores de una base.

c. Verifique que la siguiente matriz es diagonalizable con valores propios positivos. Describa la geometría [en el sentido del inciso b)] de esta matriz. Usando esta información, bosqueje la imagen (después de aplicar la transformación determinada por la matriz) del rectángulo con vértices en $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ y $(-1, -1)$. Describa su razonamiento. (Si desea una descripción, quizá mejor, de los vectores propios que la dada por **eig**, encuentre la forma reducida por renglones de $A - \lambda I$, donde λ es un valor propio.)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

d. Para cada matriz A dada, verifique que A es diagonalizable con valores propios positivos. Escriba una descripción de la geometría igual que en el inciso b).

i. $A = \begin{pmatrix} 15 & -31 & 17 \\ 20.5 & -44 & 24.5 \\ 26.5 & -58 & 32.5 \end{pmatrix}$

ii. Sea B una matriz aleatoria real de 3×3 y sea $A = B'B$.

6. Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -10 \\ 50 & -23 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ .5 & 5.5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -11 & 7 \\ -2 & 1 & 2 \\ -6 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 26 & -68 & 40 \\ 19 & -56 & 35 \\ 15 & -50 & 33 \end{pmatrix}$$

a. Para cada matriz A, encuentre **e = eig(A)** y **d = det(A)**. Explique por qué A es diagonalizable. Obtenga una conclusión sobre la relación entre los valores propios de A y el determinante de A.

b. Pruebe su conclusión con las matrices dadas en los problemas 1 y 2 de MATLAB 6.1.

c. (*Lápiz y papel*) Complete la siguiente afirmación con su conclusión y después demuéstrela: si A es diagonalizable, entonces $\det(A)$ es _____.

6.4 MATRICES SIMÉTRICAS Y DIAGONALIZACIÓN ORTOGONAL

En esta sección se verá que las matrices simétricas reales[†] tienen varias propiedades importantes. En particular, se demuestra que cualquier matriz simétrica real tiene n vectores propios reales linealmente independientes y, por lo tanto, por el teorema 6.3.2, es diagonalizable. Se comenzará demostrando que los valores propios de una matriz simétrica real son reales.

TEOREMA 1 Sea A una matriz simétrica real de $n \times n$. Entonces los valores propios de A son reales.

Demostración[‡] Sea λ un valor propio de A con vector propio $\mathbf{v}$; es decir, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. El vector $\mathbf{v}$ está en $\mathbb{C}^n$, y el producto interno en $\mathbb{C}^n$ (vea la definición 4.11.1, página 439, y el ejemplo 4.11.2) satisface

$$(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{y} \quad (\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = \overline{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{1}$$

Entonces

$$(A\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \tag{2}$$

Más aún, por el teorema 5.5.1, página 519, y el hecho de que $A^t = A$

$$(A\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, A^t\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, A\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \lambda\mathbf{v}) = \overline{\lambda}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \tag{3}$$

Igualando (2) y (3) se tiene

$$\lambda(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \overline{\lambda}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \tag{4}$$

Pero $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|^2 \neq 0$, ya que $\mathbf{v}$ es un vector propio. Entonces se puede dividir ambos lados de (4) entre $(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ para obtener

$$\lambda = \overline{\lambda} \tag{5}$$

Si $\lambda = a + ib$, entonces $\overline{\lambda} = a - ib$ y de 5 se tiene

$$a + ib = a - ib \tag{6}$$

lo que se cumple sólo si $b = 0$. Esto muestra que $\lambda = a$; por lo tanto λ es real y la demostración queda completa. ◆

Se vio en el teorema 6.1.3, página 536, que los vectores propios correspondientes a valores propios diferentes son linealmente independientes. Para matrices simétricas reales el resultado es más poderoso: *los vectores propios de una matriz simétrica real correspondientes a valores propios diferentes son ortogonales.*

† Recuerde que A es simétrica si y sólo si $A^t = A$.

‡ Esta demostración usa material de las secciones 4.11 y 5.5 y debe omitirse si no se cubrieron.

TEOREMA 2 Sea A una matriz simétrica real de $n \times n$. Si λ_1 y λ_2 son valores propios diferentes con vectores propios reales correspondientes $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, entonces $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son ortogonales.

Demostración Se calcula

$$A\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \lambda_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \lambda_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \tag{7}$$

y

$$A\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot A^t\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot (\lambda_2\mathbf{v}_2) = \lambda_2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \tag{8}$$

Combinando (7) y (8), se tiene $\lambda_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = \lambda_2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)$ y como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se concluye que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Esto es lo que se quería demostrar. ✦

Ahora se establecerá el resultado principal de esta sección. Su demostración, que es difícil (y opcional), está dada al final de esta sección.

TEOREMA 3 Sea A una matriz simétrica real de $n \times n$. Entonces A tiene n vectores propios reales ortonormales. ✦

Observación. De este teorema se sigue que la multiplicidad geométrica de cada valor propio de A es igual a su multiplicidad algebraica.

El teorema 3 dice que si A es simétrica, entonces $\mathbb{R}^n$ tiene una base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ que consiste en vectores propios ortonormales de A. Sea Q la matriz cuyas columnas son $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$. Entonces por el teorema 4.9.3, página 399, Q es una matriz ortogonal. Esto lleva a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1 **Matriz diagonalizable ortogonalmente** Se dice que una matriz A de $n \times n$ es **diagonalizable ortogonalmente** si existe una matriz ortogonal Q tal que

$$\boxed{Q^tAQ = D} \tag{9}$$

donde $D = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son valores propios de A.

Nota. Recuerde que Q es ortogonal si $Q^t = Q^{-1}$; por lo tanto (9) se puede escribir como $Q^{-1}AQ = D$.

TEOREMA 4 Sea A una matriz real de $n \times n$. Entonces A es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si A es simétrica.

Demostración Sea A simétrica. Entonces por los teoremas 2 y 3, A es diagonalizable ortogonalmente con la matriz Q cuyas columnas son los vectores propios dados en el teorema 3. Inversamente, suponga que A es diagonalizable ortogonalmente. Entonces existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^tAQ = D$. Multiplicando esta ecuación por la izquierda por Q y por la derecha por Q^t, y usando el hecho de que $Q^tQ = QQ^t = I$, se obtiene

$$A = QDQ^t \tag{10}$$

Entonces $A^t = (QDQ^t)^t = (Q^t)^tD^tQ^t = QDQ^t = A$. Así, A es simétrica y el teorema queda demostrado. En la última serie de ecuaciones se usaron los hechos de que $(AB)^t = B^tA^t$ [parte *ii*) del teorema 1.9.1, página 122], $(A^t)^t = A$ [parte *i*) del teorema 1.9.1] y $D^t = D$ para cualquier matriz diagonal D. ✦

Antes de dar ejemplos, se proporciona el siguiente procedimiento de tres pasos para encontrar la matriz ortogonal Q que diagonaliza la matriz simétrica A.

Procedimiento para encontrar una matriz diagonalizante Q

i. Encuentre una base para cada espacio propio de A.

ii. Encuentre una base ortonormal para cada espacio propio de A usando el proceso de Gram-Schmidt o algún otro.

iii. Escriba Q como la matriz cuyas columnas son los vectores propios ortonormales obtenidos en el paso *ii*).

EJEMPLO 1 **Diagonalización de una matriz simétrica de 2 × 2 usando una matriz ortogonal**

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces la ecuación característica de A es $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$, que tiene dos raíces $\lambda = (4 \pm \sqrt{20})/2 = (4 \pm 2\sqrt{5})/2 = 2 \pm \sqrt{5}$. Para $\lambda_1 = 2 - \sqrt{5}$ se obtiene $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} & -2 \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Un vector propio es $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$ y $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{2^2 + (-1+\sqrt{5})^2} = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Después, para $\lambda_2 = 2 + \sqrt{5}$ se calcula $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} & -2 \\ -2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 =$

$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$. Observe que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ (lo que debe ser cierto según el teorema 2). Entonces $|\mathbf{v}_2| = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$ de manera que $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$. Por último,

$$Q = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

$$Q^t = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$Q^tAQ = \frac{1}{10-2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10-2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4-2\sqrt{5} & -3-\sqrt{5} \\ -7+3\sqrt{5} & 4+2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10-2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 30-14\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 10+6\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$ ◆

EJEMPLO 2 **Diagonalización de una matriz simétrica de 3 × 3 usando una matriz ortogonal**

Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces A es simétrica y $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-10)$. Se calculan los vectores propios linealmente independientes correspondientes a $\lambda = 1$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Correspondiente a $\lambda = 10$ se encuentra $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Para encontrar Q, se aplica el proceso de Gram-Schmidt a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, una base para E_1. Como $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{2}$, se hace $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Después

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Entonces $|\mathbf{v}_2| = \sqrt{18/4} = 3\sqrt{2}/2$ y $\mathbf{u}_2 = \frac{2}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3\sqrt{2} \\ -1/3\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Esto se verifica observando que $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$. Por último, se tiene $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3/|\mathbf{v}_3| = \frac{1}{3}\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. También se puede verificar observando que $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = 0$ y $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 0$. Por lo tanto,

$$Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & 4/3\sqrt{2} & 1/3 \end{pmatrix}$$

y

$$Q^tAQ = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & 4/3\sqrt{2} & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 20/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 20/3 \\ 0 & 4/3\sqrt{2} & 10/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

◆

En esta sección se han probado resultados para matrices simétricas reales. Estos resultados se pueden extender a matrices complejas. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz compleja, entonces la **transpuesta conjugada** de A, denotada por A^*, está definida por el elemento ij de $A^* = \overline{a_{ji}}$. La matriz A se llama **hermitiana**† si $A^* = A$. Resulta que los teoremas 1, 2 y 3 también son ciertos para las matrices hermitianas. Todavía más, si se define una matriz **unitaria** como una matriz compleja U con $U^* = U^{-1}$, entonces usando la demostración del teorema 4, se puede demostrar que una matriz hermitiana es diagonalizable unitariamente. Estos hechos se dejan como ejercicios (vea los problemas 15-17).

Transpuesta conjugada

Matriz hermitiana

Matriz unitaria

Se concluye esta sección con una demostración del teorema 3.

Demostración del teorema 3‡

Se demostrará que a todo valor propio λ de multiplicidad algebraica k, corresponden k vectores propios ortonormales. Este paso combinado con el teorema 2, demostrará el

† Vea el pie de la página 526.

‡ Si el tiempo lo permite.

teorema. Sea $\mathbf{u}_1$ un vector propio de A que corresponde a λ_1. Se puede suponer que $|\mathbf{u}_1| = 1$. También se puede suponer que $\mathbf{u}_1$ es real porque λ_1 es real y $\mathbf{u}_1 \in N_A - \lambda_1 I$, el espacio nulo de la matriz real $A - \lambda_1 I$. Este espacio nulo es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ por el ejemplo 4.6.10, página 343. Después se observa que $\{\mathbf{u}_1\}$ se puede extender a una base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ para $\mathbb{R}^n$, y mediante el proceso de Gram-Schmidt esto se puede convertir en una base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. Sea Q la matriz ortogonal cuyas columnas son $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$. Por conveniencia de notación se escribe $Q = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$. Ahora bien, Q es invertible y $Q^t = Q^{-1}$, de manera que A es semejante a Q^tAQ, y por el teorema 6.3.1, página 566, Q^tAQ y A tienen el mismo polinomio característico: $|Q^tAQ - \lambda I| = |A - \lambda I|$. Entonces

$$Q^t = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^t \\ \mathbf{u}_2^t \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^t \end{pmatrix}$$

de manera que

$$Q^tAQ = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^t \\ \mathbf{u}_2^t \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^t \end{pmatrix} A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^t \\ \mathbf{u}_2^t \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^t \end{pmatrix} (A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \ldots, A\mathbf{u}_n)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^t \\ \mathbf{u}_2^t \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^t \end{pmatrix} (\lambda_1\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \ldots, A\mathbf{u}_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{u}_1^tA\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_1^tA\mathbf{u}_n \\ 0 & \mathbf{u}_2^tA\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_2^tA\mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \mathbf{u}_n^tA\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n^tA\mathbf{u}_n \end{pmatrix}$$

Los ceros aparecen porque $\mathbf{u}_1^t\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_j = 0$ si $j \neq 1$. Por otro lado $[Q^tAQ]^t = Q^tA^t(Q^t)^t = Q^tAQ$. Así, Q^tAQ es simétrica, lo que significa que debe haber ceros en el primer renglón de Q^tAQ que concuerden con los ceros de la primera columna. Entonces

$$Q^tAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ 0 & q_{32} & q_{33} & \cdots & q_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & q_{n2} & q_{n3} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

y

$$|Q^tAQ - \lambda I| = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{22} - \lambda & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ 0 & q_{32} & q_{33} - \lambda & \cdots & q_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & q_{n2} & q_{n3} & \cdots & q_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_1 - \lambda)\begin{vmatrix} q_{22}-\lambda & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ q_{32} & q_{33}-\lambda & \cdots & q_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n2} & q_{n3} & \cdots & q_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)\,|M_{11}(\lambda)|$$

donde $M_{11}(\lambda)$ es el menor 1, 1 de $Q'AQ - \lambda I$. Si $k = 1$, no hay nada que demostrar. Si $k > 1$, entonces $|A - \lambda I|$ contiene el factor $(\lambda - \lambda_1)^2$, y por lo tanto $|Q'AQ - \lambda I|$ también contiene el factor $(\lambda - \lambda_1)^2$. Entonces $|M_{11}(\lambda)|$ contiene el factor $\lambda - \lambda_1$, lo que quiere decir que $|M_{11}(\lambda_1)| = 0$. Esto significa que las últimas $n - 1$ columnas de $Q'AQ - \lambda_1 I$ son linealmente dependientes. Como la primera columna de $Q'AQ - \lambda_1 I$ es el vector cero, se tiene que $Q'AQ - \lambda_1 I$ contiene a lo más $n - 2$ columnas linealmente independientes. En otras palabras, $\rho(Q'AQ - \lambda_1 I) \le n - 2$. Pero $Q'AQ - \lambda_1 I$ y $A - \lambda_1 I$ son semejantes; así, del problema 6.3.18, $\rho(A - \lambda_1 I) \le n - 2$. Por lo tanto, $\nu(A - \lambda_1 I) \ge 2$, lo que significa que E_{λ} = núcleo de $(A - \lambda_1 I)$ contiene al menos dos vectores propios linealmente independientes. Si $k = 2$, la demostración termina. Si $k > 2$, entonces se toman dos vectores ortonormales $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ en E_{λ} y se expanden a una nueva base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ para $\mathbb{R}^n$ y se define $P = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. Entonces, justo como se hizo, se demuestra que

$$P'AP - \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \\ 0 & \lambda_1-\lambda & \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \beta_{33}-\lambda & \beta_{34} & \cdots & \beta_{3n} \\ \beta_{43} & \beta_{44}-\lambda & \cdots & \beta_{4n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n3} & \beta_{n4} & \cdots & \beta_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

Como $k > 2$, se demuestra, como antes, que el determinante de la matriz entre corchetes es cero cuando $\lambda = \lambda_1$, lo que demuestra que $\rho(P'AP - \lambda_1 I) \le n - 3$ de manera que $\nu(P'AP - \lambda_1 I) = \nu(A - \lambda_1 I \ge 3$. Entonces dim $E_{\lambda_1} \ge 3$, y así sucesivamente. Es evidente que se puede continuar este proceso para demostrar que dim $E_{\lambda_1} = k$. Por último, en cada E_{λ_i} se puede encontrar una base ortonormal. Esto completa la prueba. ◆

PROBLEMAS 6.4

Autoevaluación

Falso-verdadero

I. Los valores propios de una matriz simétrica real son reales.

II. Los vectores propios de una matriz simétrica real son reales.

III. Toda matriz simétrica real es semejante a una matriz diagonal.

IV. Si la matriz real A se puede diagonalizar, entonces existe una matriz ortogonal Q tal que $Q'AQ$ es diagonal.

V. Si A es real y simétrica, entonces existe una matriz ortogonal Q tal que $Q'AQ$ es diagonal.

VI. Una matriz simétrica es hermitiana.

VII. Una matriz hermitiana es simétrica.

En los problemas 1 al 8 encuentre la matriz ortogonal Q que diagonaliza la matriz simétrica dada. Después verifique que $Q^tAQ = D$, una matriz diagonal cuyas componentes diagonales son los valores propios de A.

1. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

9. Sea Q una matriz ortogonal simétrica. Demuestre que si λ es un valor propio de Q, entonces $\lambda = \pm 1$.

10. A es **ortogonalmente semejante** a B si existe una matriz ortogonal Q tal que $B = Q^tAQ$. Suponga que A es ortogonalmente semejante a B y que B es ortogonalmente semejante a C. Demuestre que A es ortogonalmente semejante a C.

11. Demuestre que si $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es ortogonal, entonces $b = \pm c$. [*Sugerencia:* Escriba las ecuaciones que se obtienen de la ecuación $Q^tQ = I$.]

12. Suponga que A es una matriz simétrica real para la que todos sus valores propios son cero. Demuestre que A es la matriz cero.

13. Demuestre que si una matriz real A de 2×2 tiene vectores propios ortogonales, entonces A es simétrica.

14. Sea A una matriz real antisimétrica ($A^t = -A$). Demuestre que todo valor propio de A es de la forma $i\alpha$, donde α es un número real. Es decir, demuestre que todo valor propio de A es un número **imaginario**.

***15.** Demuestre que los valores propios de una matriz hermitiana compleja de $n \times n$ son reales. [*Sugerencia:* Utilice el hecho de que en $\mathbb{C}^n$, $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^*\mathbf{y})$.]

***16.** Si A es una matriz hermitiana de $n \times n$, demuestre que los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son ortogonales.

****17.** Repitiendo la demostración del teorema 3, pero sustituyendo $\mathbf{v}_i^t$ por $\overline{\mathbf{v}}_i^t$ cuando sea conveniente, demuestre que cualquier matriz hermitiana de $n \times n$ tiene n vectores propios ortonormales.

18. Encuentre una matriz unitaria U tal que U^*AU es diagonal, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}$.

Respuestas a la autoevaluación

I. V **II.** V **III.** V **IV.** F **V.** V **VI.** F **VII.** F

19. Haga lo mismo para $A = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix}$.

20. Demuestre que el determinante de una matriz hermitiana es real.

MATLAB 6.4

1. a. *(Lápiz y papel)* Si A es una matriz simétrica *aleatoria* de $n \times n$, entonces se espera que A tenga valores propios distintos y que los vectores propios asociados sean ortogonales. Explique por qué se puede decir que se espera que exista una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$ que consiste en vectores propios de A.

b. Genere cinco matrices simétricas aleatorias A (no todas del mismo tamaño) generando matrices reales aleatorias B y después formando **A = triu(B)+triu(B)'**. Para cada matriz A generada, verifique lo que se espera según el inciso a). Verifique que existe una matriz Q y una matriz diagonal D tales que $A = QDQ'$.

2. Si A es una matriz de valores complejos, entonces A^* se puede encontrar como **A'** con MATLAB. Genere una matriz A aleatoria de valores complejos de 4×4. (Use **A = B+i*C**, donde B y C son matrices aleatorias de valores reales encontradas con el comando **rand**.) Genere la matriz **H = triu(A)+triu(A)'**.

a. Verifique que H es hermitiana. Encuentre los valores propios de H. Aun cuando H es de valores complejos, ¿qué observa sobre los valores propios?

b. Repita las instrucciones del problema 1 de esta sección de MATLAB pero cambie la palabra *simétrica* por *hermitiana*, cambie $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{C}^n$ y cambie Q' por Q^*.

3. Geometría Suponga que A es una matriz real simétrica de 2×2. Entonces existe una matriz diagonal D y una matriz ortogonal Q tales que $A = QDQ'$.

a. *(Lápiz y papel)* Como Q es ortogonal, se tiene que det(Q) es +1 o bien −1. ¿*Por qué*? Se sabe que si det(Q) = −1, al multiplicar una columna de Q por −1 se produce una nueva Q que todavía es ortogonal pero que tiene det(Q) = 1. ¿Por qué? Explique por qué la nueva Q todavía contiene una base ortonormal de vectores propios que están en correspondencia correcta con los valores propios de D de manera que $A = QDQ'$ para la nueva Q.

b. *(Lápiz y papel)* Usando los hechos de que Q es ortogonal, que det (Q) = 1 y que un vector de longitud 1 se puede escribir como (cos(θ) sen(θ)) para algún ángulo θ, explique por qué se puede escribir

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

Verifique que Q es entonces una matriz de rotación.

c. *(Lápiz y papel)* Combinando los resultados de los incisos a) y b), se puede concluir que una matriz A real simétrica de 2×2 se puede diagonalizar como $A = QDQ'$, donde Q es una matriz de rotación. Esto permite dar una descripción de la geometría de la transformación lineal determinada por A, en términos de rotaciones de la base estándar y expansiones o compresiones si los valores propios de A son positivos. Explique esta descripción interpretando primero la acción de Q', seguida de la acción de D, seguida de la acción de Q.

d. Para las siguientes matrices, describa la geometría de A como se hizo en el inciso c). Utilice la descripción para bosquejar la imagen del círculo unitario después de aplicarle la transformación determinada por A. Ajuste Q si es necesario para que det (Q) = 1.

[*Sugerencia:* necesitará usar la Q ajustada para encontrar el ángulo θ. Observe que $Q(2, 1)/Q(1, 1) = \tan(\theta)$. Utilice el comando **atan** de MATLAB, ajuste la respuesta agregando π si los números en Q indican que el ángulo está en el segundo o tercer cuadrante, y multiplique por $180/\pi$.]

i. $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

ii. $A = \begin{pmatrix} 2.75 & -.433 \\ -.433 & 2.25 \end{pmatrix}$

6.5 FORMAS CUADRÁTICAS Y SECCIONES CÓNICAS

En esta sección se usa el material de la sección 6.4 para extraer información sobre las gráficas de ecuaciones cuadráticas. Las ecuaciones y las formas cuadráticas que se definen a continuación, surgen de muchas maneras. Por ejemplo, se pueden usar formas cuadráticas para obtener información sobre las secciones cónicas en $\mathbb{R}^2$ (círculos, parábolas, elipses, hipérbolas) y extender esta teoría para describir ciertas superficies, llamadas *superficies cuadráticas*, en $\mathbb{R}^3$. Estos temas se estudiarán más adelante en esta sección. Aunque en este texto no se analizarán, las formas cuadráticas surgen en una gran variedad de aplicaciones que van de la descripción de las funciones de costo en economía al análisis del control del recorrido de un cohete en el espacio.

DEFINICIÓN 1 **Ecuación cuadrática y forma cuadrática**

i. Una **ecuación cuadrática en dos variables sin términos lineales** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \quad \textbf{(1)}$$

donde $|a| + |b| + |c| \neq 0$. Esto es, al menos uno de los números a, b y c es diferente de cero.

ii. Una **forma cuadrática en dos variables** es una expresión de la forma

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad \textbf{(2)}$$

donde $|a| + |b| + |c| \neq 0$.

Es evidente que las ecuaciones y las formas cuadráticas tienen una fuerte relación. Se comenzará el análisis de las formas cuadráticas con un ejemplo sencillo.

Considere la forma cuadrática $F(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2$. Sean $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces

$$A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2y\\ -2x+3y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$
$$=(x^2-2xy)+(-2xy+3y^2)=x^2-4xy+3y^2=F(x,y)$$

De esta manera se ha "representado" la forma cuadrática $F(x, y)$ mediante la matriz simétrica A en el sentido de que

$$\boxed{F(x,y)=A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} \tag{3}$$

Inversamente, si A es una matriz simétrica, entonces la ecuación (3) define una forma cuadrática $F(x, y) = A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$.

Se puede representar $F(x, y)$ por muchas matrices pero sólo por una matriz simétrica. Para ver esto, sea $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ b & 3\end{pmatrix}$, donde $a + b = -4$. Entonces, $A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = F(x, y)$. Si, por ejemplo, $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -7 & 3\end{pmatrix}$, entonces $A\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x+3y\\ -7x+3y\end{pmatrix}$ y $A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = x^2 - 4xy + 3y^2$. Sin embargo, si insistimos en que A sea simétrica, entonces debe tenerse $a + b = -4$ y $a = b$. Este par de ecuaciones tiene una solución única $a = b = -2$.

Si $F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ es una forma cuadrática, sea

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}a & b/2\\ b/2 & c\end{pmatrix}} \tag{4}$$

Entonces

$$A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\left[\begin{pmatrix}a & b/2\\ b/2 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+(b/2)y\\ (b/2)x+cy\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$
$$=ax^2+bxy+cy^2=F(x,y)$$

Se regresa ahora a la ecuación cuadrática (1). Usando (3), se puede escribir (1) como

$$\boxed{A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=d} \tag{5}$$

donde A es simétrica. Por el teorema 6.4.4, página 578, existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^tAQ = D$, donde $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ y λ_1 y λ_2 son valores propios de A. Entonces $A = QDQ^t$ (recuerde que $Q^t = Q^{-1}$) y (5) se puede escribir como

$$(QDQ^t\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}=d \tag{6}$$

Pero del teorema 5.5.1, página 519, $A\mathbf{v}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{v}\cdot A^t\mathbf{y}$. Así

$$Q(DQ^t\mathbf{v})\cdot\mathbf{v} = DQ^t\mathbf{v}\cdot Q^t\mathbf{v} \tag{7}$$

de manera que (6) se convierte en

$$[DQ^t\mathbf{v}]\cdot Q^t\mathbf{v} = d \tag{8}$$

Sea $\mathbf{v}' = Q^t\mathbf{v}$. Entonces $\mathbf{v}'$ es un vector de 2 componentes y (8) se convierte en

$$\boxed{D\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}' = d} \tag{9}$$

Considere (9) con más detenimiento. Se puede escribir $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Como una matriz diagonal es simétrica, (9) define una forma cuadrática $\overline{F}(x', y')$ de las variables x' y y'. Si $D = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}$, entonces $D\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'x' \\ c'y' \end{pmatrix}$ y

$$\overline{F}(x', y') = D\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} a'x' \\ c'y' \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = a'x'^2 + c'y'^2$$

Es decir, *$\overline{F}(x', y')$ es una forma cuadrática en la que falta el término en $x'y'$*. Por lo tanto, la ecuación (9) es una ecuación cuadrática de las nuevas variables x', y' sin el término $x'y'$.

EJEMPLO 1 **Expresión de una forma cuadrática en las nuevas variables x' y y' sin el término $x'y'$** Considere la ecuación cuadrática $x^2 - 4xy + 3y^2 = 6$. Como se vio, la ecuación se puede escribir en la forma $A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = 6$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. En el ejemplo 6.4.1, página 578 se vio que A se puede diagonalizar a $D = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{5} \end{pmatrix}$ usando la matriz ortogonal

$$Q = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q^t\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2x + (-1+\sqrt{5})y \\ (1-\sqrt{5})x + 2y \end{pmatrix}$$

y, para las nuevas variables, la ecuación se puede escribir como

$$(2-\sqrt{5})x'^2 + (2+\sqrt{5})y'^2 = 6$$ ◆

Se analizará de nuevo la matriz Q. Como Q es real y ortogonal, $1 = \det QQ^{-1} = \det QQ^t = \det Q \det Q^t = \det Q \det Q = (\det Q)^2$. Entonces $\det Q = \pm 1$. Si $\det Q = -1$, se

pueden intercambiar los renglones de Q para hacer el determinante de esta nueva Q igual a 1. Así, se puede demostrar (vea el problema 36) que $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ para algún número θ con $0 \le \theta < 2\pi$. Pero del ejemplo 5.1.8, página 469, esto significa que Q es una matriz de rotación. Por lo tanto, se ha demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 1 **Teorema de los ejes principales en $\mathbb{R}^2$** Sea

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \qquad \textbf{(10)}$$

una ecuación cuadrática en las variables x y y. Entonces existe un número único θ en $[0, 2\pi)$ tal que la ecuación (10) se puede escribir en la forma

$$a'x'^2 + c'y'^2 = d \qquad \textbf{(11)}$$

donde x' y y' son los ejes obtenidos al rotar los ejes x y y un ángulo θ en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Más aún, los números a' y c' son los valores propios

ejes principales

de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$. Los ejes x' y y' se llaman **ejes principales** de la gráfica de la ecuación cuadrática (10). ✦

Se puede usar el teorema 1 para identificar tres secciones cónicas importantes. Recuerde que las **ecuaciones estándar** de un círculo, elipse e hipérbola son

Círculo:	$x^2 + y^2 = r^2$	**(12)**
Elipse:	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	**(13)**
Hipérbola:	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	**(14)**
	o	
	$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$	**(15)**

EJEMPLO 2 **Identificación de una hipérbola** Identifique la sección cónica cuya ecuación es

$$x^2 - 4xy + 3y^2 = 6 \qquad \textbf{(16)}$$

Solución En el ejemplo 1 se encontró que esto se puede escribir como $(2 - \sqrt{5})x'^2 + (2 + \sqrt{5})y'^2 = 6$ o sea

$$\frac{y'^2}{6/(2+\sqrt{5})} - \frac{x'^2}{6/(\sqrt{5}-2)} = 1$$

Ésta es la ecuación (15) con $a = \sqrt{6/(2+\sqrt{5})} \approx 1.19$ y $b = \sqrt{6/(\sqrt{5}-2)} \approx 5.04$. Como

$$Q = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

y det $Q = 1$, se tiene, usando el problema 36 y el hecho de que 2 y $-1+\sqrt{5}$ son positivos,

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \approx 0.85065$$

Entonces θ está en el primer cuadrante, y usando una calculadora, se encuentra que $\theta \approx 0.5536$ rad $\approx 31.7°$. Por lo tanto, (16) es la ecuación de una hipérbola estándar rotada un ángulo de 31.7° (vea la figura 6.1).

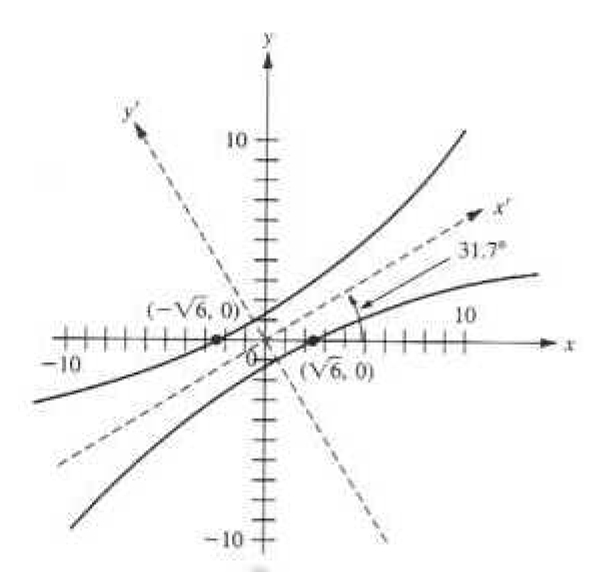


Figura 6.1 La hipérbola $x^2 - 4xy + 3y^2 = 6$ ◆

EJEMPLO 3 **Una elipse** Identifique la sección cónica cuya ecuación es

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 = 4 \tag{17}$$

Solución En este caso $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, los valores propios de A son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 6$ y dos vectores propios ortonormales son $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Entonces $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Antes de continuar, debe observarse que det $Q = -1$. Para que Q sea una matriz de rotación es necesario que det $Q = 1$. Esto se logra fácilmente invirtiendo los vectores propios. Así, se hace $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 4$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$; ahora det $Q = 1$. Entonces $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y (17) se puede expresar como $D\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 4$ o

$$6x'^2 + 4y'^2 = 4 \qquad \textbf{(18)}$$

donde

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}x - 1/\sqrt{2}y \\ 1/\sqrt{2}x + 1/\sqrt{2}y \end{pmatrix}$$

Rescribiendo (18), se obtiene $x'^2/(\frac{2}{3}) + y'^2/1 = 1$, que es la ecuación (13) con $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ y $b = 1$. Más aún, como $1/\sqrt{2} > 0$ y $-1/\sqrt{2} < 0$, del problema 36, se tiene $\theta = 2\pi - \cos^{-1}(1/\sqrt{2}) = 2\pi - \pi/4 = 7\pi/4 = 315°$. Por lo tanto (17) es la ecuación de una elipse estándar rotada un ángulo de 315° (o 45° en el sentido de las manecillas del reloj). (Vea la figura 6.2.)

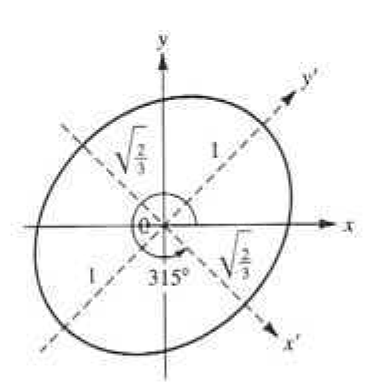


Figura 6.2 La elipse $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 4$ ◆

EJEMPLO 4 Una sección cónica degenerada Identifique la sección cónica cuya ecuación es

$$-5x^2 + 2xy - 5y^2 = 4 \qquad \textbf{(19)}$$

Solución Haciendo referencia al ejemplo 3, la ecuación (19) se puede volver a escribir como

$$-6x'^2 - 4y'^2 = 4 \qquad \textbf{(20)}$$

Como para cualesquiera números reales x' y y', $-6x'^2 - 4y'^2 \leq 0$, se ve que no existen números reales x y y que satisfagan (19). La sección cónica definida por (19) se llama **sección cónica degenerada**. ◆

Existe una manera sencilla de identificar la sección cónica definida por

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \tag{21}$$

Si $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$, entonces la ecuación característica de A es

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2/4) = 0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

Esto significa que $\lambda_1\lambda_2 = ac - b^2/4$. Pero como se ha visto, la ecuación (21) se puede volver a escribir como

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d \tag{22}$$

Si λ_1 y λ_2 tienen el mismo signo, entonces (21) define una elipse (o un círculo) o una cónica degenerada como en los ejemplos 3 y 4. Si λ_1 y λ_2 tienen signo contrario, entonces (21) es la ecuación de una hipérbola (como en el ejemplo 2). Por lo tanto, se puede probar lo siguiente.

TEOREMA 2 Si $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$, entonces la ecuación cuadrática (21) es la ecuación de:

i. Una hipérbola si $d \neq 0$ y $\det A < 0$.
ii. Una elipse, círculo o sección cónica degenerada si $d \neq 0$ y $\det A_1 > 0$.
iii. Un par de rectas o una sección cónica degenerada si $d \neq 0$ y $\det A = 0$.
iv. Si $d = 0$, entonces (21) es la ecuación de dos rectas si $\det A \neq 0$ y la ecuación de una sola recta si $\det A = 0$.

Demostración Ya se demostró por qué se cumplen *i*) y *ii*). Para demostrar la parte *iii*) suponga que $\det A = 0$. Entonces por el teorema de resumen (teorema 6.1.7), $\lambda = 0$ es un valor propio de A y la ecuación (22) se lee $\lambda_1 x'^2 = d$ o $\lambda_2 y'^2 = d$. Si $\lambda_1 x'^2 = d$ y $d/\lambda_1 > 0$, entonces $x_1' = \pm\sqrt{d/\lambda_1}$ es la ecuación de dos rectas en el plano xy. Si $d/\lambda_1 < 0$, entonces se tiene $x'^2 < 0$ (que es imposible) y se obtiene una cónica degenerada. Los mismos hechos se cumplen si $\lambda_2 y'^2 = d$. La parte *iv*) se deja como ejercicio (vea el problema 37). ♦

Nota. En el ejemplo 2 se tenía $\det A = ac - b^2/4 = -1$. En los ejemplos 3 y 4 se tenía $\det A = 24$.

Los métodos que acaban de describirse se pueden usar para analizar las ecuaciones cuadráticas en más de dos variables. Se da un ejemplo a continuación.

EJEMPLO 5 **Un elipsoide** Considere la ecuación cuadrática

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 + 4xz + 4yz + 2z^2 = 100 \tag{23}$$

Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, entonces (23) se puede escribir en la forma

$$A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 100 \tag{24}$$

Del ejemplo 6.4.2, página 579, $Q^tAQ = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, donde

$$Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & 4/3\sqrt{2} & 1/3 \end{pmatrix}$$

Sea

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = Q^t\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1/\sqrt{2})x + (1/\sqrt{2})y \\ -(1/3\sqrt{2})x - (1/3\sqrt{2})y + (4/3\sqrt{2})z \\ (2/3)x + (2/3)y + (1/3)z \end{pmatrix}$$

Entonces, como antes, $A = QDQ^t$ y $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = QDQ^t\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = DQ^t\mathbf{v} \cdot Q^t\mathbf{v} = D\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'$. Por lo tanto, (24) se puede escribir en términos de las nuevas variables x', y', z' como $D\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = 100$, o sea,

$$x'^2 + y'^2 + 10z'^2 = 100 \tag{25}$$

En $\mathbb{R}^3$ la superficie definida por (25) se llama **elipsoide** (vea la figura 6.3).

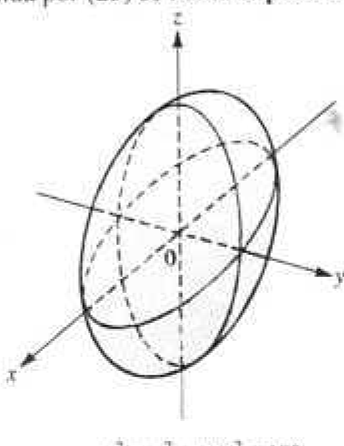


Figura 6.3 El elipsoide $5x^2 + 8xy + 5y^2 + 4xz + 4yz + 2z^2 = 100$, que se puede escribir en las nuevas variables como $x'^2 + y'^2 + 10z'^2 = 100$ ◆

Existe una gran variedad de superficies de tres dimensiones de la forma $A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=d$, donde $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$. Esas superficies se llaman **superficies cuadráticas**.

Se cierra esta sección observando que las formas cuadráticas se pueden definir en términos de cualquier número de variables.

DEFINICIÓN 2 **Forma cuadrática** Sea $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ y sea A una matriz simétrica de $n\times n$. Entonces una **forma cuadrática** en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una expresión de la forma

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \tag{26}$$

EJEMPLO 6 **Una forma cuadrática en cuatro variables** Sea

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2&-2\\1&-4&6&5\\2&6&7&-1\\-2&5&-1&3\end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{v}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

Entonces

$$A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\left[\begin{pmatrix}2&1&2&-2\\1&-4&6&5\\2&6&7&-1\\-2&5&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2x_1+x_2+2x_3-2x_4\\x_1-4x_2+6x_3+5x_4\\2x_1+6x_2+7x_3-x_4\\-2x_1+5x_2-x_3+3x_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$=2x_1^2+2x_1x_2-4x_2^2+4x_1x_3+12x_2x_3$$
$$+7x_3^2-4x_1x_4+10x_2x_4-2x_3x_4+3x_4^2$$

(después de simplificar) ✦

EJEMPLO 7 **Una matriz simétrica que corresponde a una forma cuadrática en cuatro variables** Encuentre la matriz simétrica A que corresponde a la forma cuadrática

$$5x_1^2 - [illegible] x_1x_4 + 7x_2x_4 + 6x_3x_4 + 9x_4^2$$

Solución Si $A = (a_{ij})$, entonces, observando los ejemplos anteriores de esta sección, se ve que a_{ii} es el coeficiente del término x_i^2 y $a_{ij} + a_{ji}$ es el coeficiente del término $x_i x_j$. Como A es simétrica, $a_{ij} = a_{ji}$; así, $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}\cdot$ (coeficientes del término $x_i x_j$). Uniendo todo esto se obtiene

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{3}{2} & 4 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & -\frac{5}{2} & 2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

◆

PROBLEMAS 6.5

Autoevaluación

I. Si A es una matriz simétrica real con valores propios positivos, entonces $A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = d > 0$ es la ecuación de

a. una parábola **b.** una elipse **c.** una hipérbola
d. dos rectas **e.** ninguna de las anteriores

II. Si A es una matriz simétrica real con un valor propio positivo y otro negativo, entonces $A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = d > 0$ es la ecuación de

a. una parábola **b.** una elipse **c.** una hipérbola
d. dos rectas **e.** ninguna de las anteriores

III. Si A es una matriz simétrica real con un valor propio positivo y uno igual a cero, entonces $A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = d > 0$ es la ecuación de

a. una parábola **b.** una elipse **c.** una hipérbola
d. dos rectas **e.** ninguna de las anteriores

IV. Si A es una matriz simétrica real con dos valores propios negativos, entonces $A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = d > 0$ es la ecuación de

a. una parábola **b.** una elipse **c.** una hipérbola
d. dos rectas **e.** ninguna de las anteriores

En los problemas 1 al 13 escriba la ecuación cuadrática en la forma $A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = d$ (donde A es una matriz simétrica) y elimine el término xy rotando los ejes un ángulo θ. Escriba la ecuación en términos de las nuevas variables e identifique la sección cónica obtenida.

1. $3x^2 - 2xy - 5 = 0$
2. $4x^2 + 4xy + y^2 = 9$
3. $4x^2 + 4xy - y^2 = 9$
4. $xy = 1$
5. $xy = a;\ a > 0$
6. $4x^2 + 2xy + 3y^2 + 2 = 0$
7. $xy = a;\ a < 0$
8. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6 = 0$
9. $-x^2 + 2xy - y^2 = 0$
10. $2x^2 + xy + y^2 = 4$
11. $3x^2 - 6xy + 5y^2 = 36$
12. $x^2 - 3xy + 4y^2 = 1$
13. $6x^2 + 5xy - 6y^2 + 7 = 0$
14. ¿Cuáles son la formas posibles de la gráfica de $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$?

Respuestas a la autoevaluación

I. b II. c III. d IV. [illegible]

En los problemas 15 al 18 escriba la forma cuadrática en términos de las nuevas variables x', y' y z' de manera que no estén presentes los términos de productos cruzados (xy, xz, yz).

15. $x^2 - 2xy + y^2 - 2xz - 2yz + z^2$

16. $-x^2 + 4xy - y^2 + 4xz + 4yz + z^2$

17. $3x^2 + 4xy + 2y^2 + 4xz + 4z^2$

18. $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz + z^2$

En los problemas 19 al 21 encuentre una matriz simétrica A tal que la forma cuadrática se pueda escribir en la forma $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$.

19. $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + 3x_3^2 + 7x_1x_4 - 2x_2x_4 + x_4^2$

20. $x_1^2 - x_2^2 + x_1x_3 - x_2x_4 + x_4^2$

21. $3x_1^2 - 7x_1x_2 - 2x_2^2 + x_1x_3 - x_2x_3 + 3x_3^2 - 2x_1x_4 + x_2x_4 - 4x_3x_4 - 6x_4^2$
$+ 3x_1x_5 - 5x_3x_5 + x_4x_5 - x_5^2$

22. Suponga que para algún valor de d diferente de cero, la gráfica de $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ es una hipérbola. Demuestre que la gráfica es una hipérbola para cualquier otro valor de d diferente de cero.

23. Demuestre que si $a \neq c$, el término xy en la ecuación cuadrática (1) se elimina rotando un ángulo θ, si θ está dado por $\cot 2\theta = (a - c)/b$.

24. Demuestre que si $a = c$ en el problema 23, entonces el término xy se elimina rotando un ángulo $\pi/4$ o un ángulo $-\pi/4$.

***25.** Suponga que una rotación convierte a $ax^2 + bxy + cy^2$ en $a'(x')^2 + b'(x'y') + c'(y')^2$. Demuestre que:

a. $a + c = a' + c'$ **b.** $b^2 - 4ac = b'^2 - 4a'c'$

***26.** Se dice que una forma cuadrática $F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es **positiva definida** si $F(\mathbf{x}) \geq 0$ para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $F(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$. Demuestre que F es positiva definida si y sólo si la matriz simétrica A asociada a F tiene valores propios positivos.

27. Se dice que una forma cuadrática $F(\mathbf{x})$ es **positiva semidefinida** si $F(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que F es positiva semidefinida si y sólo si los valores propios de la matriz simétrica asociada a F son todos no negativos.

Las definiciones de **negativa definida** y **negativa semidefinida** son las definiciones en los problemas 26 y 27 sustituyendo ≥ 0 por ≤ 0. Una forma cuadrática es **indefinida** si no es de los tipos anteriores. En los problemas 28 al 35 determine si la forma cuadrática dada es positiva definida, positiva semidefinida, negativa definida, negativa semidefinida o indefinida.

28. $3x^2 + 2y^2$ **29.** $-3x^2 - 3y^2$ **30.** $3x^2 - 2y^2$ **31.** $x^2 + 2xy + 2y^2$

32. $x^2 - 2xy + 2y^2$ **33.** $x^2 - 4xy + 3y^2$ **34.** $-x^2 + 4xy - 3y^2$ **35.** $-x^2 + 2xy - 2y^2$

***36.** Sea $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz ortogonal real con $\det Q = 1$. Defina el número $\theta \in [0, 2\pi)$:

a. Si $a \geq 0$ y $c > 0$, entonces $\theta = \cos^{-1} a$ $(0 < \theta \leq \pi/2)$.
b. Si $a \geq 0$ y $c < 0$, entonces $\theta = 2\pi - \cos^{-1} a$ $(3\pi/2 \leq \theta < 2\pi)$.
c. Si $a \leq 0$ y $c > 0$, entonces $\theta = \cos^{-1} a$ $(\pi/2 \leq \theta < \pi)$.
d. Si $a \leq 0$ y $c < 0$, entonces $\theta = 2\pi - \cos^{-1} a$ $(\pi < \theta \leq 3\pi/2)$.
e. Si $a = 1$ y $c = 0$, entonces $\theta = 0$.
f. Si $a = -1$ y $c = 0$, entonces $\theta = \pi$.

(Aquí $\cos^{-1} x \in [0, \pi]$ para $x \in [-1, 1]$.) Si se elige θ como se describió, demuestre que

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

37. Demuestre, usando la fórmula (22), que la ecuación (21) es la ecuación de dos rectas en el plano xy cuando $d = 0$ y det $A \neq 0$. Si det $A = d = 0$, demuestre que la ecuación (21) es la ecuación de una sola recta.

38. Sea A la representación matricial simétrica de la ecuación cuadrática (1) con $d \neq 0$. Sean λ_1 y λ_2 los valores propios de A. Demuestre que (1) es la ecuación de **a)** una hipérbola si $\lambda_1\lambda_2 < 0$ y **b)** un círculo, elipse o sección cónica degenerada si $\lambda_1\lambda_2 > 0$.

MATLAB 6.5

Para cada ecuación cuadrática dada en los siguientes problemas:

a. Encuentre una matriz simétrica A tal que la ecuación se pueda escribir como $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = d$.

b. Encuentre los valores y vectores propios de A formando **[Q,D] = eig(A)**.

c. Si det $(Q) = -1$, ajuste Q de manera adecuada para que det$(Q) = 1$. [Consulte la presentación en los ejemplos 2 y 3 de esta sección o la presentación en el problema 3*a*) de MATLAB 6.4.] Usando la Q ajustada, encuentre el ángulo de rotación θ. (Recuerde que el comando **acos** de MATLAB encuentra el coseno inverso y el comando **atan** encuentra la tangente inversa de un ángulo. Se pueden convertir medidas en radianes a grados multiplicando por $180/\pi$. La variable **pi** es parte de las definiciones de MATLAB y tiene el valor π).

d. Rescriba la ecuación en la forma $a'x'^2 + b'y'^2 = d$ e identifique el tipo de sección cónica descrita por la ecuación. Verifique el resultado del teorema 2.

e. (*Lápiz y papel*) Usando el ángulo de rotación θ y rescribiendo la ecuación del inciso d), bosqueje la sección cónica descrita por la ecuación original. En el bosquejo indique la parte de la geometría del dibujo que se obtiene con el conocimiento de los valores propios.

1. Trabaje el problema 10.

2. Trabaje el problema 8.

3. Trabaje el problema 4.

4. Trabaje el problema 12.

6.6 FORMA CANÓNICA DE JORDAN

Como se ha visto, las matrices de $n \times n$ con n vectores propios linealmente independientes se pueden expresar en una forma especialmente sencilla mediante una transformación de semejanza. Por fortuna, como "la mayor parte" de los polinomios tienen raíces distintas, "la mayor parte" de las matrices tendrán valores propios distintos. Sin embargo, como se verá en la sección 6.7, las matrices que no son diagonalizables (es decir, que no tienen n vectores propios linealmente independientes) surgen en la práctica. En este caso, todavía es posible demostrar que la matriz es semejante a otra, una matriz más sencilla, pero la nueva matriz no es diagonal y es más difícil obtener la matriz de transformación C.

Para an... se define la matriz N_k como la matriz de $k \times k$

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Matriz de bloques de Jordan

Observe que N_k es la matriz con unos arriba de la diagonal principal y ceros en otra parte. Para un escalar dado λ se define la **matriz de bloques de Jordan**† $B(\lambda)$ por

$$B(\lambda) = \lambda I + N_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{2}$$

Es decir, $B(\lambda)$ es la matriz de $k \times k$ con el escalar λ en la diagonal, unos arriba de la diagonal y ceros en otra parte.

Nota. Se puede (y con frecuencia se hará) tener una matriz de bloques de Jordan de 1×1. Esa matriz toma la forma $B(\lambda) = (\lambda)$.

Matriz de Jordan

Por último, una **matriz de Jordan** J tiene la forma

$$J = \begin{pmatrix} B_1(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_r(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

donde cada $B_i(\lambda_i)$ es una matriz de bloques de Jordan. Entonces *una matriz de Jordan es una matriz que tiene en la diagonal matrices de bloques de Jordan y ceros en otra parte.*

EJEMPLO 1 **Tres matrices de Jordan** Los siguientes ejemplos son matrices de Jordan. Los bloques de Jordan se marcaron con líneas punteadas:

i. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **ii.** $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

† Llamada así en honor del matemático francés Camille Jordan (1838-1922). Los resultados en esta sección aparecieron por primera vez en el brillante trabajo de Jordan *Traité des substitutions et des équations algebriques* (Tratado sobre sustituciones y ecuaciones algebraicas), publicado en 1870.

iii. $$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ ✦

EJEMPLO 2 **Matrices de Jordan de 2 × 2** Las únicas matrices de Jordan de 2 × 2 son $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. En la primera matriz los números λ_1 y λ_2 pueden ser iguales. ✦

EJEMPLO 3 **Matrices de Jordan de 3 × 3** Las únicas matrices de Jordan de 3 × 3 son

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

donde no es necesario que λ_1, λ_2 y λ_3 sean distintos. ✦

El siguiente resultado es uno de los teoremas más importantes en la teoría de matrices. Aunque su prueba está fuera del alcance de este libro,† se demostrará para el caso de 2 × 2 (vea el teorema 3) y se sugiere una demostración para el caso de 3 × 3 en el problema 19.

TEOREMA 1 **Sea A una matriz real o compleja de $n \times n$. Entonces existe una matriz C compleja invertible de $n \times n$ tal que**

$$\boxed{C^{-1}AC = J} \qquad \textbf{(3)}$$

donde J es una matriz de Jordan cuyos elementos en la diagonal son los valores propios de A. Más aún, la matriz de Jordan J es única excepto por el orden en el que aparecen los bloques de Jordan. ✦

Nota. La matriz C en el teorema 1 no necesita ser única.

† Vea la demostración en G. Birkhoff y S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, 3ª ed., Nueva York, Macmillan, 1965, p. 311.

Nota 2. La última afirmación del teorema significa, por ejemplo, que si A es similar a

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces A también es similar a

$$J_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y a otras tres matrices de Jordan. Es decir, los bloques de Jordan reales permanecen iguales pero el orden en el que están escritos puede cambiar.

DEFINICIÓN 1 **Forma canónica de Jordan** La matriz J en el teorema 1 se llama la **forma canónica de Jordan** de A.

Observación. Si A es diagonalizable, entonces $J = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios (no necesariamente distintos) de A. Cada elemento en la diagonal es una matriz de bloques de Jordan de 1×1.

Ahora se verá cómo calcular la forma canónica de Jordan de cualquier matriz de 2×2. Si A tiene dos vectores propios linealmente independientes, ya sabemos qué hacer. Por lo tanto, el único caso de interés ocurre cuando A tiene sólo un vector propio λ de multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1. Es decir, se supone que A tiene un único vector propio independiente $\mathbf{v}_1$ correspondiente a λ. Esto es: *Cualquier vector que no es un múltiplo de* $\mathbf{v}_1$ *no es un vector propio.*

TEOREMA 2 Suponga que A la matriz de 2×2 tiene un valor propio λ de multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1. Sea $\mathbf{v}_1$ un vector propio correspondiente a λ. Entonces existe un vector $\mathbf{v}_2$ que satisface la ecuación

$$\boxed{(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1} \qquad \textbf{(4)}$$

Demostración Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^2$ un vector fijo que *no* es múltiplo de $\mathbf{v}_1$ de manera que $\mathbf{x}$ no es un vector propio de A. Primero se demuestra que

$$\mathbf{w} = (A - \lambda I)\mathbf{x} \tag{5}$$

es un vector propio de A. Esto es, debe demostrarse que $\mathbf{w} = c\mathbf{v}_1$ para alguna constante c. Como $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^2$ y $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{x}$ son linealmente independientes, existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{x} \tag{6}$$

Para demostrar que $\mathbf{w}$ es un vector propio de A debe demostrarse que $c_2 = 0$. De (5) y (6) se encuentra que

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{x} \tag{7}$$

Sea $B = A - (\lambda + c_2)I$. Entonces de (7)

$$B\mathbf{x} = [A - (\lambda + c_2)I]\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 \tag{8}$$

Si se supone que $c_2 \neq 0$, entonces $\lambda + c_2 \neq \lambda$ y $\lambda + c_2$ no es un valor propio de A (ya que λ es el único valor propio de A). Así, $\det B = \det [A - (\lambda + c_2)I] \neq 0$, lo que significa que B es invertible. Por lo tanto, (8) se puede escribir como

$$\mathbf{x} = B^{-1}c_1\mathbf{v}_1 = c_1B^{-1}\mathbf{v}_1 \tag{9}$$

Entonces multiplicando ambos lados de (9) por λ, se tiene

$$\lambda\mathbf{x} = \lambda c_1B^{-1}\mathbf{v}_1 = c_1B^{-1}\lambda\mathbf{v}_1 = c_1B^{-1}A\mathbf{v}_1 \tag{10}$$

Pero $B = A - (\lambda + c_2)I$, de manera que

$$A = B + (\lambda + c_2)I \tag{11}$$

Al insertar (11) en (10) se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda\mathbf{x} &= c_1B^{-1}[B + (\lambda + c_2)I]\mathbf{v}_1 \\ &= c_1[I + (\lambda + c_2)B^{-1}]\mathbf{v}_1 \\ &= c_1\mathbf{v}_1 + (\lambda + c_2)c_1B^{-1}\mathbf{v}_1 \end{aligned} \tag{12}$$

Pero usando (9), $c_1B^{-1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}$ de manera que (12) se convierte en

$$\lambda\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + (\lambda + c_2)\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}$$

o

$$\mathbf{0} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{x} \tag{13}$$

Pero $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{x}$ son linealmente independientes, lo que hace que $c_1 = c_2 = 0$. Esto contradice la suposición de que $c_2 \neq 0$. Entonces $c_2 = 0$ y por (6), $\mathbf{w}$ es un múltiplo de $\mathbf{v}_1$ por lo que $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1$ es un vector propio de A. Más aún, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ ya que si $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, entonces (5) dice que $\mathbf{x}$ es un vector propio de A. Por lo tanto, $c_1 \neq 0$. Sea

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{c_1}\mathbf{x} \tag{14}$$

Entonces $(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = (1/c_1)(A - \lambda I)\mathbf{x} = (1/c_1)\mathbf{w} = \mathbf{v}_1$. Esto prueba el teorema. ◆

DEFINICIÓN 2 **Vector propio generalizado** Sea A una matriz de 2×2 con un solo valor propio λ que tiene multiplicidad geométrica 1. Sea $\mathbf{v}_1$ un vector propio de A. Entonces el vector $\mathbf{v}_2$ definido por $(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ se llama **vector propio generalizado** de A correspondiente al valor propio λ.

EJEMPLO 4 **Vector propio generalizado** Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$. La ecuación característica de A es $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$, de manera que $\lambda = -1$ es un valor propio de multiplicidad algebraica 2. Entonces

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = (A + I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto lleva al vector propio $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. No existe otro vector propio linealmente independiente. Para encontrar un vector propio generalizado $\mathbf{v}_2$ se calcula $(A + I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ o $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, lo que da el sistema

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 8x_1 - 4x_2 &= 2 \end{aligned}$$

La segunda ecuación es el doble de la primera, por lo que x_2 se puede elegir arbitrariamente y $x_1 = (1 + 2x_2)/4$. Por lo tanto, una elección posible para $\mathbf{v}_2$ es $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$. ◆

La razón para encontrar vectores propios generalizados está dada en el siguiente teorema.

TEOREMA 3 Suponga que A, λ, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ están definidos como en el teorema 2 y sea C la matriz cuyas columnas son $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Entonces $C^{-1}AC = J$, donde $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ es la forma canónica de Jordan de A.

Demostración Como $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes, se ve que C es invertible. Después se observa que $AC = A(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2) = (\lambda\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2)$. Pero de la ecuación (4), $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2$ de manera que $AC = (\lambda\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2)$. Pero $CJ = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2)$. Entonces $AC = CJ$, lo que significa que $C^{-1}AC = J$ y el teorema queda probado. ◆

EJEMPLO 5 **Forma canónica de Jordan de una matriz de 2 × 2** En el ejemplo 4, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = -2\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = J$$

◆

El método descrito se puede generalizar para obtener la forma canónica de Jordan de cualquier matriz. Esto no se hará, pero se sugiere una generalización en el problema 19. Aunque no se demostrará este hecho, siempre es posible determinar el número de unos arriba de la diagonal en la forma canónica de Jordan de una matriz A de $n \times n$. Sea λ_i un valor propio de A con multiplicidad algebraica r_i y multiplicidad geométrica s_i. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son los valores propios de A, entonces

Número de unos arriba de la diagonal de la forma canónica de Jordan de A

$$= (r_1 - s_1) + (r_2 - s_2) + \cdots + (r_k - s_k)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} r_i - \sum_{i=1}^{k} s_i = n - \sum_{i=1}^{k} s_i \quad \textbf{(15)}$$

Si se conoce la ecuación característica de una matriz A, entonces se pueden determinar las posibles formas canónicas de Jordan de A.

EJEMPLO 6 **Determinación de las posibles formas canónicas de Jordan de una matriz de 4 × 4 con ecuación característica dada** Si el polinomio característico de A es $(\lambda - 2)^3(\lambda + 3)$, entonces las posibles formas canónicas de Jordan de A son

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

o cualquier matriz obtenida rearreglando los bloques de Jordan en J. La primera matriz corresponde a una multiplicidad geométrica de 3 (para $\lambda = 2$); la segunda corresponde a una multiplicidad geométrica de 2, y la tercera a una multiplicidad geométrica de 1. ◆

PROBLEMAS 6.6

Autoevaluación

I. ¿Cuál de las siguientes no es una matriz de Jordan?

a. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Falso-verdadero

II. Toda matriz es similar a una matriz de Jordan

III. Suponga que A es una matriz de 2×2 que tiene el valor propio 2 y vector propio correspondiente $\mathbf{v}_1$. Entonces existe un vector $\mathbf{v}_2$ que satisface la ecuación $(A - 2I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$.

IV. Suponga que A es una matriz de 2×2 cuyo polinomio característico es $(\lambda - 2)^2$ tal que la multiplicidad geométrica de 2 es 1. Entonces si $\mathbf{v}_1$ es un vector propio de A, existe un vector $\mathbf{v}_2$ que satisface la ecuación $(A - 2I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$.

En los problemas 1 al 14 determine si la matriz dada es una matriz de Jordan.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Respuestas a la autoevaluación

I. b **II.** V **III.** F **IV.** V

12. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ **13.** $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

En los problemas 15 al 18 encuentre una matriz invertible C que transforme la matriz de 2×2 a su forma canónica de Jordan.

15. $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} -12 & 7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$ **17.** $\begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

***19.** Sea A una matriz de 3×3. Suponga que λ es un valor propio de A con multiplicidad algebraica 3 y multiplicidad geométrica 1 y sea $\mathbf{v}_1$ el vector propio correspondiente.

a. Demuestre que existe una solución, $\mathbf{v}_2$, al sistema $(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ tal que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes.

b. Con $\mathbf{v}_2$ definido en el inciso a), demuestre que existe una solución, $\mathbf{v}_3$, al sistema $(A - \lambda I)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$ tal que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son linealmente independientes.

c. Demuestre que si C es una matriz cuyas columnas son $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, entonces

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

20. Aplique el procedimiento descrito en el problema 19 para reducir la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ mediante una transformación de semejanza a su forma canónica de Jordan.

21. Haga lo mismo para $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

22. Haga lo mismo para $A = \begin{pmatrix} -1 & -18 & -7 \\ 1 & -13 & -4 \\ -1 & 25 & 8 \end{pmatrix}$.

23. Una matriz A de $n \times n$ es **nilpotente** si existe un entero k tal que $A^k = 0$. Si k es el entero más pequeño de este tipo, entonces k se llama **índice de nilpotencia** de A. Demuestre que si k es el índice de nilpotencia de A y si $m \geq k$, entonces $A^m = 0$.

***24.** Sea N_k la matriz definida por la ecuación (1). Demuestre que N_k es nilpotente con índice de nilpotencia k.

25. Escriba todas las matrices de Jordan de 4×4 posibles.

En los problemas 26 al 31 está dado el polinomio característico de una matriz A. Escriba todas las posibles formas canónicas de Jordan de A.

26. $(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)^2$ **27.** $(\lambda - 3)^3(\lambda + 4)$ **28.** $(\lambda - 3)^4$

29. $(\lambda - 4)^3(\lambda + 3)^2$ **30.** $(\lambda - 6)(\lambda + 7)^4$ **31.** $(\lambda + 7)^5$

32. Usando la forma canónica de Jordan, demuestre que para cualquier matriz A de $n \times n$, det $A = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A.

MATLAB 6.6

1. **a.** Sea $A = CJC^{-1}$, donde C y J están dados enseguida.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

   i. Verifique que las columnas 1 y 2 de C son los vectores propios de A con valor propio $\lambda = 2$. (Utilice la matriz $A - 2I$).

   ii. Verifique que la columna 3 de C es un vector propio de A con valor propio $\mu = 3$. (Use la matriz $A - 3I$.) Verifique que la columna 4 de C *no* es un vector propio de A con valor propio $\mu = 3$ pero que $(A - 3I)$ veces la columna 4 es un vector propio; es decir, verifique que $(A - 3I)^2$ (columna 4) = 0. La columna 4 de C se llama **vector propio generalizado** para A con valor propio $\mu = 3$.

   iii. Repita para otra matriz invertible C de 4×4. (Use la misma J.)

   iv. (*Lápiz y papel*) Explique por qué se puede decir que $\lambda = 2$ es un valor propio de A con multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 2 y que $\mu = 3$ es un valor propio de A con multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1.

   b. Para la J que sigue y la matriz C dada en el inciso a), forme $A = CJC^{-1}$.

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   Para $k = 1, \ldots, 4$, sea $\mathbf{c}_k$ la k-ésima columna de C.

   i. Verifique que $(A - 3I)\mathbf{c}_1 = 0$, $(A - 3I)^2\mathbf{c}_2 = 0$, $(A - 3I)^3\mathbf{c}_3 = 0$ y $(A - 3I)\mathbf{c}_4 = 0$. ¿Cuáles de las columnas de C son vectores propios de A? ¿Cuáles de las columnas de C son vectores propios generalizados de A?

   ii. Repita para otra matriz invertible C de 4×4.

   iii. (*Lápiz y papel*) Explique por qué se puede decir que $\lambda = 3$ es un valor propio de A con multiplicidad algebraica 4 y multiplicidad geométrica 2.

   c. Forme $A = CJC^{-1}$, donde C es la matriz dada en el inciso a) y J es la matriz que sigue.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   i. Con base en el patrón observado en los incisos a) y b), determine qué columnas de C son vectores propios de A y cuáles son vectores propios generalizados. Verifique sus respuestas mostrando que los productos adecuados son cero.

   ii. Repita para otra matriz C.

   iii. (*Lápiz y papel*) Qué puede decir sobre las multiplicidades algebraica y geométrica de los valores propios de A? Justifique su respuesta.

2. Genere una matriz invertible C de 5×5. Forme una matriz A tal que $\lambda = 2$ sea un valor propio de A con multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1, donde las columnas 1 y 2 de C son los vectores propios o los vectores propios generalizados asociados

con $\lambda = 2$; $\mu = 4$ es un valor propio para A con multiplicidad algebraica 3 y multiplicidad geométrica 1, donde las columnas 3 a 5 de A son vectores propios o vectores propios generalizados asociados con $\mu = 4$. Explique su procedimiento. Verifique su respuesta final para A mostrando que los productos pertinentes son cero.

Cálculo

6.7 UNA APLICACIÓN IMPORTANTE: FORMA MATRICIAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Suponga que $x = f(t)$ representa alguna cantidad física como el volumen de una sustancia, la población de ciertas especies, la masa de una sustancia radiactiva en decaimiento o el número de dólares invertidos en acciones. Entonces la tasa de crecimiento de $f(t)$ está dada por su derivada $f'(t) = dx/dt$. Si $f(t)$ crece a una tasa constante, entonces $dx/dt = k$ y $x = kt + C$; es decir, $x = f(t)$ es una función de una recta.

Con frecuencia es más interesante y más apropiado considerar la **tasa relativa de crecimiento** definida por

$$\text{Tasa relativa de crecimiento} = \frac{\text{tamaño real de crecimiento}}{\text{tamaño de } f(t)} = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{x'(t)}{x(t)} \qquad (1)$$

Si la tasa relativa de crecimiento es constante, entonces se tiene

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a \qquad (2)$$

o

$$x'(t) = ax(t) \qquad (3)$$

Ecuación diferencial

La ecuación (3) se llama **ecuación diferencial** porque es una ecuación que incluye una derivada. No es difícil demostrar que las únicas soluciones a (3) son de la forma

$$x(t) = ce^{at} \qquad (4)$$

Valor inicial

donde c es una constante arbitraria. Sin embargo, si $x(t)$ representa alguna cantidad física, la práctica usual es especificar un **valor inicial** $x_0 = x(0)$ de la cantidad. Después, al sustituir $t = 0$ en (4) se tiene $x_0 = x(0) = ce^{a\,0} = c$, o sea,

$$x(t) = x_0e^{at} \qquad (5)$$

La función $x(t)$ dada por (5) es la solución única a (3) que satisface la condición inicial $x(0) = x_0$.

La ecuación (3) surge en muchas aplicaciones interesantes. Sin duda, algunas se encuentran en los libros de cálculo —en el capítulo que introduce la función exponencial. En esta sección se considera la generalización de la ecuación (3).

En el modelo anterior se busca una función desconocida. Con frecuencia ocurre que existen varias funciones ligadas por varias ecuaciones diferenciales. Más adelante se darán ejemplos. Considere el siguiente sistema de n ecuaciones diferenciales con n funciones desconocidas:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{aligned} \tag{6}$$

donde las cantidades a_{ij} son números reales. El sistema (6) se llama **sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de** $n \times n$. El término "primer orden" significa que sólo ocurren derivadas de primer orden en el sistema.

Ahora sea

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Función vectorial

En este caso, $\mathbf{x}(t)$ se llama **función vectorial**. Se define

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$$

Entonces si se define la matiz de $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

El sistema (6) se puede escribir como

$$\boxed{\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)} \tag{7}$$

Observe que la ecuación (7) es casi idéntica a la ecuación (3). La única diferencia es que ahora se tiene una función vectorial y una matriz mientras que antes se tenía un función "escalar" y un número (matriz de 1×1).

Para resolver la ecuación (7) se puede esperar que la solución tenga la forma e^{At}. Pero ¿qué significa e^{At}? Se responderá a esta pregunta enseguida. Primero, recuerde la expansión en serie de la función e^t:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots \tag{8}$$

Esta serie converge para todo número real t. Entonces para cualquier número real a

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^4}{4!} + \cdots \qquad \textbf{(9)}$$

DEFINICIÓN 1 **La matriz e^A** Sea A una matriz de $n \times n$ con elementos reales (o complejos). Entonces e^A es una matriz de $n \times n$ definida por

$$\boxed{e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{k!}} \qquad \textbf{(10)}$$

Observación. No es difícil demostrar que la serie de matrices en la ecuación (10) converge para toda matriz A, pero hacerlo nos llevaría demasiado lejos. Sin embargo, se pueden dar indicaciones de por qué es así. Primero se define $|A|_i$ como la suma de los valores absolutos de las componentes en el renglón i de A. Después se define la **norma**† de A, denotada por $|A|$, como

Norma de una matriz

$$|A| = \max_{1 \le i \le n} |A|_i \qquad \textbf{(11)}$$

se puede demostrar que

$$|AB| \le |A|\,|B| \qquad \textbf{(12)}$$

y que

$$|A + B| \le |A| + |B| \qquad \textbf{(13)}$$

Después usando (12) y (13) en (10) se obtiene

$$|e^A| \le 1 + |A| + \frac{|A|^2}{2!} + \frac{|A|^3}{3!} + \frac{|A|^4}{4!} + \cdots = e^{|A|}$$

Puesto que $|A|$ es un número real, $e^{|A|}$ es finito. Esto muestra que la serie en (10) converge para cualquier matriz A.

Ahora se verá la utilidad de la serie en la ecuación (10).

† Ésta se llam [illegible] de A.

TEOREMA 1 Para cualquier vector constante **c**, $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{c}$ es una solución a (7). Más aún, la solución de (7) dada por $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ satisface $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Demostración Se calcula, usando (10):

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{c} = \left[I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \cdots\right]\mathbf{c} \tag{14}$$

Pero como A es una matriz constante, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A^k\frac{t^k}{k!} &= \frac{d}{dt}\frac{t^k}{k!}A^k = \frac{kt^{k-1}}{k!}A^k \\ &= \frac{A^kt^{k-1}}{(k-1)!} = A\left[A^{k-1}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right]\end{aligned} \tag{15}$$

Entonces combinando (14) y (15), se obtiene (ya que **c** es un vector constante)

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{d}{dt}e^{At}\mathbf{c} = A\left[I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \cdots\right]\mathbf{c} = Ae^{At}\mathbf{c} = A\mathbf{x}(t)$$

Por último, como $e^{A\cdot 0} = e^0 = I$, se tiene

$$\mathbf{x}(0) = e^{A\cdot 0}\mathbf{x}_0 = I\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$$

◆

DEFINICIÓN 2 **Matriz solución principal** La matriz e^{At} se llama la **matriz solución principal** del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Todavía queda un problema importante (y obvio): ¿cómo se calcula e^{At} de manera práctica? Primero se darán dos ejemplos.

EJEMPLO 1 **Cálculo de e^{At} cuando A es una matriz diagonal** Sea $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$. Entonces $A^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^2 & 0\\ 0 & 0 & 3^2\end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^3 & 0\\ 0 & 0 & 3^3\end{pmatrix}, \ldots, A^m = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^m & 0\\ 0 & 0 & 3^m\end{pmatrix}$ y

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t & 0 & 0\\ 0 & 2t & 0\\ 0 & 0 & 3t\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} \frac{t^2}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2^2t^2}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^2t^2}{2!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3!} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2^3t^3}{3!} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^3t^3}{3!} \end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 + (2t) + \frac{(2t)^2}{2!} + \frac{(2t)^3}{3!} + \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 + (3t) + \frac{(3t)^2}{2!} + \frac{(3t)^3}{3!} + \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

◆

EJEMPLO 2 **Cálculo de e^{At} cuando A es una matriz de 2×2 que no es diagonalizable** Sea $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Entonces, como se verifica fácilmente,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix},\ \ldots,\ A^m = \begin{pmatrix} a^m & ma^{m-1} \\ 0 & a^m \end{pmatrix},\ \ldots$$

de manera que

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!} & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ma^{m-1}t^m}{m!} \\ 0 & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!} \end{pmatrix}$$

Ahora bien

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{ma^{m-1}t^m}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}t^m}{(m-1)!} = t + at^2 + \frac{a^2t^3}{2!} + \frac{a^3t^4}{3!} + \cdots$$

$$= t\left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \cdots\right) = te^{at}$$

Así

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{at} & te^{at} \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}$$

◆

Como lo ilustra el ejemplo 1, es sencillo calcular e^{At} si A es una matriz diagonal. El ejemplo 1 muestra que si $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, entonces

$$e^{Dt} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$$

En el ejemplo 2 se calculó e^{At} para la matriz A en la forma canónica de Jordan. Resulta que esto es realmente todo lo que se necesita para poder hacerlo, como lo sugiere el siguiente teorema.

TEOREMA 2 Sea J la forma canónica de Jordan de una matriz A y sea $J = C^{-1}AC$. Entonces $A = CJC^{-1}$ y

$$\boxed{e^{At} = Ce^{Jt}C^{-1}} \tag{16}$$

Demostración Primero se observa que

$$\begin{aligned} A^n = (CJC^{-1})^n &= \overbrace{(CJC^{-1})(CJC^{-1})\cdots(CJC^{-1})}^{n \text{ veces}} \\ &= CJ(C^{-1}C)J(C^{-1}C)J(C^{-1}C)\cdots(C^{-1}C)JC^{-1} \\ &= CJ^nC^{-1} \end{aligned}$$

Sigue entonces que

$$(At)^n = C(Jt)^nC^{-1} \tag{17}$$

Así,

$$e^{At} = I + (At) + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots = CIC^{-1} + C(Jt)C^{-1} + C\frac{(Jt)^2}{2!}C^{-1} + \cdots$$

$$= C\left[I + (Jt) + \frac{(Jt)^2}{2!} + \cdots\right]C^{-1} = Ce^{Jt}C^{-1}$$

◆

El teorema 2 dice que para calcular e^{At} en realidad sólo se necesita calcular e^{Jt}. Cuando J es diagonal (como ocurre con frecuencia), entonces se sabe cómo calcular e^{Jt}. Si A es una matriz de 2×2 que no es diagonalizable, entonces $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ y $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$ como se calculó en el ejemplo 2. De hecho, no es difícil calcular e^{Jt} cuando J es una matriz de Jordan. Primero es necesario calcular e^{Bt} para una matriz de bloques B de Jordan. Un método para hacerlo se da en los problemas 20 al 22.

Ahora se aplicarán los cálculos a un modelo biológico sencillo de crecimiento de población. Suponga que en un ecosistema existen dos especies que interactúan S_1 y S_2. Se denotan las poblaciones de las especies en el tiempo t por $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Un sistema que gobierna el crecimiento relativo de las dos especies es

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= ax_1(t) + bx_2(t) \\ x_2'(t) &= cx_1(t) + dx_2(t) \end{aligned} \tag{18}$$

las constantes a, b, c y d se pueden interpretar de la siguiente manera: si las especies compiten, entonces es razonable tener $b < 0$ y $c < 0$. Esto se cumple porque los incrementos en la población de una especie disminuirán el crecimiento de la otra. Un segundo modelo es una relación de *depredador-presa*. Si S_1 es la presa y S_2 el depredador (S_2 se come a S_1), entonces es razonable tener $b < 0$ y $c > 0$ ya que un incremento en la especie depredadora causa un decremento en la especie presa, mientras que un incremento en la especie presa causará un incremento en la especie depredadora. (porque tendrá más comida). Por último, en una relación simbiótica (cada especie vive de la otra), es posible que se tenga $b > 0$ y $c > 0$. Por supuesto, las constantes a, b, c y d dependen de una gran variedad de factores incluyendo comida disponible, temporada del año, clima, límites debidos a sobrepoblación, otras especies en competencia, etcétera. Debemos analizar cuatro modelos diferentes usando el material de esta sección. Se supondrá que t se mide en años.

EJEMPLO 3 **Un modelo competitivo** Considere el sistema

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 3x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) + 2x_2(t) \end{aligned}$$

Aquí un aumento en la población de una especie causa una disminución en la tasa de crecimiento de la otra. Suponga que las poblaciones iniciales son $x_1(0) = 90$ y $x_2(0) = 150$. Encuentre las poblaciones de ambas especies para $t > 0$.

Solución Se tiene $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$ con vectores propios correspondientes $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Entonces

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad J = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{At} = Ce^{Jt}C^{-1} &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^t & -e^t \\ -2e^{4t} & e^{4t} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^t - 2e^{4t} & -e^t + e^{4t} \\ -2e^t + 2e^{4t} & -2e^t - e^{4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por último, la solución al sistema está dada por

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{At}\mathbf{x}_0 = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^t - 2e^{4t} & -e^t + e^{4t} \\ -2e^t + 2e^{4t} & -2e^t - e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 90 \\ 150 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -240e^t - 30e^{4t} \\ -480e^t + 30e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80e^t + 10e^{4t} \\ 160e^t - 10e^{4t} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, después de 6 meses ($t = \frac{1}{2}$ año), $x_1(t) = 80e^{1/2} + 10e^2 \approx 206$ individuos, mientras que $x_2(t) = 160e^{1/2} - 10e^2 \approx 190$ individuos. De manera más significativa, $160e^t - 10e^{4t} = 0$ cuando $16e^t = e^{4t}$ o $16 = e^{3t}$ o $3t = \ln 16$ y $t = (\ln 16)/3 \approx 2.77/3 \approx 0.92$ años ≈ 11 meses. Así, la segunda especie estará eliminada después de sólo 11 meses aunque comenzó con una población mayor. En los problemas 10 y 11 se pide al lector que demuestre que ninguna población sería eliminada si $x_2(0) = 2x_1(0)$ y la primera población quedaría eliminada si $x_2(0) > 2x_1(0)$. De esta manera, como ya lo sabía Darwin, la supervivencia en este modelo simplificado depende de los tamaños relativos de las especies en competencia cuando la competencia comienza. ◆

EJEMPLO 4 **Un modelo de depredador-presa** Se considera el siguiente sistema en el que la especie 1 es la presa y la especie 2 es el depredador:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + 4x_2(t) \end{aligned}$$

Encuentre las poblaciones de las dos especies para $t > 0$ si las poblaciones iniciales son $x_1(0) = 500$ y $x_2(0) = 100$.

Solución En este caso $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y el único valor propio es $\lambda = 3$ con un solo vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Una solución para la ecuación $(A - 3I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ (vea el teorema 6.6.2, página 600), es $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Entonces

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(del ejemplo 2)}$$

y

$$e^{At} = Ce^{Jt}C^{-1} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-t & 1-t \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}$$

Así la solución al sistema es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{At}\mathbf{x}_0 = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 500 \\ 100 \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 500 - 600t \\ 100 + 600t \end{pmatrix}$$

Es evidente que la especie presa será eliminada después de $\frac{5}{6}$ años = 10 meses –aun cuando comenzó con una población cinco veces mayor que la especie depredadora. De hecho, es sencillo demostrar (vea el problema 12) que no importa qué tan grande sea la ventaja inicial de la especie presa, siempre será eliminada en menos de 1 año. ✦

EJEMPLO 5 **Otro modelo de depredador-presa** Considere el modelo de depredador presa gobernado por el sistema

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

Si las poblaciones iniciales son $x_1(0) = x_2(0) = 1000$, determine las poblaciones de las dos especies para $t > 0$.

Solución Aquí $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ con ecuación característica $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, raíces complejas $\lambda_1 = 1 + i$ y $\lambda_2 = 1 - i$ y vectores propios $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.† Entonces

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = -\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix},$$

$$J = D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

y

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{pmatrix}$$

Ahora por la fórmula de Euler (vea el apéndice 2), $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$. Así

$$e^{(1+i)t} = e^t e^{it} = e^t(\cos t + i \operatorname{sen} t)$$

De manera similar,

$$e^{(1-i)t} = e^t e^{-it} = e^t(\cos t - i \operatorname{sen} t)$$

† Observe que $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ y $\mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1}$. Esto no debe sorprender porque según el resultado del problema 6.1.33, página 548, los valores propios de las matrices reales ocurren en pares conjugados complejos y sus vectores propios correspondientes son conjugados complejos.

Entonces

$$e^{Jt} = e^t\begin{pmatrix} \cos t + i \operatorname{sen} t & 0 \\ 0 & \cos t - i \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

y

$$e^{At} = Ce^{Jt}C^{-1} = \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t + i \operatorname{sen} t & 0 \\ 0 & \cos t - i \operatorname{sen} t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t + i \operatorname{sen} t & -i \cos t + \operatorname{sen} t \\ \cos t - i \operatorname{sen} t & i \cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix} 2\cos t & 2\operatorname{sen} t \\ -2\operatorname{sen} t & 2\cos t \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

Por último,

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) = e^t\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000e^t(\cos t + \operatorname{sen} t) \\ 1000e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) \end{pmatrix}$$

La especie presa es eliminada cuando $1000e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) = 0$ o cuando $\operatorname{sen} t = \cos t$. La primera solución positiva de la última ecuación es $t = \pi/4 \approx 0.7854$ años ≈ 9.4 meses. ◆

EJEMPLO 6 **Modelo de cooperación de especies (simbiosis)** Considere el modelo simbiótico gobernado por

$$x_1'(t) = -\tfrac{1}{2}x_1(t) + x_2(t)$$
$$x_2'(t) = \tfrac{1}{4}x_1(t) - \tfrac{1}{2}x_2(t)$$

Observe que en este modelo la población de cada especie aumenta proporcionalmente a la población de la otra y disminuye proporcionalmente a su propia población. Suponga que $x_1(0) = 200$ y $x_2(0) = 500$. Determine la población de cada especie para $t > 0$.

Solución En este caso $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ con valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$ y vectores propios correspondientes $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Entonces

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad J = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Así,

$$e^{At} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -e^{-t} & 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2-2e^{-t} & -4+4e^{-t} \\ -1+e^{-t} & -2-2e^{-t} \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2-2e^{-t} & -4+4e^{-t} \\ -1+e^{-t} & -2-2e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2400 + 1600e^{-t} \\ -1200 - 800e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 600 - 400e^{-t} \\ 300 + 200e^{-t} \end{pmatrix}$$

Observe que $e^{-t} \to 0$ si $t \to \infty$. Esto significa que con el tiempo, las dos especies en cooperación se acercan a las poblaciones de **equilibrio** de 600 y 300, respectivamente. Ninguna de las dos queda eliminada. ◆

PROBLEMAS 6.7

Autoevaluación

I. Si $C^{-1}AC = D$, entonces e^{At} = _____.

a. e^{Dt} **b.** $C^{-1}e^{Dt}C$ **c.** $Ce^{Dt}C^{-1}$ **d.** $e^{Ct}e^{Dt}e^{C^{-1}t}$

II. Si $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, entonces e^{Dt} = _____.

a. $\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} e^{\frac{3}{t}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{4}{t}} \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$

III. Si $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, entonces e^{Jt} = _____.

a. $\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$

IV. Suponga que

$$x' = ax + by, \qquad x(0) = x_0$$
$$y' = cx + dy, \qquad y(0) = y_0$$

que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y que A es similar a una matriz diagonal D. Entonces existe una matriz invertible C tal que $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =$ _____.

a. $C^{-1}e^{Dt}C\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ **b.** $Ce^{Dt}C^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ **c.** $e^{Dt}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

En los problemas 1 al 9 encuentre la matriz solución principal e^{At} del sistema $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ **3.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ **6.** $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} -12 & 7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$ **8.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **9.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

10. En el ejemplo 3 demuestre que si el vector inicial $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$, donde a es una constante, entonces ambas poblaciones crecen a una tasa proporcional a e^t.

11. En el ejemplo 3 demuestre que si $x_2(0) > 2x_1(0)$, entonces la primera población quedará eliminada.

12. En el ejemplo 4 demuestre que la primera población se extinguirá en α años, donde $\alpha = x_1(0)/[x_1(0) + x_2(0)]$.

***13.** En una planta desalinizadora hay dos tanques de agua. Suponga que el tanque 1 contiene 1000 litros de salmuera que tienen disueltos 1000 kg de sal y el tanque 2 contiene 1000 litros de agua pura. Suponga que el fluye agua al tanque 1 a una tasa de 20 litros por minuto y la mezcla fluye del tanque 1 al tanque 2 a una tasa de 30 litros por minuto. Del tanque 2 se bombean 10 litros de regreso al 1 (estableciendo **retroalimentación**) mientras que 20 litros se desperdician. Encuentre la cantidad de sal en ambos tanques en el tiempo t. [*Sugerencia*: Escriba la información como un sistema de 2×2 y sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ la cantidad de sal en cada tanque.]

14. Una comunidad de n individuos está expuesta a una enfermedad infecciosa.† En el tiempo t, la comunidad se divide en grupos: el grupo 1 con población $x_1(t)$ es el grupo susceptible; el grupo 2 con una población de $x_2(t)$ es el grupo de individuos infectados en circulación, y el grupo 3, con población de $x_3(t)$, consiste en aquellos que están aislados, muertos o inmunes. Es razonable suponer que inicialmente $x_2(t)$ y $x_3(t)$ son pequeños en comparación

Respuestas a la autoevaluación

I. c **II.** a **III.** c **IV.** b

† Un análisis de este modelo se puede encontrar en N. Bailey, "The Total Size of a General Stochastic Epidemic", *Biometrika* 40 (1953): 177-185.

con $x_1(t)$. Sean α y β constantes positivas; α denota la tasa a la que los individuos susceptibles se infectan y β la tasa a la que los individuos infectados pasan al grupo 3. Un buen modelo para la dispersión de la enfermedad está dado por el sistema

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -\alpha x_1(0)x_2 \\ x_2'(t) &= \alpha x_1(0)x_2 - \beta x_2 \\ x_3'(t) &= \beta x_2 \end{aligned}$$

a. Escriba este sistema en la forma $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ y encuentre la solución en términos de $x_1(0)$, $x_2(0)$ y $x_3(0)$. Observe que $x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) = n$.

b. Demuestre que si $\alpha x(0) < \beta$, entonces la enfermedad no producirá una epidemia.

c. ¿Qué pasará si $\alpha x(0) > \beta$?

15. Considere la **ecuación diferencial de segundo orden** $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$.

a. Haciendo $x_1(t) = x(t)$ y $x_2(t) = x'(t)$, escriba las ecuaciones anteriores como un sistema de primer orden en la forma de la ecuación (7), donde A es una matriz de 2×2.

b. Demuestre que la ecuación característica de A es $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

En los problemas 16 al 19 use el resultado del problema 15 para resolver la ecuación dada.

16. $x'' + 5x' + 6x = 0$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

17. $x'' + 6x' + 9x = 0$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$

18. $x'' + 4x = 0$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

19. $x'' - 3x' - 10x = 0$; $x(0) = 3$, $x'(0) = 2$

20. Sea $N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Demuestre que $N_3^3 = 0$, la matriz cero.

21. Demuestre que $e^{N_3t} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. [*Sugerencia:* Escriba la serie para e^{N_3t} y utilice el resul-tado del problema 20.]

22. Sea $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Demuestre que $e^{Jt} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. [*Sugerencia:* $Jt = \lambda It + N_3t$. Utilice el hecho de que $e^{A+B} = e^Ae^B$ si $AB = BA$.]

23. Usando el resultado del problema 22, calcule e^{At}, donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. [*Sugerencia:* Vea el problema 6.6.20, página 604.]

24. Calcule e^{At}, donde $A = \begin{pmatrix} -1 & -18 & -7 \\ 1 & -13 & -4 \\ -1 & 25 & 8 \end{pmatrix}$.

25. Calcule e^{Jt}, donde $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

26. Calcule e^{At}, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

27. Calcule e^{At}, donde $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6.8 UNA PERSPECTIVA DIFERENTE: LOS TEOREMAS DE CAYLEY-HAMILTON Y GERSHGORIN

Existen muchos resultados interesantes sobre los valores propios de una matriz. En esta sección se estudiarán dos de ellos. El primero dice que cualquier matriz satisface su propia ecuación característica. El segundo muestra cómo localizar, de manera general, los valores propios de cualquier matriz, prácticamente sin hacer cálculos.

Sea $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ un polinomio y sea A una matriz cuadrada. Entonces las potencias de A están definidas y se define

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I \tag{1}$$

EJEMPLO 1 **Evaluación de $p(A)$** Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ y $p(x) = x^2 - 5x + 3$. Entonces $p(A) = A^2 - 5A + 3I = \begin{pmatrix} 13 & 24 \\ 18 & 61 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -20 \\ -15 & -35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 4 \\ 3 & 29 \end{pmatrix}$ ◆

La expresión (1) es un polinomio con coeficientes escalares definido para una matriz variable. También se puede definir un polinomio cuyos coeficientes son *matrices cuadradas* de $m \times m$ por

$$Q(\lambda) = B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \cdots + B_n\lambda^n \tag{2}$$

Si A es una matriz del mismo tamaño que las matrices B, entonces se define

$$Q(A) = B_0 + B_1A + B_2A^2 + \cdots + B_nA^n \tag{3}$$

Debe tenerse cuidado en (3) ya que las matrices no conmutan bajo la multiplicación.

TEOREMA 1 Si $P(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ son polinomios en la variable escalar λ, cuyos coeficientes de matrices cuadradas y si $P(\lambda) = Q(\lambda)(A - \lambda I)$, entonces $P(A) = 0$.

Demostración Si $Q(\lambda)$ está dado por la ecuación (2), entonces

$$P(\lambda) = (B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \cdots + B_n\lambda^n)(A - \lambda I)$$

$$= B_0A + B_1A\lambda + B_2A\lambda^2 + \cdots + B_nA\lambda^n$$
$$-B_0\lambda - B_1\lambda^2 - B_2\lambda^3 - \cdots - B_n\lambda^{n+1} \tag{4}$$

Entonces sustituyendo A en lugar de λ en (4), se obtiene

$$P(A) = B_0A + B_1A^2 + B_2A^3 + \cdots + B_nA^{n+1}$$
$$-B_0A - B_1A^2 - B_2A^3 - \cdots - B_nA^{n+1} = 0$$ ◆

Observación. No se puede probar este teorema sustituyendo $\lambda = A$ para obtener $P(A) = Q(A)(A - A) = 0$. Esto se debe a que es posible encontrar polinomios $P(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ con coeficientes matriciales tales que $F(\lambda) = P(\lambda)Q(\lambda)$ pero $F(A) \neq P(A)Q(A)$. (Vea el problema 17.)

Ahora se puede establecer el teorema principal.

TEOREMA 2 **Teorema de Cayley-Hamilton**† Toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica. Es decir, si $p(\lambda) = 0$ es la ecuación característica de A, entonces $p(A) = 0$.

Demostración Se tiene

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Es claro que cualquier cofactor de $(A - \lambda I)$ es un polinomio en λ. Así, la adjunta de $A - \lambda I$ (vea la definición 2.4.1, página 211) es una matriz de $n \times n$ en la que cada componente es un polinomio en λ. Es decir,

$$\operatorname{adj}(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} p_{11}(\lambda) & p_{12}(\lambda) & \cdots & p_{1n}(\lambda) \\ p_{21}(\lambda) & p_{22}(\lambda) & \cdots & p_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1}(\lambda) & p_{n2}(\lambda) & \cdots & p_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Esto significa que se puede pensar en adj $(A - \lambda I)$ como en un polinomio, $Q(\lambda)$, en λ cuyos coeficientes son matrices de $n \times n$. Para entender esto, se ve lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} -\lambda^2 - 2\lambda + 1 & 2\lambda^2 - 7\lambda - 4 \\ 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 & -3\lambda^2 - \lambda + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

† Recibe el nombre en honor de Sir William Rowan Hamilton y Arthur Cayley (1821-1895) (vea las páginas 54 y 76). Cayley publicó el primer análisis de este famoso teorema en 1858. Por su parte, Hamilton descubrió (pero no demostró) el resultado en su trabajo sobre cuaterniones.

Del teorema 2.4.2, página 213

$$\det(A - \lambda I)I = [\text{adj}\,(A - \lambda I)][A - \lambda I] = Q(\lambda)(A - \lambda I) \quad \textbf{(5)}$$

Pero $\det(A - \lambda I)I = p(\lambda)I$. Si

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

entonces se define

$$P(\lambda) = p(\lambda)I = \lambda^n I + a_{n-1}\lambda^{n-1}I + \cdots + a_1\lambda I + a_0 I$$

Por lo tanto, de (5) se tiene $P(\lambda) = Q(\lambda)(A - \lambda I)$. Por último, del teorema 1, $P(A) = 0$. Esto completa la prueba. ✦

EJEMPLO 2 **Ilustración del teorema de Cayley-Hamilton** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. En el ejemplo 6.1.4, página 538, se calculó la ecuación característica $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Ahora se calcula

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 11 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 22 \\ 29 & 4 & 17 \\ 16 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

y

$$A^3 - 2A^2 - 5A + 6I = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 22 \\ 29 & 4 & 17 \\ 16 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & -2 & -2 \\ -14 & 0 & -22 \\ -6 & 2 & -16 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -5 & 5 & -20 \\ -15 & -10 & 5 \\ -10 & -5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

✦

En algunas situaciones el teorema de Cayley-Hamilton es útil para calcular la inversa de una matriz. Si existe A^{-1} y $p(A) = 0$, entonces $A^{-1}p(A) = 0$. Para ilustrar esto, si $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$, entonces

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$$

y

$$A^{-1}p(A) = A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2 A + a_1 I + a_0 A^{-1} = 0$$

Así

$$A^{-1} = \frac{1}{a_0}(-A^{n-1} - a_{n-1}A^{n-2} - \cdots - a_2A - a_1I) \tag{6}$$

Observe que $a_0 \neq 0$ porque $a_0 = \det A$ (¿por qué?) y se supuso que A era invertible.

EJEMPLO 3 **Aplicación del teorema de Cayley-Hamilton para calcular A^{-1}** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$. Aquí $n = 3$, $a_2 = -2$, $a_1 = -5$, $a_0 = 6$ y

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{6}(-A^2 + 2A + 5I) \\ &= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} -6 & -1 & -1 \\ -7 & 0 & -11 \\ -3 & 1 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 6 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 9 & -13 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observe que se calculó A^{-1} haciendo sólo una división y calculando sólo un determinante (al encontrar $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$). Este método en ocasiones es muy eficiente en una computadora. ◆

Teorema de las circunferencias de Gershgorin

Se estudiará ahora el segundo resultado importante de esta sección. Sea A una matriz real o compleja de $n \times n$. Como es usual, se escribe

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se define el número

$$r_1 = |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}| = \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| \tag{7}$$

De manera similar se define

$$\boxed{\begin{aligned} r_i &= |a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{in}| \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \end{aligned}} \tag{8}$$

Es decir, r_i es la suma de los valores absolutos de los números en el renglón i de A que no están en la diagonal principal. Sea

$$\boxed{D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le r_i\}} \tag{9}$$

En este caso D_i es un disco en el plano complejo centrado en a_{ii} con radio r_i (vea la figura 6.4).

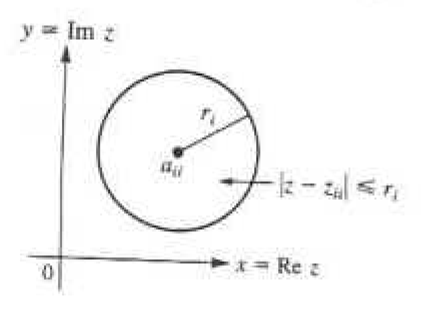


Figura 6.4 Un círculo de radio r_i centrado en a_{ii}

El disco D_i consiste en todos los puntos en el plano complejo sobre y dentro de las circunferencias $C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| = r_i\}$. Las circunferencias C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, se llaman **circunferencias de Gershgorin**.

TEOREMA 3 **Teorema de las circunferencias de Gershgorin**† Sea A una matriz de $n \times n$ y sea D_i como se definió en la ecuación (9). Entonces cada valor propio de A está contenido en al menos uno de los D_i. Es decir, si los valores propios de A son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, entonces

$$\boxed{\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i} \tag{10}$$

† El matemático ru[illegible] publicó este trabajo en 1931.

Demostración Sea λ un valor propio de A con vector propio $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Sea $m = \text{máx}\ \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$.

Entonces $(1/m)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ es un vector propio de A correspondiente a λ y máx $\{|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_n|\} = 1$. Sea y_i un elemento de $\mathbf{y}$ con $|y_i| = 1$. Ahora bien, $A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$. La componente i del n-vector $A\mathbf{y}$ es $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n$. La componente i de $\lambda\mathbf{y}$ es λy_i. Entonces

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n = \lambda y_i,$$

lo que se puede escribir como

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = \lambda y_i \tag{11}$$

Restando $a_{ii}y_i$ en ambos lados, la ecuación (11) se puede escribir como

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}y_j = \lambda y_i - a_{ii}y_i = (\lambda - a_{ii})y_i \tag{12}$$

Después, tomando el valor absoluto en ambos lados de (12) y usando la desigualdad del triángulo ($|a + b| \le |a| + |b|$), se obtiene

$$|(a_{ii} - \lambda)y_i| = \left| -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}y_j \right| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\,|y_j| \tag{13}$$

Se dividen ambos lados de (13) entre $|y_i|$ (que es igual a 1) para obtener

$$|a_{ii} - \lambda| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \frac{|y_j|}{|y_i|} \le \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| = r_i \tag{14}$$

El último paso sigue el hecho de que $|y_j| \le |y_i|$ (por la forma en que se eligió y_i). Pero esto prueba el teorema ya que (14) muestra que $\lambda \in D_i$. ✦

EJEMPLO 4 Uso del teorema de Gershgorin Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces $a_{11} = 1$, $a_{22} = 2$, $a_{33} = -1$, $r_1 = |-1| + |4| = 5$, $r_2 = |3| + |-1| = 4$ y $r_3 = |2| + |1| = 3$. Así, los valores propios de A se encuentran dentro de las fronteras de las tres circunferencias dibujadas en la figura

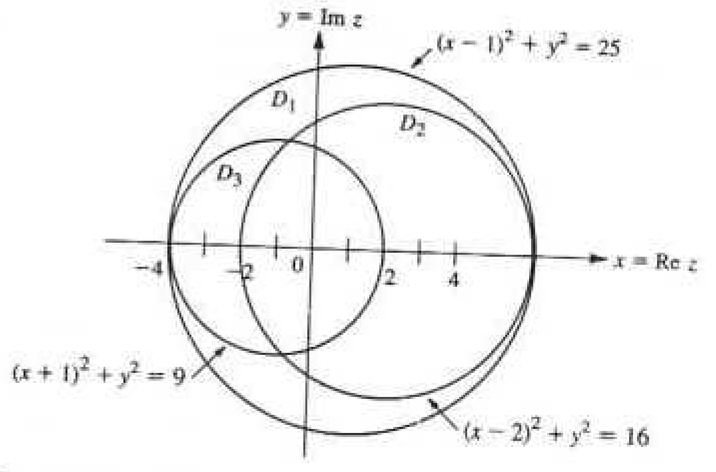


Figura 6.5 Todos los valores propios de A están dentro de estas tres circunferencias

6.5. Esto se puede verificar ya que se sabe por el ejemplo 6.1.4, página 538, que los valores propios de A son 1, −2 y 3, los cuales están dentro de las tres circunferencias. Observe que las circunferencias de Gershgorin se pueden intersectar entre sí. ◆

EJEMPLO 5 **Uso del teorema de Gershgorin** Encuentre las fronteras sobre los valores propios de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 5 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 6 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & -3 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 4 \end{pmatrix}$$

Solución Aquí $a_{11}=3$, $a_{22}=5$, $a_{33}=6$, $a_{44}=-3$, $a_{55}=4$, $r_1=\frac{3}{2}$, $r_2=\frac{3}{2}$, $r_3=1$, $r_4=\frac{7}{4}$ y $r_5=1$. Las circunferencias de Gershgorin están dibujadas en la figura 6.6. Es evidente, del teorema 3 y la figura 6.6, que si λ es un valor propio de A, entonces $|\lambda|\le 7$ y $\text{Re}\,\lambda \ge -\frac{19}{4}$.

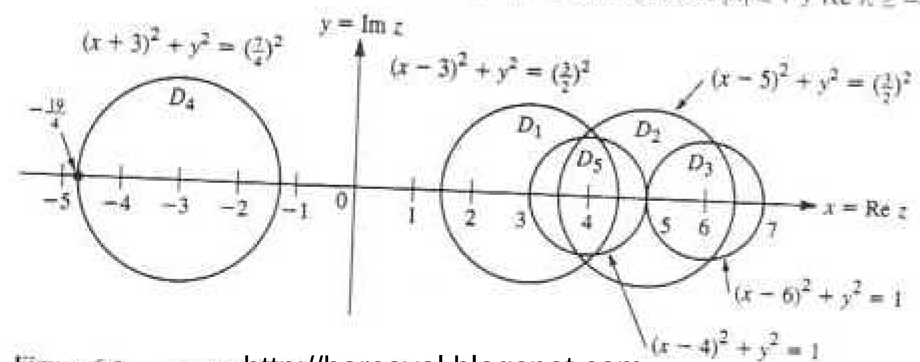


Figura 6.6 Todos los valores propios de A se encuentran dentro de estas cinco circunferencias

Observe el poder del teorema de Gershgorin para encontrar la localización aproximada de los valores propios con muy poco trabajo. ✦

PROBLEMAS 6.8

Autoevaluación

I. ¿Qué ecuación se satisface por $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

a. $A^2 - 3A + 2I = 0$ **b.** $A^2 - 2A = 0$
c. $A^2 + 2A - 3I = 0$ **d.** $A^2 + 3A + 2I = 0$

II. Según el teorema de Gershgorin, los valores propios de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ se encuentran dentro de las circunferencias con centro en (2, 0) cuyo radio mayor es _____.

a. 7 **b.** 8 **c.** $\sqrt{34}$ **d.** 10

En los problemas 1 al 9: **a)** Encuentre la ecuación característica $p(\lambda) = 0$ de la matriz dada; **b)** verifique que $p(A) = 0$; **c)** utilice el inciso *b*) para calcular A^{-1}.

1. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & a & d \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$; $bcd \neq 0$

En los problemas 10 al 14 dibuje las circunferencias de Gershgorin para la matriz dada A y encuentre una cota para $|\lambda|$ si λ es un valor propio de A.

10. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 5 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 5 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 4 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & -7 \\ 3 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Respuestas a la autoevaluación

I. a **II.** b

13. $\begin{pmatrix} -7 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{10} & -10 & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 5 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 5 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 4 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ -1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 2 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

15. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 3 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 5 & 2 \\ \frac{1}{4} & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Demuestre que los valores propios de A son números reales positivos.

16. Sea $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Demuestre que los valores propios de A son reales y negativos.

17. Sea $P(\lambda) = B_0 + B_1\lambda$ y $Q(\lambda) = C_0 + C_1\lambda$, donde B_0, B_1, C_0 y C_1 son matrices de $n \times n$.
   a. Calcule $F(\lambda) = P(\lambda)Q(\lambda)$.
   b. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que $F(A) = P(A)Q(A)$ si y sólo si A conmuta tanto con C_0 como con C_1.

18. Sea A una matriz de $n \times n$ con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y sea $r(A) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$. Si $\|A\|$ es la norma de la máxima suma por renglones definida en la sección 6.7, demuestre que $r(A) \le \|A\|$.

19. Se dice que la matriz A de $n \times n$ tiene **diagonal estrictamente dominante** si $|a_{ii}| > r_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, donde r_i está definido por la ecuación (8). Demuestre que si A es una matriz con diagonal estrictamente dominante, entonces $\det A \neq 0$.

MATLAB 6.8

1. Para las matrices en los problemas 1 al 13 de la sección 6.1, encuentre *a mano* el polinomio característico. Use MATLAB y los coeficientes del polinomio característico (encontrado a mano) para verificar el teorema de Cayley-Hamilton para estas matrices y para encontrar las matrices inversas. Verifique su respuesta sobre las inversas.

2. **a.** Para una matriz aleatoria A de 4×4 encuentre **c = poly(A)**. De **help polyvalm** y después use **polyvalm** para ilustrar el teorema de Cayley-Hamilton.
   b. Use el teorema de Cayley-Hamilton para encontrar A^{-1} y verifique su respuesta.
   c. Repita los incisos a) y b) para una matriz aleatoria de valores complejos de 4×4.

3. Sea A una matriz aleatoria de 2×2. Considere el siguiente programa de MATLAB:

```
r1 = sum(abs(A(1,:)))–abs(A(1,1))
r2 = sum(abs(A(2,:)))–abs(A(2,2))
a1 = real(A(1,1)), b1 = imag(A(1,1))
a2 = real(A(2,2)), b2 = imag(A(2,2))
```

Hasta ahora se ha encontrado el centro y el radio de cada circunferencia de Gershgorin.

```
xx = - r1: 2*r1/100: r1;
 x = xx + a1;
 z = real(sqrt(r1*r1-xx.*xx));
 y = z + b1; yy = -z+b1;
x1 = [x fliplr(x)];
y1 = [y  yy];
```

Se han creado los vectores **x1** y **y1** que contienen los valores x y y para la circunferencia (superiores e inferiores) del radio **r1** alrededor de $A(1, 1)$. (Observe el "**.**" antes de "*" en **xx.*xx** en el cálculo de **z**. El comando **real** se usa para asegurar que los errores de redondeo no creen valores con pequeñas partes imaginarias para **z**. Es útil usar "**;**" al final de cada línea para evitar que se desplieguen los más de 100 valores.)

Repita el último conjunto del programa sustituyendo todos los unos con números dos.

```
axis('square')
plot(x1, y1, 'b', x2, y2, 'g')
hold on
e = eig(A)
plot(real(e), imag(e), 'w*')
hold off
```

El programa grafica las dos circunferencias de Gershgorin (una en azul y la otra en verde), encuentra los valores propios y los grafica como puntos (con el símbolo "*" en blanco). Los colores y símbolo se pueden cambiar. Si está usando MATLAB 4.0, dé el comando **axis('square')** *después* de las instrucciones para graficar. (*Nota.* Debido al posible uso de escalas diferentes en los ejes x y y, las circunferencias pueden aparecer un poco elípticas.)

a. Introduzca una matriz de valores reales de 2×2 y el programa anterior. Explique lo qué observa en la gráfica a la luz del teorema 3.

b. Repita el inciso a) para una matriz de valores complejos de 2×2.

c. Repita el inciso a) para una matriz de valores complejos de 3×3. Será necesario que agregue algunas instrucciones al programa; es decir, deberá crear **r3**, **a3**, **b3**, **x3** y **y3** y modificar la primera instrucción de graficado.

RESUMEN

- ***Valores y vectores propios***
  Sea A una matriz de $n \times n$ con componentes reales. El número λ (real o complejo) se llama un **valor propio** o **eigenvalor** de A si existe un vector **v** *diferente de cero* en $\mathbb{C}^n$ tal que (p. 533)

  $$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

  El vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ se llama **vector propio** o **eigenvector** de A correspondiente al valor propio λ.

- Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces λ es un valor propio de A si y sólo si (p. 535)

  $$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

La ecuación $p(\lambda) = 0$ se llama **ecuación característica** de A; $p(\lambda)$ se conoce como el **polinomio característico** de A.

- Contando las multiplicidades, toda matriz de $n \times n$ tiene exactamente n valores propios (p. 535)
- Los vectores propios correspondientes a valores propios diferentes son linealmente independientes. (p. 536)

- ***Multiplicidad algebraica***
  Si $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}$, entonces r_i es la **multiplicidad algebraica** de λ_i. (p. 537)
- Los valores propios de una matriz real ocurren en pares conjugados complejos. (p. 541)

- ***Espacio propio***
  Si λ es un valor propio de la matriz A de $n \times n$, entonces $E_\lambda = \{\mathbf{v}: A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$ es un subespacio de $\mathbb{C}^n$ llamado el **espacio propio** de A correspondiente a λ. Se denota por E_λ. (p. 535)

- ***Multiplicidad geométrica***
  La **multiplicidad geométrica** de un valor propio λ de la matriz A es igual a $\dim E_\lambda = \nu(A - \lambda I)$. (p. 544)
- Para cualquier valor propio λ, multiplicidad geométrica $\leq$ multiplicidad algebraica. (p. 545)
- Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A tiene n vectores propios linealmente independientes si y sólo si la multiplicidad geométrica de cada valor propio es igual a su multiplicidad algebraica. En particular, A tiene n vectores propios linealmente independientes si todos los valores propios son diferentes (ya que en ese caso la multiplicidad algebraica de todo valor propio es 1). (p. 545)

- ***Teorema de resumen***
  Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes 12 afirmaciones son equivalentes; es decir, cada una implica a las otras 11 (de manera que si una es cierta, todas son ciertas): (p.546)

  i. A es invertible
  ii. La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).
  iii. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para todo n-vector $\mathbf{b}$.
  iv. A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n de $n \times n$.
  v. A se puede escribir como el producto de matrices elementales.
  vi. La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.
  vii. Los renglones (y columnas) de A son linealmente independientes.
  viii. $\det A \neq 0$.
  ix. $\nu(A) = 0$.
  x. $\rho(A) = n$.
  xi. La transformación lineal T de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ definida por $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ es un isomorfismo.
  xii. Cero *no* es un valor propio de A.

- ***Matrices semejantes***
  Se dice que dos matrices A y B de $n \times n$ son **semejantes** si existe una matriz invertible C de $n \times n$ tal que

$$B = C^{-1}AC$$

(p. 564, 565)

La función que se acaba de definir y que lleva a la matriz A en la matriz B se llama **transformación de semejanza**.

- A y B son semejantes si existe una matriz invertible C tal que $CB = AC$. (p. 565)
- Las matrices semejantes tienen los mismos valores propios (p. 566)
- ***Matriz diagonalizable***
  Una matriz A de $n \times n$ es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal D tal que A sea emejante a D. (p. 566)
- Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores propios linealmente independientes. En tal caso, la matriz diagonal D semejante a A está dada por (p. 567)

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

  donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A. Si C es una matriz cuyas columnas son vectores propios linealmente independientes de A, entonces

$$D = C^{-1}AC$$

- Si la matriz A de $n \times n$ tiene n valores propios diferentes, entonces A es diagonalizable (p. 569)
- Los valores propios de una matriz simétrica real son reales (p. 576)
- Los vectores propios de una matriz simétrica real correspondientes a valores propios diferentes son ortogonales. (p. 577)
- Una matriz simétrica real de $n \times n$ tienen vectores propios reales ortonormales. (p. 577)
- ***Matriz ortogonalmente diagonalizable***
  Se dice que una matriz A de $n \times n$ es **ortogonalmente diagonalizable** si existe una matriz ortogonal Q tal que (p. 577)

$$Q^tAQ = D$$

  donde $D = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A.
- **Procedimiento para encontrar una ortogonal matriz Q diagonalizante para una matriz real simétrica A:** (p. 578)
  - **i.** Encuentre una base para cada espacio propio de A.
  - **ii.** Encuentre una base ortonormal para cada espacio propio de A usando el proceso de Gram-Schmidt.
  - **iii.** Escriba Q como la matriz cuyas columnas son los vectores propios ortonormales obtenidos en el paso *ii*).
- La **transpuesta conjugada** de una matriz de $m \times n$, $A = (a_{ij})$, denotada por A^*, es la matriz de $n \times m$ cuya componente ij es $\overline{a_{ji}}$. (p. 580)
- Una matriz compleja A de $n \times n$ es **hermitiana** si $A^* = A$. (p. 580)
- Una matriz compleja U de $n \times n$ es **unitaria** si $U^* = U^{-1}$. (p. 580)
- ***Ecuación cuadrática y forma cuadrática***
  Una **ecuación cuadrática en dos variables sin término lineal** es una ecuación de la forma (p. 585)

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

  donde $|a| + |b| + |c| \neq 0$ y a, b, c son números reales.

  Una **forma cuadrática en dos variables** es una expresión de la forma

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

  donde $|a| + |b| + |c| \neq 0$ y a, b, c son números reales.

- Una forma cuadrática se puede escribir como (p. 586)

$$F(x, y) = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica.

- Si los valores propios de A son a' y c', entonces la forma cuadrática se puede escribir como (p. 587)

$$\overline{F}(x', y') = a'x'^2 + c'y'^2$$

donde $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y Q es la matriz ortogonal que diagonaliza A.

- ***Teorema de los ejes principales en*** $\mathbb{R}^2$

Sea

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \qquad (*)$$ (p. 588)

una ecuación cuadrática en las variables x y y; entonces existe un número único θ en $[0, 2\pi)$ tal que la ecuación (*) se puede escribir en la forma

$$a'x'^2 + c'y'^2 = d$$

donde x', y' son los ejes obtenidos al rotar los ejes x y y un ángulo θ en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Más aun, los números a' y c' son los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$. Los ejes x' y y' se llaman **ejes principales** de la gráfica de la ecuación cuadrática.

- Si $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$, entonces la ecuación cuadrática (*) es la ecuación de: (p. 591)

  i. Una hipérbola si $d \neq 0$ y $\det A < 0$.
  ii. Una elipse, un círculo o una sección cónica degenerada si $d \neq 0$ y $\det A > 0$.
  iii. Un par de rectas o una sección cónica degenerada si $d \neq 0$ y $\det A = 0$.
  iv. Si $d = 0$, entonces (*) es la ecuación de dos rectas si $\det A \neq 0$ y la ecuación de una sola recta si $\det A = 0$.

- ***Forma cuadrática en*** $\mathbb{R}^n$

Sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y sea A una matriz simétrica de $n \times n$. Entonces la **forma cuadrática** en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una expresión de la forma (p. 593)

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

- La matriz N_k es la matriz de $k \times k$ (p. 597)

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- La **matriz de bloques de Jordan** de $k \times k$, $B(\lambda)$ está dada por (p. 597)

$$B(\lambda) = \lambda I + N_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- Una **matriz de Jordan** J tiene la forma (p. 597)

$$J = \begin{pmatrix} B_1(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_r(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

donde cada $B_j(\lambda_j)$ es una matriz de bloques de Jordan.

- ***Forma canónica de Jordan***
Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces existe una matriz invertible C de $n \times n$ tal que (pp. 598, 599)

$$C^{-1}AC = J$$

donde J es una matriz de Jordan cuyos elementos en la diagonal son los valores propios de A. Más aún, J es única excepto por el orden en el que aparecen los bloques de Jordan.

La matriz J se llama la **forma canónica de Jordan** de A.

- Suponga que A es una matriz de 2×2 con un valor propio λ de multiplicidad geométrica 1. Entonces la forma canónica de Jordan de A es (pp. 600, 601, 602)

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

La matriz C consiste en las columnas $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, donde $\mathbf{v}_1$ es un vector propio y $\mathbf{v}_2$ es un **vector propio generalizado** de A; esto es, $\mathbf{v}_2$ satisface

$$(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$$

- Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces e^A está definido por (p. 608)

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

- La **solución matricial principal** a la ecuación diferencial vectorial $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ es e^{At}. (p. 609)

- La solución única a la ecuación diferencial $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ que satisface $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ es $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$. (p. 609)
- Si J es la forma canónica de Jordan de la matriz A y si $J = C^{-1}AC$, entonces (p. 611)

$$e^{At} = Ce^{Jt}C^{-1}$$

- ***Teorema de Cayley-Hamilton***
Cada matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica. Es decir, si $p(\lambda) = 0$ es la ecuación característica de A, entonces $p(A) = 0$. (p. 620)

- ***Circunferencias de Gershgorin***
Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y defina los números (pp. 622, 623)

$$r_1 = |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}| = \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|$$

$$r_i = |a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{in}|$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Las **circunferencias de Gershgorin** son circunferencias que acotan los discos

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le r_i\} \qquad (**)$$

- ***Teorema de las circunferencias de Gershgorin***
Sea A una matriz de $n \times n$ y sea D_i definida por la ecuación (∗ ∗). Entonces cada valor propio de A está contenido en al menos uno de los discos D_i. Esto es, si los valores propios de A son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ entonces (p. 623)

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$$

EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios 1 al 6 calcule los valores y los espacios propios de la matriz dada.

1. $\begin{pmatrix} -8 & 12 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 7 al 15 determine si la matriz dada A es diagonalizable. Si lo es, encuentre una matriz C tal que $C^{-1}AC = D$. Si A es simétrica, encuentre una matriz ortogonal Q tal que $Q^tAQ = D$.

7. $\begin{pmatrix} -18 & -15 \\ 20 & 17 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} \frac{17}{2} & \frac{9}{2} \\ -15 & -8 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 12 \\ 0 & -2 & 0 \\ 12 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 16 al 20 identifique la sección cónica y exprésela en términos de las nuevas variables sin el término xy.

16. $xy = -4$ **17.** $4x^2 + 2xy + 2y^2 = 8$ **18.** $4x^2 - 3xy + y^2 = 1$

19. $3y^2 - 2xy - 5 = 0$ **20.** $x^2 - 4xy + 4y^2 + 1 = 0$

21. Escriba la forma cuadrática $2x^2 + 4xy + 2y^2 - 3z^2$ en términos de las nuevas variables x', y' y z' de manera que no estén presentes los términos de productos cruzados.

En los ejercicios 22 al 24 encuentre una matriz C tal que $C^{-1}AC = J$, la forma canónica de Jordan de la matriz.

22. $\begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -25 & 11 \end{pmatrix}$ **23.** $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ **24.** $\begin{pmatrix} 0 & -18 & -7 \\ 1 & -12 & -4 \\ -1 & 25 & 9 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 25 al 27 calcule e^{At}.

25. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ **26.** $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ **27.** $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

28. Usando el teorema de Cayley-Hamilton, calcule la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

29. Use el teorema de las circunferencias de Gershgorin para encontrar una cota sobre los valores propios de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Apéndice 1
Inducción matemática

Inducción matemática es el nombre que recibe un principio fundamental de la lógica y que se puede usar para probar cierto tipo de proposiciones matemáticas. Normalmente se usa la inducción matemática para probar que cierta afirmación o ecuación se cumple para todo entero positivo. Por ejemplo, se quiere demostrar que $2^n > n$ para todos los enteros $n \geq 1$. Para hacer esto, se realizan dos pasos:

> Paso 1. Se demuestra que la afirmación es cierta para algún entero N (por lo general $N = 1$).
>
> Paso 2. Se *supone* que la afirmación es cierta para un entero k mayor o igual que N del paso 1 y después se *demuestra* que es cierta para el entero $k + 1$.

Si se pueden completar estos dos pasos, entonces se ha demostrado la validez de la afirmación para *todos* los enteros positivos mayores o iguales que N. Para convencerse de este hecho, se razona como sigue: como la afirmación es cierta para N (por el paso (1)], es cierta para el entero $N + 1$ [por el paso (2)]. Entonces también es cierta para el entero $(N + 1) + 1 = N + 2$ [de nuevo por el paso (2)], y así sucesivamente. Ahora se ilustrará el procedimiento con algunos ejemplos.

EJEMPLO 1 Demuestre que $2^n > n$ para todo entero $n \geq 1$.

Solución **Paso 1.** Si $n = 1$, entonces $2^1 = 2 > 1$, de manera que el resultado es cierto para $n = 1$.

Paso 2. Suponga que $2^k > k$. Entonces

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k = 2^k + 2^k > k + k > k + 1$$

Así, si el resultado es cierto para $n = k$, también lo es para $n = k + 1$.

Esto completa la demostración por inducción matemática. ✦

EJEMPLO 2 Demuestre que la suma de los primeros n enteros positivos es igual a $n(n + 1)/2$.

Solución Se quiere demostrar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

Puede intentar resolver algunos ejemplos para ilustrar que la fórmula (1) realmente funciona. (Esto por supuesto, no prueba la afirmación pero puede ayudar a persuadirle de que se cumple.) Por ejemplo,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \frac{10(11)}{2} = 55$$

Es decir, la fórmula es cierta para $N = 10$.

Paso 1. Si $n = 1$, entonces la suma de los primeros 1 enteros es 1. Pero $(1)(1 + 1)/2 = 1$, de manera que la ecuación (1) se cumple en el caso de $n = 1$.

Paso 2. Suponga que (1) es cierta para $n = k$; es decir,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Debe demostrarse que se cumple para $n = k + 1$. Esto es, se quiere probar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Pero

$$\begin{aligned}1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) &= \overbrace{(1 + 2 + 3 + \cdots + k)}^{=k(k\,+\,1)/2 \text{ por suposición}} + (k + 1)\\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)\\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}\\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

y la demostración queda completa. ✦

¿En dónde está la dificultad?

En ocasiones la inducción matemática es difícil a primera vista en el paso 2. El paso 1 por lo general es sencillo. En el ejemplo 1, se insertó el valor $n = 1$ en ambos lados de la ecuación (1) y se verificó que $1 = 1(1 + 1)/2$. El paso 2 fue mucho más difícil. Lo estudiaremos de nuevo.

Hipótesis de inducción

Se *supuso* que la ecuación (1) era válida para $n = k$. No se demostró. Esa suposición se llama **hipótesis de inducción**. Después se usó la hipótesis de inducción para demostrar que la ecuación (1) se cumple para $n = k + 1$. Quizá esto quedará más claro si se ve un valor específico de k, digamos, $k = 10$. Entonces se tiene

Suposición

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \frac{10(10 + 1)}{2} = \frac{10(11)}{2} = 55 \qquad \textbf{(2)}$$

Para demostrar

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = \frac{11(11 + 1)}{2} = \frac{11(12)}{2} = 66 \qquad \textbf{(3)}$$

La demostración en sí

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + 11$$

Por la hipótesis de inducción (2)

$$= \frac{10(11)}{2} + 11 = \frac{10(11)}{2} + \frac{2(11)}{2}$$

$$= \frac{11(10 + 2)}{2} = \frac{11(12)}{2}$$

que es la ecuación (3). Así, *si* (2) es cierta, entonces (3) es cierta.

La belleza del método de inducción matemática es que no se tiene que demostrar cada caso por separado como se hizo con este ejemplo. En su lugar se demuestra para un primer caso, *se supone* para un caso general y después se demuestra para el caso general más 1. Dos pasos son suficientes para tomar en cuenta un número infinito de casos. En realidad es una idea magnífica.

EJEMPLO 3 Demuestre que la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos es $n(n + 1)(2n + 1)/6$.

Solución Debe demostrarse que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \qquad \textbf{(4)}$$

Paso 1. Como $\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1 = 1^2$, la ecuación (4) es válida para $n = 1$.

Paso 2. Suponga que la ecuación (4) se cumple para $n = k$; es decir

Hipótesis de inducción
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Entonces para demostrar que (4) es cierta para $n = k + 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2 \\
&\overset{\text{Hipótesis de inducción}}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{k+1}{6}[k(2k+1) + 6(k+1)] \\
&= \frac{k+1}{6}[2k^2 + 7k + 6] \\
&= \frac{k+1}{6}[(k+2)(2k+3)] \\
&= \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6}
\end{aligned}$$

que es la ecuación (4) para $n = k + 1$, y la prueba queda completa. Para ilustrar la fórmula observe que

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 &= \frac{7(7+1)(2\cdot 7+1)}{6} \\
&= \frac{7\cdot 8\cdot 15}{6} = 140
\end{aligned}$$

◆

EJEMPLO 4 Utilice inducción matemática para demostrar la fórmula para la suma de una sucesión geométrica:

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad a \neq 1 \tag{5}$$

Solución **Paso 1.** Si $n = 0$ (el primer entero en este caso), entonces

$$\frac{1 - a^{0+1}}{1 - a} = \frac{1 - a}{1 - a} = 1 = a^0$$

Así, la ecuación (5) se cumple para $n = 0$. (Se usa $n = 0$ en lugar de $n = 1$ debido a que $a^0 = 1$ es el primer término.)

Paso 2. Suponga que (5) se cumple para $n = k$, es decir,

Hipótesis de inducción
$$1 + a + a^2 + \cdots + a^k = \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a}$$

Entonces

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^k + a^{k+1} = (1 + a + a^2 + \cdots + a^k) + a^{k+1}$$

Hipótesis de inducción

$$\downarrow$$

$$= \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a} + a^{k+1}$$

$$= \frac{1 - a^{k+1} + (1 - a)a^{k+1}}{1 - a} = \frac{1 - a^{k+2}}{1 - a}$$

de manera que la ecuación (5) se cumple para $n = k + 1$ y la demostración queda completa. ◆

EJEMPLO 5 Utilice inducción matemática para demostrar que $2n + n^3$ es divisible entre 3 para todo entero positivo n.

Solución **Paso 1.** Si $n = 1$, entonces $2n + n^3 = 2 \cdot 1 + 1^3 = 2 + 1 = 3$ que es divisible entre 3. Así, la afirmación $2n + n^3$ es divisible entre 3 es cierta para $n = 1$.

Paso 2. Suponga que $2k + k^3$ es divisible entre 3. Hipótesis de inducción

Esto significa que $\frac{2k + k^3}{3} = m$ es un entero. Entonces al expandir $(k + 1)^3$, se obtiene

$$\begin{aligned} 2(k + 1) + (k + 1)^3 &= 2k + 2 + (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \\ &= k^3 + 2k + 3k^2 + 3k + 3 \\ &= k^3 + 2k + 3(k^2 + k + 1) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{2(k + 1) + (k + 1)^3}{3} &= \frac{k^3 + 2k}{3} + \frac{3(k^2 + k + 1)}{3} \\ &= m + k^2 + k + 1 = \text{un entero} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $2(k + 1) + (k + 1)^3$ es divisible entre 3. Esto muestra que la afirmación es cierta para $n = k + 1$. ◆

EJEMPLO 6 Sean $A_1, A_2, \ldots, A_m$, m matrices invertibles de $n \times n$. Demuestre que

$$(A_1A_2 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1}A_{m-1}^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1} \qquad \textbf{(6)}$$

Para $m = 2$ se tiene $(A_1A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}$ por el teorema 1.8.3, entonces la ecuación (6) se cumple para $m = 2$. Se supone que es cierta para $m = k$ y se demuestra para $m = k + 1$. Sea $B = A_1A_2 \cdots A_k$. Entonces

$$(A_1A_2 \cdots A_kA_{k+1})^{-1} = (BA_{k+1})^{-1} = A_{k+1}^{-1}B^{-1} \tag{7}$$

Por la suposición de inducción

$$B^{-1} = (A_1A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1} \tag{8}$$

Sustituyendo (8) en (7) la demostración queda completa. ✦

Semblanza . . .

Inducción matemática

El primer matemático que dio una demostración formal mediante el uso explícito de la inducción matemática fue el clérigo italiano Franciscus Maurolicus (1494-1575), quien era el abad de Messina en Sicilia y era considerado el más grande geómetra del siglo XVI. En su libro *Aritmética*, publicado en 1575, Maurolicus usó la inducción matemática para demostrar, entre otras cosas, que para todo entero positivo n

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Se pide al lector que demuestre esto en el problema 4.

Las demostraciones por inducción de Maurolicus tienen una forma de bosquejo que es difícil seguir. El matemático francés Blaise Pascal (1623-1662), proporcionó una exposición más clara del método. En su *Traité du Triangle Arithmétique*, publicado en 1662, Pascal demostró la fórmula para la suma de coeficientes binomiales. Utilizó su fórmula para desarrollar lo que hoy se conoce como el *Triángulo de Pascal*.

Aunque el método de inducción matemática se usó formalmente en 1575, el término *inducción matemática* no se usó hasta 1838. En ese año, uno de los originadores de la teoría de conjuntos, Augustus de Morgan (1806–1871), publicó un artículo en la *Penny Cyclopedia* (Londres) titulado "Induction (Mathematics)". Al final del artículo, usó el término que se usa hoy, sin embargo, no tuvo una amplia aceptación hasta el siglo XX.

PROBLEMAS A1

En los problemas 1 al 20 utilice inducción matemática para demostrar que la fórmula dada se cumple para toda $n = 1, 2, \ldots$ a menos que se especifique algún otro conjunto de valores.

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$
2. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n - 1)}{2}$

3. $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1) = \dfrac{n(3n + 1)}{2}$

4. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

5. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < \dfrac{1}{n}$

6. $2^n < n!$ para $n = 4, 5, 6, \ldots$, donde

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n$$

7. $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

8. $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$

9. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} = 2 - \dfrac{1}{2^n}$

10. $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \cdots + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{3}{4}\left[1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$

11. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n + 1)^2}{4}$

12. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \dfrac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$

13. $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + (2n - 1)(2n) = \dfrac{n(n + 1)(4n - 1)}{3}$

14. $\dfrac{1}{2^2 - 1} + \dfrac{1}{3^2 - 1} + \dfrac{1}{4^2 - 1} + \cdots + \dfrac{1}{(n + 1)^2 - 1} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2(n + 1)} - \dfrac{1}{2(n + 2)}$

15. $n + n^2$ es par.

16. $n < \dfrac{n^2 - n}{12} + 2$ si $n > 10$.

17. $n(n^2 + 5)$ es divisible entre 6.

***18.** $3n^5 + 5n^3 + 7n$ es divisible entre 15.

***19.** $x^n - 1$ es divisible entre $x - 1$.

***20.** $x^n - y^n$ es divisible entre $x - y$.

***21.** Dé una demostración formal de que $(ab)^n = a^n b^n$ para todo entero positivo n.

22. Suponga que todo polinomio tiene al menos una raíz compleja y demuestre que un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces (contando las multiplicidades).

23. Dado que $\det AB = \det A \det B$ para todas las matrices A y B de $n \times n$, demuestre que $\det A_1 A_2 \cdots A_m = \det A_1 \det A_2 \cdots \det A_m$, donde $A_1, \ldots, A_m$ son matrices de $n \times n$.

24. Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son matrices de $m \times n$, demuestre que $(A_1 + A_2 + \cdots + A_k)^t = A_1^t + A_2^t + \cdots + A_k^t$. Puede suponer que $(A + B)^t = A^t + B^t$.

25. Demuestre que existen exactamente 2^n subconjuntos de un conjunto que contiene n elementos.

26. Demuestre que si $2k - 1$ es un entero par para algún entero k, entonces $2(k + 1) - 1 = 2k + 2 - 1 = 2k + 1$ es también un entero par. ¿Puede obtener una conclusión a partir de la demostración?

27. ¿Qué está mal con la siguiente demostración de que cada caballo, en un conjunto de n caballos tiene el mismo color que cualquier otro caballo en el conjunto?

Paso 1. Es cierto para $n = 1$ ya que sólo hay un caballo en el conjunto y es obvio que tiene el mismo color que él mismo.

Paso 2. Suponga que es cierto para $n = k$. Es decir, cada caballo en un conjunto que contiene k caballos es del mismo color que los demás caballos en el conjunto. Sean $h_1, h_2, \ldots, h_k, h_{k+1}$ los $k + 1$ caballos en el conjunto S. Sea $S_1 = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$ y $S_2 = \{h_2, h_3, \ldots, h_k, h_{k+1}\}$. Entonces ambos, S_1 y S_2 contienen k caballos de manera que los caballos en cada uno de estos conjuntos son del mismo color. Escriba $h_i = h_j$ para indicar que el caballo i tiene el mismo color que el caballo j. Entonces se tiene

$$h_1 = h_2 = h_3 = \cdots = h_k$$

y

$$h_2 = h_3 = h_4 = \cdots = h_k = h_{k+1}$$

Esto significa que

$$h_1 = h_2 = h_3 = \cdots = h_k = h_{k+1}$$

de manera que todos los caballos en S tienen el mismo color. Esto demuestra la afirmación en el caso de $n = k + 1$ y, por lo tanto, la afirmación es cierta para todo n.

Apéndice 2 Números complejos

En el capítulo 6 se estudió el problema de encontrar las raíces de los polinomios

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{1}$$

Para encontrar las raíces, se usa la fórmula cuadrática y se obtiene

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \tag{2}$$

Si $b^2 - 4c > 0$, existen dos raíces reales. Si $b^2 - 4c = 0$, se obtiene una sola raíz (de multiplicidad 2) $\lambda = -b/2$. Para manejar el caso $b^2 - 4c < 0$, se introduce la **unidad imaginaria:**†

$$\boxed{i = \sqrt{-1}} \tag{3}$$

† El término *imaginario* no debe ser una preocupación. Es sólo un nombre. El matemático Alfred North Whitehead, en el capítulo sobre números imaginarios de su libro *Introduction to Mathematics*, escribió:

En este punto, puede ser útil observar que cierto tipo de intelecto se preocupa siempre y preocupa a otros sobre la aplicabilidad de los términos técnicos. ¿Es adecuado llamar números a los números inconmensurables? ¿Son realmente números los números positivos y negativos? ¿Son imaginarios los números imaginarios, y son números? Éstos son ejemplos de preguntas estériles. No puede entenderse con suficientes claridad que, en la ciencia, los términos técnicos son nombres asignados de manera arbitraria, como los nombres cristianos a los niños. No puede ponerse en duda si los nombres están bien o mal. Pueden ser o no prácticos o sensibles; en ocasiones puede ser sencillo recordarlos, o ser tales que sugieran ideas relevantes o importantes. Pero el principio esencial fue enunciado con mucha claridad en Alicia en el país de las maravillas por Humpty Dumpty, cuando le dijo a propósito de su uso de las palabras, "les pago más y las hago tener el significado que yo quiero". Así que no nos preocuparemos por si los números imaginarios son imaginarios o son números, tomaremos la frase como el nombre arbitrario de cierta idea matemática, que intentaremos ahora aclarar.

de manera que $i^2 = -1$. Entonces para $b^2 - 4c < 0$

$$\sqrt{b^2 - 4c} = \sqrt{(4c - b^2)(-1)} = \sqrt{4c - b^2}\, i$$

y las dos raices de (1) están dadas por

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} i \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} i$$

EJEMPLO 1 Encuentre las raíces de la ecuación cuadrática $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$.

Solución Se tiene $b = 2$, $c = 5$ y $b^2 - 4c = -16$. Entonces $\sqrt{b^2 - 4c} = \sqrt{-16} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4i$ y las raices son

$$\lambda_1 = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = -1 - 2i$$

✦

DEFINICIÓN 1 Un **número complejo** es una expresión de la forma

$$\boxed{z = \alpha + i\beta} \tag{4}$$

donde α y β son números reales, α se llama la **parte real** de z y se denota por Re z. β se llama la **parte imaginaria** de z y se denota por Im z. En ocasiones la representación (4) recibe el nombre de **forma cartesiana** del número complejo z.

Observación. Si $\beta = 0$ en la ecuación (4), entonces $z = \alpha$ es un número real. En este contexto se puede ver el conjunto de números reales como un subconjunto del conjunto de números complejos.

EJEMPLO 2 En el ejemplo 1, Re $\lambda_1 = -1$ e Im $\lambda_1 = 2$. ✦

Los números complejos se pueden sumar y multiplicar usando las reglas normales de álgebra.

EJEMPLO 3 Sean $z = 2 + 3i$ y $w = 5 - 4i$. Calcule **i)** $z + w$, **ii)** $3w - 5z$ y **iii)** zw.

Solución

i. $z + w = (2 + 3i) + (5 - 4i) = (2 + 5) + (3 - 4)i = 7 - i$.

ii. $3w = 3(5 - 4i) = 15 - 12i$; $5z = 10 + 15i$, y $3w - 5z = (15 - 12i) - (10 + 15i) = (15 - 10) + i(-12 - 15) = 15 - 27i$.

iii. $zw = (2 + 3i)(5 - 4i) = (2)(5) + 2(-4i) + (3i)(5) + (3i)(-4i) = 10 - 8i + 15i - 12i^2 = 10 + 7i + 12 = 22 + 7i$. Aqui se usó el hecho de que $i^2 = -1$. ✦

Plano complejo Se puede graficar un número complejo z en el plano xy graficando Re z sobre el eje x e Im z sobre el eje y. Entonces se puede pensar que cada número complejo es un punto en el plano xy. Con esta representación el plano xy se llama **plano complejo**. En la figura A.1 se graficaron algunos puntos representativos.

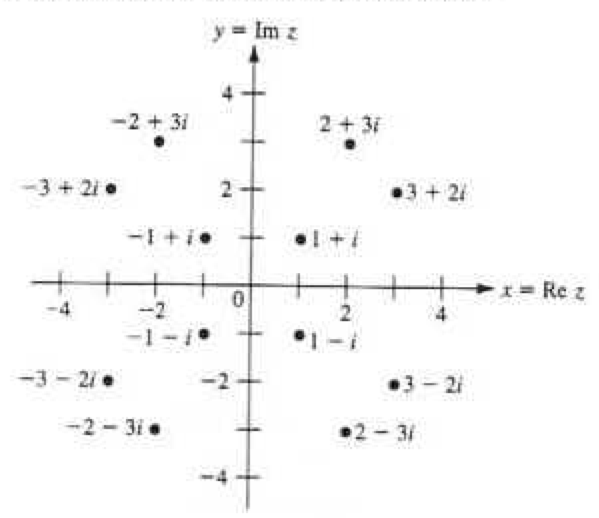


Figura A.1 Doce puntos en el plano complejo

Conjugado Si $z = \alpha + i\beta$, entonces se define el **conjugado** de z, denotado por $\bar{z}$, como

$$\boxed{\bar{z} = \alpha - i\beta} \tag{5}$$

La figura A.2 presenta un valor representativo de z y $\bar{z}$.

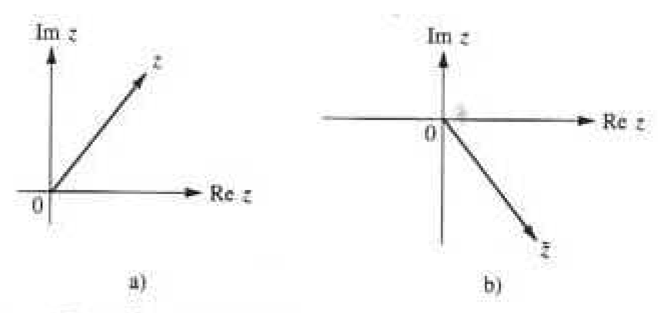


Figura A.2 $\bar{z}$ se obtiene reflejando z respecto al eje x.

EJEMPLO 4 Calcule el conjugado de **i)** $1 + i$, **ii)** $3 - 4i$, **iii)** $-7 + 5i$ y **iv)** -3.

Solución i) $\overline{1 + i} = 1 - i$; ii) $\overline{3 - 4i} = 3 + 4i$; iii) $\overline{-7 + 5i} = -7 - 5i$; iv) $\overline{-3} = -3$. ◆

No es difícil demostrar (vea el problema 35) que

$$\bar{z} = z \quad \text{si y sólo si } z \text{ es real} \tag{6}$$

Número imaginario

Si $z = \beta i$ con β real, entonces se dice que z es **imaginario**. Se puede entonces demostrar (vea el problema 36) que

$$\bar{z} = -z \quad \text{si y sólo si } z \text{ es imaginario} \tag{7}$$

Sea $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ un polinomio con coeficientes reales. Entonces se puede demostrar (vea el problema 41) que las raíces complejas de la ecuación $p_n(x) = 0$ ocurren en pares conjugados complejos. Esto es, si z es una raíz de $p_n(x) = 0$, entonces también lo es $\bar{z}$. Este hecho se ilustró en el ejemplo 1 para el caso de $n = 2$.

Magnitud

Para $z = \alpha + i\beta$ se define la **magnitud**† de z, denotada por $|z|$, como

$$\text{Magnitud de } z = |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tag{8}$$

Argumento

y el **argumento** de z, denotado por arg z, se define como el ángulo θ entre la recta $0z$ y el lado positivo del eje x. Como convención se toma

$$-\pi < \arg z \leq \pi$$

En la figura A.3 se puede ver que $r = |z|$ es la distancia de z al origen. Si $\alpha > 0$, entonces

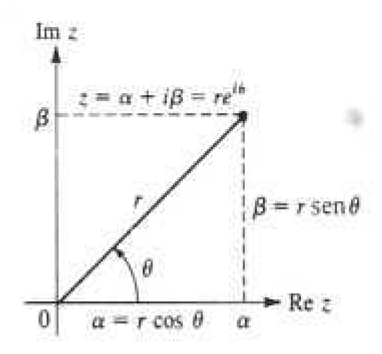


Figura A.3 Si $z = \alpha + i\beta$, entonces $\alpha = r\cos\theta$ y $\beta = r \operatorname{sen}\theta$

† La magnitud de un número complejo con frecuencia recibe el nombre de **módulo**.

donde se observa la convención de que $\tan^{-1} x$ toma valores en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Si $\alpha = 0$ y $\beta > 0$, entonces $\theta = \arg z = \frac{\pi}{2}$. Si $\alpha = 0$ y $\beta < 0$, entonces $\theta = \arg z = -\frac{\pi}{2}$. Si $\alpha < 0$ y $\beta > 0$, entonces θ se encuentra en el segundo cuadrante y está dado por

$$\theta = \arg z = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$$

Por último, si $\alpha < 0$ y $\beta < 0$ entonces θ está en el tercer cuadrante y

$$\theta = \arg z = -\pi + \tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}$$

En suma, se tiene

Argumento de z

Sea $z = \alpha + \beta i$. Entonces

$$\arg z = \tan\frac{\beta}{\alpha} \text{ si } \alpha > 0$$

$$\arg z = \frac{\pi}{2} \text{ si } \alpha = 0 \text{ y } \beta > 0$$

$$\arg z = -\frac{\pi}{2} \text{ si } \alpha = 0 \text{ y } \beta < 0 \qquad (9)$$

$$\arg z = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \text{ si } \alpha < 0 \text{ y } \beta > 0$$

$$\arg z = -\pi + \tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha} \text{ si } \alpha < 0 \text{ y } \beta < 0 \qquad (10)$$

arg 0 no está definido

De la figura A.4 se ve que

$$|\bar{z}| = |z| \qquad (11)$$

y

$$\arg \bar{z} = -\arg z \qquad (12)$$

No es difícil demostrar (vea el problema 35) que

$$\bar{z} = z \quad \text{si y sólo si } z \text{ es real} \tag{6}$$

Número imaginario Si $z = \beta i$ con β real, entonces se dice que z es **imaginario**. Se puede entonces demostrar (vea el problema 36) que

$$\bar{z} = -z \quad \text{si y sólo si } z \text{ es imaginario} \tag{7}$$

Sea $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ un polinomio con coeficientes reales. Entonces se puede demostrar (vea el problema 41) que las raíces complejas de la ecuación $p_n(x) = 0$ ocurren en pares conjugados complejos. Esto es, si z es una raíz de $p_n(x) = 0$, entonces también lo es $\bar{z}$. Este hecho se ilustró en el ejemplo 1 para el caso de $n = 2$.

Magnitud Para $z = \alpha + i\beta$ se define la **magnitud†** de z, denotada por $|z|$, como

$$\text{Magnitud de } z = |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tag{8}$$

Argumento y el **argumento** de z, denotado por arg z, se define como el ángulo θ entre la recta $0z$ y el lado positivo del eje x. Como convención se toma

$$-\pi < \arg z \leq \pi$$

En la figura A.3 se puede ver que $r = |z|$ es la distancia de z al origen. Si $\alpha > 0$, entonces

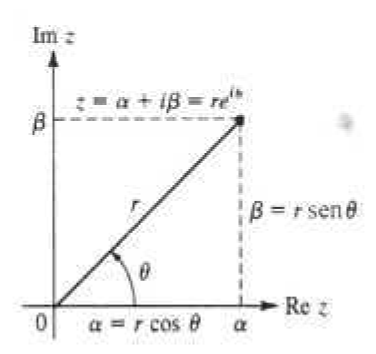


Figura A.3 Si $z = \alpha + i\beta$, entonces $\alpha = r\cos\theta$ y $\beta = r \operatorname{sen}\theta$

† La magnitud de un número complejo con frecuencia recibe el nombre de **módulo**.

donde se observa la convención de que $\tan^{-1} x$ toma valores en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Si $\alpha = 0$ y $\beta > 0$, entonces $\theta = \arg z = \frac{\pi}{2}$. Si $\alpha = 0$ y $\beta < 0$, entonces $\theta = \arg z = -\frac{\pi}{2}$. Si $\alpha < 0$ y $\beta > 0$, entonces θ se encuentra en el segundo cuadrante y está dado por

$$\theta = \arg z = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$$

Por último, si $\alpha < 0$ y $\beta < 0$ entonces θ está en el tercer cuadrante y

$$\theta = \arg z = -\pi + \tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}$$

En suma, se tiene

Argumento de z

Sea $z = \alpha + \beta i$. Entonces

$$\arg z = \tan\frac{\beta}{\alpha} \text{ si } \alpha > 0$$

$$\arg z = \frac{\pi}{2} \text{ si } \alpha = 0 \text{ y } \beta > 0$$

$$\arg z = -\frac{\pi}{2} \text{ si } \alpha = 0 \text{ y } \beta < 0 \qquad (9)$$

$$\arg z = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \text{ si } \alpha < 0 \text{ y } \beta > 0$$

$$\arg z = -\pi + \tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha} \text{ si } \alpha < 0 \text{ y } \beta < 0 \qquad (10)$$

arg 0 no está definido

De la figura A.4 se ve que

$$|\bar{z}| = |z| \qquad (11)$$

y

$$\arg \bar{z} = -\arg z \qquad (12)$$

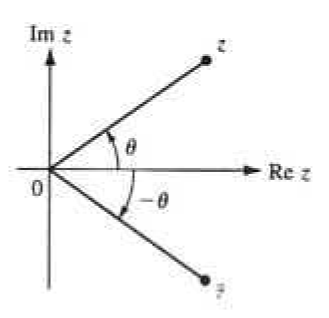


Figura A.4 $\arg \bar{z} = -\arg z$

Se pueden usar $|z|$ y $\arg z$ para describir lo que con frecuencia es una representación más conveniente para los números complejos.† De la figura A.3 es evidente que si $z = \alpha + i\beta$, $r = |z|$ y $\theta = \arg z$, entonces

$$\boxed{\alpha = r\cos\theta \quad \text{y} \quad \beta = r \operatorname{sen}\theta} \tag{13}$$

Se verá al final de este apéndice que

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} \tag{14}$$

Como $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$, también se tiene

$$\boxed{e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta) = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta} \tag{14'}$$

La fórmula (14) se llama **fórmula de Euler.**‡ Usando la fórmula de Euler y la ecuación (13), se tiene

$$z = \alpha + i\beta = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

o sea,

$$\boxed{z = re^{i\theta}} \tag{15}$$

Forma polar La representación (15) se llama **forma polar** del número complejo z.

† El lector que haya estudiado coordenadas polares encontrará que esta representación le es familiar.

‡ Recibe este nombre en honor del gran matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783).

EJEMPLO 5 Determine las formas polares de los siguientes números complejos: **i)** 1, **ii)** −1, **iii)** i, **iv)** $1 + i$, **v)** $-1 - \sqrt{3}i$ y **vi)** $-2 + 7i$.

Solución Los seis puntos están graficados en la figura A.5.

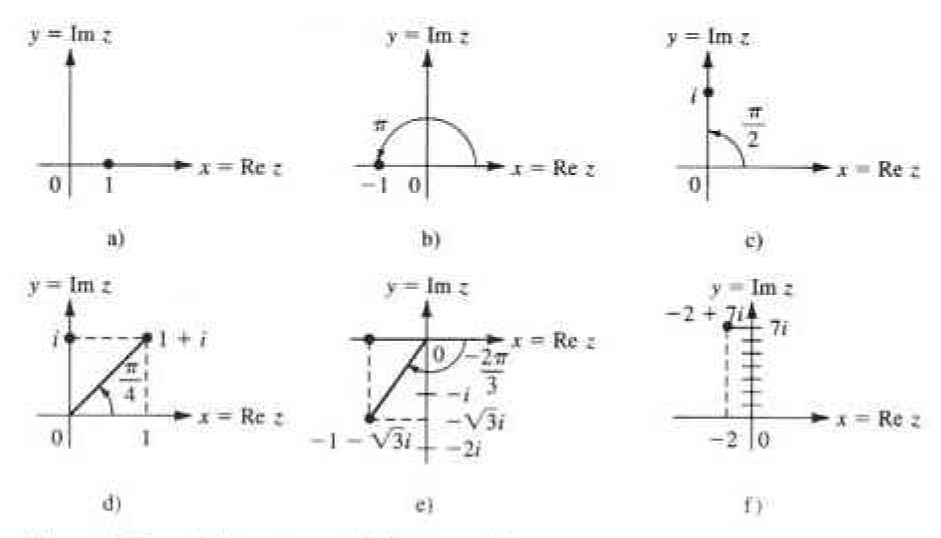


Figura A.5 Seis puntos en el plano complejo

i. De la figura A.5a es evidente que arg 1 = 0. Como Re 1 = 1, se ve que, en forma polar, $1 = 1e^{i0} = 1e^0 = 1$.

ii. Como $\arg(-1) = \pi$ (figura A.5b) y $|-1| = 1$, se tiene

$$-1 = 1e^{\pi i} = e^{i\pi}$$

iii. De la figura A.5c se ve que $\arg i = \pi/2$. Puesto que $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, se sigue que

$$i = e^{i\pi/2}$$

iv. $\arg(1 + i) = \tan^{-1}(1/1) = (\pi/4)$ y $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ de manera que

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

v. En este caso $\tan^{-1}(\beta/\alpha) = \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi/3$. Sin embargo, arg z se encuentra en el tercer cuadrante, de manera que $\theta = \pi/3 - \pi = -2\pi/3$. Además $|-1 - \sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$ por lo que

$$-1 - \sqrt{3} = 2e^{-2\pi i/3}$$

vi. Para calcular esto se necesita una calculadora. Se encuentra que, en radianes,

$$\arg z = \tan^{-1}(-\tfrac{7}{2}) = \tan^{-1}(-3.5) \approx -1.2925$$

Pero $\tan^{-1} x$ está definida como un número en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. De la figura A.5*f*, θ está en el segundo cuadrante, por lo que se ve que $\arg z = \pi - \tan^{-1}(3.5) \approx 1.8491$. Después se ve que

$$|-2+7i| = \sqrt{(-2)^2+7^2} = \sqrt{53}$$

Así,

$$-2+7i \approx \sqrt{53}\, e^{1.8491i}$$ ◆

EJEMPLO 6 Convierta los siguientes números complejos de la forma polar a la forma cartesiana **i)** $2e^{i\pi/3}$; **ii)** $4e^{3\pi i/2}$.

Solución

i. $e^{i\pi/3} = \cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3 = \frac{1}{2} + (\sqrt{3}/2)i$. Entonces $2e^{i\pi/3} = 1 + \sqrt{3}i$.

ii. $e^{3\pi i/2} = \cos 3\pi/2 + i \operatorname{sen} 3\pi/2 = 0 + i(-1) = -i$. Entonces $4e^{3\pi i/2} = -4i$. ◆

Si $\theta = \arg z$, entonces por la ecuación (12), $\arg \bar{z} = -\theta$. Así, puesto que $|\bar{z}| = |z|$,

$$\text{Si } z = re^{i\theta}, \text{ entonces } \bar{z} = re^{-i\theta} \tag{16}$$

Suponga que se escribe un número complejo en su forma polar $z = re^{i\theta}$. Entonces

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n(e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \tag{17}$$

La fórmula (17) es útil para muchos cálculos. En particular, cuando $r = |z| = 1$, se obtiene la **fórmula de De Moivre.**†

Fórmula de De Moivre

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta \tag{18}$$

EJEMPLO 7 Calcule $(1+i)^5$.

Solución En el ejemplo 5*iv*) se mostró que $1 + i = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$. Entonces

$$(1+i)^5 = (\sqrt{2}e^{\pi i/4})^5 = (\sqrt{2})^5 e^{5\pi i/4} = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$$
$$= 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -4-4i$$

† Abraham De Moivre (1667-1754) fue un matemático francés conocido por su trabajo sobre teoría de probabilidad, series infinitas y trigonometría. Su reconocimiento era tal que Newton con frecuencia decía a quienes le hacía preguntas sobre matemáticas, "vayan con De Moivre; él sabe esas cosas mejor que yo".

Esto se puede verificar mediante el cálculo directo. Si este cálculo directo no parece más difícil, intente calcular $(1+i)^{20}$ directamente. Procediendo como antes, se obtiene

$$\begin{aligned}(1+i)^{20} &= (\sqrt{2})^{20}e^{20\pi i/4} = 2^{10}(\cos 5\pi + i \operatorname{sen} 5\pi)\\ &= 2^{10}(-1+0) = -1024\end{aligned}$$ ✦

Demostración de la fórmula de Euler Se demostrará que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \tag{19}$$

usando las series de potencia. Si no está familiarizado con ellas, omita esta demostración. Se tiene

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{20}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \tag{21}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{22}$$

Aunque no se demuestra aquí, estas tres series convergen para todo número complejo x. Entonces

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots \tag{23}$$

Ahora bien, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, etcétera. Por lo tanto (23) se puede escribir como

$$\begin{aligned}e^{i\theta} &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \cdots\\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)\\ &= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\end{aligned}$$ ✦

Esto completa la demostración.

PROBLEMAS A2

En los problemas 1 al 5 realice las operaciones indicadas.

1. $(2-3i)+(7-4i)$
2. $3(4+i)-5(-3+6i)$
3. $(1+i)(1-i)$
4. $(2-3i)(4+7i)$
5. $(-3+2i)(7+3i)$

En los problemas 6 al 15 convierta el número complejo a su forma polar.

6. $5i$ **7.** $5 + 5i$ **8.** $-2 - 2i$ **9.** $3 - 3i$

10. $2 + 2\sqrt{3}\,i$ **11.** $3\sqrt{3} + 3i$ **12.** $1 - \sqrt{3}\,i$ **13.** $4\sqrt{3} - 4i$

14. $-6\sqrt{3} - 6i$ **15.** $-1 - \sqrt{3}\,i$

En los problemas 16 al 25 convierta de la forma polar a la forma cartesiana.

16. $e^{3\pi i}$ **17.** $2e^{-7\pi i}$ **18.** $\frac{1}{2}e^{3\pi i/4}$ **19.** $\frac{1}{2}e^{-3\pi i/4}$

20. $6e^{\pi i/6}$ **21.** $4e^{5\pi i/6}$ **22.** $4e^{-5\pi i/6}$ **23.** $3e^{-2\pi i/3}$

24. $\sqrt{3}\,e^{23\pi i/4}$ **25.** e^{i}

En los problemas 26 al 34 calcule el conjugado del número dado.

26. $3 - 4i$ **27.** $4 + 6i$ **28.** $-3 + 8i$

29. $-7i$ **30.** 16 **31.** $2e^{\pi i/7}$

32. $4e^{3\pi i/5}$ **33.** $3e^{-4\pi i/11}$ **34.** $e^{0.012i}$

35. Demuestre que $z = \alpha + i\beta$ es real si y sólo si $z = \bar{z}$. [*Sugerencia:* si $z = \bar{z}$, demuestre que $\beta = 0$.]

36. Demuestre que $z = \alpha + i\beta$ es imaginario si y sólo si $z = -\bar{z}$. [*Sugerencia*: si $z = -\bar{z}$, demuestre que $\alpha = 0$.]

37. Demuestre que para cualquier número complejo z, $z\bar{z} = |z|^2$.

38. Demuestre que la circunferencia de radio 1 centrado en el origen (la *circunferencia unitaria*) es el conjunto de puntos en el plano complejo que satisfacen $|z| = 1$.

39. Para cualquier número complejo z_0 y cualquier número real positivo a, describa $\{z: |z - z_0| = a\}$.

40. Describa $\{z: |z - z_0| \leq a\}$, donde z_0 y a están definidos igual que en el problema 39.

***41.** Sea $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0$, donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ son números reales. Demuestre que si $p(z) = 0$, entonces $p(\bar{z}) = 0$. Esto es: *las raíces de polinomios con coeficientes reales ocurren en pares complejos conjugados*. [*Sugerencia:* $0 = \bar{0}$; calcule $\overline{p(z)}$.]

42. Derive expresiones para $\cos 4\theta$ y $\operatorname{sen} 4\theta$ comparando la fórmula de De Moivre y la expansión de $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^4$.

43. Demuestre la fórmula de De Moivre por inducción matemática. [*Sugerencia:* recuerde las identidades trigonométricas $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ y $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$.]

Apéndice 3
El error numérico en los cálculos y la complejidad computacional

En todos los capítulos de este libro se han realizado cálculos numéricos. Entre otras cosas, se resolvieron ecuaciones lineales, se multiplicaron e invirtieron matrices, se encontraron bases y se calcularon valores y vectores propios. Con pocas excepciones, los ejemplos incluyeron matrices de 2×2 y de 3×3 –no porque la mayor parte de las aplicaciones tengan sólo dos o tres variables sino porque de otra manera los cálculos hubieran sido demasiado tediosos.

Con el reciente y amplio uso de las calculadoras y computadoras la situación se ha alterado. Los avances tan importantes que se han logrado en los últimos años en el campo de la teoría de métodos numéricos para resolver ciertos problemas computacionales han hecho posible realizar, con rapidez y exactitud, los cálculos mencionados con matrices de orden más alto.

Sin embargo, el uso de la computadora presenta nuevas dificultades. Las computadoras no almacenan números como $\frac{1}{3}$, $7\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$ y π. En su lugar, todas las computadoras digitales utilizan los que se conoce como *aritmética de punto flotante*. En este sistema, todos los números se representan en la forma

$$x = \pm\, 0.d_1d_2 \cdots d_k \times 10^n \tag{1}$$

donde $d_1, d_2, \ldots, d_k$ son dígitos enteros positivos y n es un entero. Cualquier número escrito en esta forma se llama *número de punto flotante*. En la ecuación (1) el número $\pm\, 0.d_1d_2 \cdots d_k$ se llama la *mantisa* y el número n se llama *exponente*. El número k es el *número de cifras significativas* en la expresión.

Las computadoras tienen diferentes aptitudes en el rango de los números que se pueden expresar en la forma de la ecuación (1). Los dígitos normalmente se representan en binario en lugar de en forma decimal. Una computadora común, por ejemplo, guarda

28 dígitos binarios. Como $2^{28} = 268\,435\,456$, se pueden usar los 28 dígitos binarios para representar un número de ocho dígitos. Entonces $k = 8$.

EJEMPLO 1 **Forma de punto flotante de cuatro números** Los siguientes números se expresan en la forma de punto flotante:

i. $\frac{1}{4} = 0.25$

ii. $2378 = 0.2378 \times 10^4$

iii. $-0.000816 = -0.816 \times 10^{-3}$

iv. $83.27 = 0.8327 \times 10^2$ ✦

Si el número de dígitos significativos fuera ilimitado, entonces no habría problema. Pero casi siempre que se introducen números en la computadora los errores comienzan a acumularse. Esto puede ocurrir en una de dos maneras:

i. **Truncado.** Todos los dígitos significativos después de k de ellos simplemente "se eliminan". Por ejemplo, si se trunca, se guarda $\frac{2}{3} = 0.666666\ldots$ (con $k = 8$) como $\frac{2}{3} = 0.66666666 \times 10^0$.

ii. **Redondeo.** Si $d_{k+1} \geq 5$, entonces se suma 1 a d_k y se trunca el número que resulta. De otra manera, el número simplemente se trunca. Por ejemplo, con redondeo (y $k = 8$), $\frac{2}{3} = 0.66666667 \times 10^0$.

EJEMPLO 2 **Ilustración de truncado y redondeo** Se puede ilustrar la manera en que se almacenan algunos números truncados y redondeados con ocho dígitos significativos:

Número	Número truncado	Número redondeado
$\frac{8}{3}$	0.26666666×10^1	0.26666667×10^1
π	0.31415926×10^1	0.31415927×10^1
$-\frac{1}{57}$	$-0.17543859 \times 10^{-1}$	$-0.17543860 \times 10^{-1}$

✦

Los errores individuales de truncado o de redondeo no parecen importantes. Sin embargo, cuando se realizan miles de pasos en la computadora, el error de redondeo **acumulado** puede ser devastador. Entonces, al analizar cualquier esquema numérico, es necesario saber no sólo si, en teoría, se obtendrá la respuesta correcta, sino también cuánto se van a acumular los errores de redondeo. Para tener un control de las cosas, se definen dos tipos de error. Si x es el valor real de un número y x^* es el número que aparece en la computadora, entonces el **error absoluto** ε_a está definido por

Error absoluto

$$\boxed{\varepsilon_a = |x^* - x|} \quad (2)$$

Error relativo En la mayor parte de las situaciones es más interesante el **error relativo** ε_r, definido por

$$\boxed{\varepsilon_r = \left|\frac{x^* - x}{x}\right|} \qquad (3)$$

EJEMPLO 3 **Ilustración del error relativo** Sea $x = 2$ y $x^* = 2.1$. Entonces $\varepsilon_a = 0.1$ y $\varepsilon_r = 0.1/2 = 0.05$. Si $x_1 = 2000$ y $x_1^* = 2000.1$, entonces de nuevo $\varepsilon_a = 0.1$. Pero ahora $\varepsilon_r = 0.1/2000 = 0.00005$. Muchas personas estarán de acuerdo en que el error de 0.1 en el primer caso es más significativo que el error de 0.1 en el segundo. ◆

Una parte importante del análisis numérico se refiere a preguntas sobre **convergencia** y **estabilidad**. Si x es la solución exacta al problema y el método computacional da valores aproximados x_n, entonces el método converge si, teóricamente, x_n tiende a x cuando n crece. Más aún, si se puede demostrar que los errores de redondeo no se acumularán de forma que la respuesta sea muy poco exacta, entonces se dice que el método es **estable**.

Es sencillo proporcionar un ejemplo de un procedimiento en el que el error de redondeo sea bastante grande. Suponga que se quiere calcular $y = 1/(x - 0.66666665)$. Para $x = \frac{2}{3}$, si la computadora trunca, entonces $x = 0.66666666$ y $y = 1/0.00000001 = 10^8 = 10 \times 10^7$. Si la computadora redondea, entonces $x = 0.66666667$ y $y = 1/0.00000002 = 5 \times 10^7$. La diferencia en este caso es enorme. La solución exacta es $1/\left(\frac{2}{3} - \frac{66666665}{100\,000\,000}\right) = 1/\left(\frac{200\,000\,000}{300\,000\,000} - \frac{199\,999\,995}{300\,000\,000}\right) = 1/\frac{5}{300\,000\,000} = \frac{300\,000\,000}{5} = 60\,000\,000 = 6 \times 10^7$.

Nota. La estabilidad aquí no es causa de preocupación. Sin embargo, las personas que diseñan el software sí se preocupan mucho por ella. El lector debe saber que quien se dedica a análisis numérico y diseña software elige los algoritmos (o desarrolla nuevos) que tienden a minimizar las consecuencias adversas. En particular, MATLAB utiliza programas de muy alta calidad. En la actualidad, ningún novato bien informado desarrolla su propio software. Se usan subrutinas de diseños probados.

Complejidad computacional

Al resolver problemas en una computadora surgen dos preguntas naturales:

¿Qué tan exactas son mis respuestas?
¿Cuánto tiempo tardarán?
(Después de todo, la computación se paga por hora.)

Se estudiará la primera pregunta en la primera parte de esta sección. Para contestar la segunda, debe estimarse el número de pasos requeridos para llevar a cabo cierto cálculo. La **complejidad computacional** de un problema es una medida del número de operaciones aritméticas necesarias para resolver el problema y el tiempo necesario para llevar a cabo todas las operaciones requeridas.

Existen dos operaciones básicas que se llevan a cabo en una computadora:

Operación	Tiempo promedio (en microsegundos)†
Suma o resta	$\frac{1}{2}$ microsegundo
Multiplicación o división	2 microsegundos

†1 microsegundo = 1 millonésimo de segundo = 10^{-6} segundos.

Así, con el fin de estimar el tiempo necesario para resolver un problema en una computadora, primero deben contarse las sumas, restas, multiplicaciones y divisiones involucradas en la solución.

Contar las operaciones necesarias para resolver un problema con frecuencia es difícil. Se ilustra cómo se puede hacer en el caso de eliminación de Gauss-Jordan. Para simplificar, la suma y la resta se manejarán como la misma operación y la multiplicación y la división igual (aunque, de hecho, cada división tarda el triple que una multiplicación; el tiempo promedio de ambas es 2 microsegundos).

EJEMPLO 4 **Cuenta de sumas y multiplicaciones en la eliminación de Gauss-Jordan** Sea A una matriz invertible de $n \times n$. Estime el número de sumas y multiplicaciones necesarias para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mediante eliminación de Gauss-Jordan.

Solución Se comienza, como en la sección 1.3, por escribir el sistema en la forma de matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Como A es invertible por suposición, su forma escalonada reducida por renglones es la matriz identidad de $n \times n$. Se supone que en la reducción no se permutan (intercambian) renglones ya que este intercambio no involucra sumas o multiplicaciones. Más aún, el control del número de renglones es una tarea de almacenamiento de datos que requiere mucho menos tiempo que una suma.

Para controlar qué números se están calculando durante un paso dado, se escribe la matriz aumentada con letras C y L. Una C denota el número que acaba de calcularse. Una L denota un número que no sufre cambio.

Paso 1. Se multiplica cada número en el primer renglón por $1/a_{11}$ para obtener

$n + 1$ columnas

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & C & C & \cdots & C & C & C \\ L & L & L & \cdots & L & L & L \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ L & L & L & \cdots & L & L & L \end{array}\right)$$

Total en el paso 1

n multiplicaciones

$\left(\frac{a_{11}}{a_{11}} = 1\right.$ no requiere cálculos, simplemente se inserta un 1 en la posición 1,1.)

no hay sumas

Paso 2. Se multiplica el renglón 1 por $-a_{i1}$ y se suma al renglón i para $i = 2, 3, \ldots, n$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & L & L & \cdots & L & L & L \\ 0 & C & C & \cdots & C & C & C \\ 0 & C & C & \cdots & C & C & C \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & C & C & \cdots & C & C & C \end{array}\right)$$

Contemos las operaciones.

Para obtener el nuevo renglón 2:

El cero en la posición 2,1 no requiere trabajo. Se sabe que el número en la posición 2,1 será cero, por lo que simplemente se coloca ahí. Existen $(n + 1) - 1 = n$ números en el segundo renglón que deben cambiar. Por ejemplo, si a_{22} se denota por a'_{22}, entonces

$$a'_{22} = a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Esto requiere una multiplicación y una suma. Como hay n números que cambiar en el segundo renglón, se necesitan n multiplicaciones y n sumas en el segundo renglón. Lo mismo ocurre en cada uno de los $n - 1$ renglones de 2 a n. Entonces

Total para el paso 2

$(n - 1)n$ multiplicaciones

$(n - 1)n$ sumas

Notación En adelante a'_{ij} denotará el último cálculo en el renglón i y la columna j.

Paso 3. Se multiplica todo en el segundo renglón por $1/a'_{22}$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & L & L & \cdots & L & L & L \\ 0 & 1 & C & \cdots & C & C & C \\ 0 & L & L & \cdots & L & L & L \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & L & L & \cdots & L & L & L \end{array}\right)$$

Total para el paso 3

$n - 1$ multiplicaciones. (Como antes, el 1 en la posición 2,2 sólo se coloca ahí.)
no hay sumas

Paso 4. Se multiplica el renglón 2 por $-a'_{i2}$ y se suma al renglón i, para $i = 1, 3, 4, \ldots, n$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & C & \cdots & C & C & C \\ 0 & 1 & L & \cdots & L & L & L \\ 0 & 0 & C & \cdots & C & C & C \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & C & \cdots & C & C & C \end{array}\right)$$

Total para el paso 4

$(n - 1)(n - 1)$ multiplicaciones
$(n - 1)(n - 1)$ sumas

Igual que en el paso 2, cada cambio requiere una multiplicación y una suma. Pero ahora las primeras dos componentes no requieren cálculos; es decir, se calculan $(n + 1) - 2 =$

$n-1$ números en cada renglón. Aquí también, los cálculos se hacen en $n-1$ renglones. Esto explica los números anteriores.

Debe observarse un patrón. En el paso 5 se tendrán $n-2$ multiplicaciones (para dividir cada elemento en el tercer renglón, al lado de los tres primeros, entre a'_{33}). En el paso 6 serán necesarias $n-2$ multiplicaciones y $n-2$ sumas en cada uno de los $n-1$ renglones, que dan un total de $(n-1)(n-2)$ multiplicaciones y $(n-1)(n-2)$ sumas. Se continúa de esta manera hasta que quedan sólo cuatro pasos. He aquí la apariencia de la matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & a'_{1,n-1} & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & a'_{2,n-1} & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a'_{3,n-1} & a'_{3n} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a'_{n-1,n-1} & a'_{n-1,n} & b'_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a'_{n,n-1} & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right)$$

3 pasos antes del último. Se divide el renglón $(n-1)$ entre $a'_{n-1,n-1}$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & L & L & L \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & L & L & L \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & L & L & L \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & C & C \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & L & L & L \end{array}\right)$$

2 multiplicaciones
no hay sumas

2 pasos antes del último. Se multiplica el renglón $(n-1)$ por $-a'_{i,n-1}$ y se suma al renglón i, para $i = 1, 2, \ldots, n-2, n$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C & C \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & C & C \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & C & C \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & L & L \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C & C \end{array}\right)$$

$2(n-1)$ multiplicaciones
$2(n-1)$ sumas

1 paso antes del último Se divide el n-ésimo renglón entre a'_{nn}:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & L & L \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & L & L \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & L & L \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & L & L \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & C \end{array}\right)$$

1 multiplicación
no hay sumas

Último paso. Se multiplica el renglón n por $-a'_{in}$ y se suma al renglón i, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & C \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & | & C \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & | & C \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & | & C \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & | & L \end{pmatrix}$$

$1(n-1)$ multiplicaciones
$1(n-1)$ sumas

Ahora se encuentran los totales:

Para los pasos impares se tienen

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \text{ multiplicaciones}$$

y

no hay sumas

Para los pasos pares se tienen

$$(n-1)[n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1] \text{ multiplicaciones}$$

y

$$(n-1)[n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1] \text{ sumas}$$

En el ejemplo 2 del apéndice 1 (página A-2) se demuestra que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{4}$$

Entonces el numero total de multiplicaciones es

$$\underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{De los pasos pares}} + \underbrace{(n-1)\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]}_{\text{De los pasos impares}}$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right][1 + (n-1)] = n^2\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2}$$

y el número total de sumas es $(n-1)\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{n^3 - n}{2} = \frac{n^3}{2} - \frac{n}{2}$ ◆

Una modificación de la eliminación de Gauss-Jordan

Existe una manera más eficiente de reducir los renglones de A a la matriz identidad: primero se reduce A a su forma escalonada por renglones para obtener la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1,n-1} & a'_{1n} & | & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & \cdots & a'_{2,n-1} & a'_{2n} & | & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{n-1,n} & | & b'_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & | & b'_n \end{pmatrix}$$

El siguiente paso es hacer cero todos los elementos en la columna n arriba del uno en la posición n,n. Esto da como resultado

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & L & L & \cdots & L & 0 & C \\ 0 & 1 & L & \cdots & L & 0 & C \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & L \end{array}\right)$$

Por último, trabajando de derecha a izquierda, se hacen cero el resto de los elementos arriba de la diagonal. En el problema 22 se pide al lector que demuestre que con esta modificación, el número de multiplicaciones es $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$ y el número de sumas es $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$.

Para n grande

$$\frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} \approx \frac{n^3}{2}$$

Por ejemplo, cuando $n = 10\ 000$,

$$\frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} = 500\ 050\ 000\ 000 = 5.0005 \times 10^{11}$$

y

$$\frac{n^3}{2} = 500\ 000\ 000\ 000 = 5 \times 10^{11}$$

De manera similar, para n grande

$$\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n \approx \frac{n^3}{3}$$

Como $\frac{n^3}{3}$ es menor que $\frac{n^3}{2}$, se ve que la modificación descrita es más eficiente cuando n es grande. (De hecho, es mejor cuando $n \geq 3$.)

En la tabla A.1 se da el número de sumas y multiplicaciones requeridas para varios procesos presentados en los capítulos 1 y 2.

En los problemas 22 al 25 se pide al lector que derive estas fórmulas.

PROBLEMAS A3

En los problemas 1 al 13 convierta el número dado a un número de punto flotante con ocho lugares decimales de exactitud, ya sea truncando (T) o redondeando (R) como se indica.

1. $\frac{1}{3}$ (T)
2. $\frac{7}{8}$
3. -0.000035
4. $\frac{2}{3}$ (R)
5. $\frac{2}{9}$ (T)
6. $\frac{22}{7}$ (T)
7. $\frac{85}{11}$ (R)
8. $-18\frac{5}{6}$ (T)
9. $-18\frac{5}{6}$ (R)
10. 237 059 628 (T)
11. 237 059 628 (R)
12. -23.7×10^{15}
13. 8374.2×10^{-24}

Tabla A.1 Número de operaciones aritméticas para una matriz invertible A de $n \times n$

Técnica	Número de multiplicaciones	Número aproximado de multiplicaciones para n grande	Número de sumas	Número aproximado de sumas para n grande
1. Solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por eliminación de Gauss-Jordan	$\frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2}$	$\frac{n^3}{2}$	$\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2}$	$\frac{n^3}{2}$
2. Solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por la modificación a la eliminación de Gauss-Jordan	$\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$	$\frac{n^3}{3}$	$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$	$\frac{n^3}{3}$
3. Solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por eliminación de Gauss-Jordan con sustitución regresiva	$\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$	$\frac{n^3}{3}$	$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$	$\frac{n^3}{3}$
4. Obtención de A^{-1} por eliminación de Gauss-Jordan	n^3	n^3	$n^3 - 2n^2 + n$	n^3
5. Cálculo de det A por reducción de A a una matriz triangular y multiplicación de los elementos en la diagonal	$\frac{n^3}{3} + \frac{2n}{3} - 1$	$\frac{n^3}{3}$	$\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$	$\frac{n^3}{3}$

En los problemas 14 al 21 se da el número x y una aproximación x^*. Encuentre los errores absoluto y relativo ε_a y ε_r.

14. $x = 5$; $x^* = 0.49 \times 10^1$

15. $x = 500$; $x^* = 0.4999 \times 10^3$

16. $x = 3720$; $x^* = 0.3704 \times 10^4$

17. $x = \frac{1}{8}$; $x^* = 0.12 \times 10^0$

18. $x = \frac{1}{800}$; $x^* = 0.12 \times 10^{-2}$

19. $x = -5\frac{5}{6}$; $x^* = -0.583 \times 10^1$

20. $x = 0.70465$; $x^* = 0.70466 \times 10^0$

21. $x = 70465$; $x^* = 0.70466 \times 10^5$

22. Derive las fórmulas del renglón 2 de la tabla A.1. [*Sugerencia:* necesitará la siguiente fórmula que está demostrada en el ejemplo 3 del apéndice 1:

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]$$

23. Derive las fórmulas del renglón 3 de la tabla A.1.

24. Derive las fórmulas del renglón 4 de la tabla A.1.

***25.** Derive las fórmulas del renglón 5 de la tabla A.1.

26. ¿Cuántos segundos tarda, en promedio, la solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en una computadora usando eliminación de Gauss-Jordan si A es una matriz de 20×20?

27. Resuelva el problema 26 si se usa la modificación descrita en este apéndice.

28. ¿Cuántos segundos tardaría, en promedio, invertir una matriz de 50×50?, ¿una matriz de 200×200? y ¿una matriz de $10\,000 \times 10\,000$?

29. Derive la fórmula para el número de multiplicaciones y sumas requeridas para calcular el producto AB donde A es una matriz de $m \times n$ y B una de $n \times q$.

Apéndice 4
Eliminación gaussiana con pivoteo

No es difícil programar una computadora para que resuelva un sistema de ecuaciones lineales usando el método de eliminación gaussiana o de Gauss-Jordan estudiado en este libro. Existe, sin embargo, una variación al método que fue diseñada para reducir el error de redondeo acumulado al resolver un sistema de $n \times n$ ecuaciones. Este método, o alguna variación, se usa en muchos sistemas de software. Una vez que entienda esta modificación sencilla de la eliminación gaussiana, entenderá por qué, por ejemplo, la descomposición LU o las formas escalonadas encontradas en una calculadora o en MATLAB a veces son diferentes que las calculadas a mano.

En el capítulo 1 se encontró que cualquier matriz se puede reducir a la forma escalonada por renglones mediante eliminación gaussiana. Sin embargo, existe un problema computacional con este método. Si se divide entre un número pequeño que se ha redondeado, el resultado puede contener un error de redondeo significativo. Por ejemplo, $1/0.00074 \approx 1351$ mientras que $1/0.0007 \approx 1429$. Para evitar este problema, se usa un método llamado **eliminación gaussiana con pivoteo parcial**. La idea es siempre dividir entre el elemento más grande (en valor absoluto) de la columna, evitando así cuanto sea posible, el tipo de error que se acaba de ilustrar. Se describe el método con un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 1 **Solución de un sistema por eliminación gaussiana con pivoteo parcial** Resuelva el siguiente sistema por eliminación gaussiana con pivoteo parcial:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Solución **Paso 1.** Escriba el sistema en la forma de matriz aumentada. De la primera columna con componentes diferentes de cero (llamada **columna pivote**), seleccione la componente con el *valor absoluto mayor*. Ésta componente se llama **pivote**:

pivote ⟶

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ \boxed{-3} & 2 & -3 & | & -6 \\ 2 & -5 & 4 & | & 5 \end{pmatrix}$$

Paso 2. Rearregle los renglones para mover el pivote hasta arriba:

$$\begin{pmatrix} \boxed{-3} & 2 & -3 & | & -6 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 2 & -5 & 4 & | & 5 \end{pmatrix}$$

(se intercambian el primero y el segundo renglones)

Paso 3. Divida el primer renglón entre el pivote:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 1 & | & 2 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 2 & -5 & 4 & | & 5 \end{pmatrix}$$

(se divide el primer renglón entre −3)

Paso 4. Sume múltiplos del primer renglón a los otros renglones para hacer cero todas las componentes de la columna pivote:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 1 & | & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & | & -1 \\ 0 & -\frac{11}{3} & 2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

(el primer renglón se multiplica por −1 y −2 y se suma al segundo y al tercero)

Paso 5. Tape el primer renglón y realice los pasos 1 al 4 en la **submatriz** que resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 1 & | & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & | & -1 \\ 0 & \boxed{-\frac{11}{3}} & 2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

nuevo pivote

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 1 & | & 2 \\ 0 & \boxed{-\frac{11}{3}} & 2 & | & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

(se intercambian el primero y el segundo renglones de la submatriz)

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{11} & | & -\frac{3}{11} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

(se divide el primer renglón actual entre el pivote)

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{11} & | & -\frac{3}{11} \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{2}{11}} & | & -\frac{12}{11} \end{pmatrix}$$

(se multiplica el primer renglón actual por $\frac{1}{3}$ y se suma al segundo renglón actual)

Paso 6. Continúe de esta manera hasta que la matriz esté en la forma escalonada por renglones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{11} & -\frac{12}{11} \end{array}\right)$$

nuevo pivote

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

(se divide el primer renglón actual entre el pivote)

Paso 7. Utilice la **sustitución regresiva** para encontrar (si la hay) la solución al sistema. Es evidente que se tiene $x_3 = 6$. Entonces $x_2 - \frac{6}{11}x_3 = -\frac{3}{11}$ o

$$x_2 = -\frac{3}{11} + \frac{6}{11}x_3 = -\frac{3}{11} + \frac{6}{11}(6) = 3$$

Por último, $x_1 - \frac{2}{3}x_2 + x_3 = 2$ o lo que es lo mismo

$$x_1 = 2 + \frac{2}{3}x_2 - x_3 = 2 + \frac{2}{3}(3) - 6 = -2$$

La solución única está dada por el vector (−2, 3, 6). ◆

Observación. El **pivoteo completo** involucra encontrar la componente en A con mayor valor absoluto, no sólo la componente en la primera columna no cero. El problema con este método es que casi siempre incluye el retiquetado de variables cuando se intercambian las columnas para colocar el pivote en la primera. En la mayor parte de los problemas el pivoteo completo no es mucho más exacto que el pivoteo parcial –al menos no lo suficiente para justificar el trabajo adicional que implica. Por esta razón el método de pivoteo parcial descrito se usa más.

Ahora se examinará el método de pivoteo parcial aplicado a un sistema más complicado en el sentido computacional. Los cálculos se hicieron en una calculadora manual y y se redondearon a seis dígitos significativos.

EJEMPLO 2 **Solución de un sistema por eliminación gaussiana con pivoteo parcial** Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3.5x_2 + \quad x_3 &= 22.35 \\ -5x_1 + \quad 3x_2 + 3.3x_3 &= -9.08 \\ 12x_1 + 7.8x_2 + 4.6x_3 &= 21.38 \end{aligned}$$

Solución Usando los pasos descritos se obtiene sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3.5 & 1 & 22.35 \\ -5 & 3 & 3.3 & -9.08 \\ \textcircled{12} & 7.8 & 4.6 & 21.38 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \rightleftarrows R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{12} & 7.8 & 4.6 & 21.38 \\ -5 & 3 & 3.3 & -9.08 \\ 2 & -3.5 & 1 & 22.35 \end{array}\right)$$

pivote

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{12}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.65 & 0.383333 & 1.78167 \\ -5 & 3 & 3.3 & -9.08 \\ 2 & -3.5 & 1 & 22.35 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 + 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.65 & 0.383333 & 1.78167 \\ 0 & \boxed{6.25} & 5.21667 & -0.17165 \\ 0 & -4.8 & 0.233334 & 18.7867 \end{array}\right)$$

nuevo pivote

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{6.25}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.65 & 0.383333 & 1.78167 \\ 0 & 1 & 0.834667 & -0.027464 \\ 0 & -4.8 & 0.233334 & 18.7867 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 4.8R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.65 & 0.383333 & 1.78167 \\ 0 & 1 & 0.834667 & -0.027464 \\ 0 & 0 & \boxed{4.23974} & 18.6549 \end{array}\right)$$

nuevo pivote

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{4.23974}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.65 & 0.383333 & 1.78167 \\ 0 & 1 & 0.834667 & -0.027464 \\ 0 & 0 & 1 & 4.40001 \end{array}\right)$$

La matriz está ahora en la forma escalonada por renglones. Usando la sustitución regresiva se obtiene

$$\begin{aligned} x_3 &\approx 4.40001 \\ x_2 &\approx -0.027464 - 0.834667x_3 = -0.027464 - (0.834667)(4.40001) \\ &= -3.70001 \\ x_1 &\approx 1.78167 - (0.65)(x_2) - (0.383333)x_3 = 1.78167 - (0.65)(-3.70001) \\ &\quad - (0.383333)(4.40001) = 2.50001 \end{aligned}$$

La solución exacta es $x_1 = 2.5$, $x_2 = -3.7$ y $x_3 = 4.4$. Nuestras respuestas son sin duda bastante exactas. ✦

Observación. El ejemplo 2 ilustra lo tedioso que es usar este método sin calculadora –en especial si se requieren varios dígitos significativos.

El siguiente ejemplo muestra la manera en que el pivoteo puede reducir significativamente los errores. En este caso se redondea sólo a tres decimales, introduciendo con esto errores más grandes.

EJEMPLO 3 **El pivoteo parcial puede dar mejores resultados** Considere el sistema

$$\begin{aligned} 0.0002x_1 - 0.00031x_2 + 0.0017x_3 &= 0.00609 \\ 5x_1 \qquad - 7x_2 \qquad + 6x_3 &= 7 \\ 8x_1 \qquad + 6x_2 \qquad + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

La solución exacta es $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$. Primero se resolverá el sistema por eliminación gaussiana sin pivoteo, redondeando a tres cifras significativas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.0002 & -0.00031 & 0.0017 & 0.00609 \\ 5 & -7 & 6 & 7 \\ 8 & 6 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{0.0002}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1.55 & 8.5 & 30.5 \\ 5 & -7 & 6 & 7 \\ 8 & 6 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 8R_1]{R_2 \to R_2 - 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1.55 & 8.5 & 30.5 \\ 0 & 0.75 & -36.5 & -146 \\ 0 & 18.4 & -65 & -242 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{0.75}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1.55 & 8.5 & 30.5 \\ 0 & 1 & -48.7 & -195 \\ 0 & 18.4 & -65 & -242 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 18.4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1.55 & 8.5 & 30.5 \\ 0 & 1 & -48.7 & -195 \\ 0 & 0 & 831 & 3350 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{831}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1.55 & 8.5 & 30.5 \\ 0 & 1 & -48.7 & -195 \\ 0 & 0 & 1 & 4.03 \end{array}\right)$$

Esto lleva a

$$\begin{aligned} x_3 &\approx 4.03 \\ x_2 &\approx -195 + (48.7)(4.03) = 1.26 \\ x_1 &\approx 30.5 + (1.55)(1.26) - 8.5(4.03) = -1.8 \end{aligned}$$

En este caso los errores son significativos. Los errores relativos, dados como porcentajes, son

$$x_1\text{: } \varepsilon_r = \left|\frac{-0.2}{2}\right| = 10\%$$

$$x_2\text{: } \varepsilon_r = \left|\frac{0.26}{1}\right| = 26\%$$

$$x_3\text{: } \varepsilon_r = \left|\frac{0.03}{4}\right| = 0.75\%$$

Se repetirá este procedimiento *con* pivoteo. Se obtiene (los círculos indican los pivotes)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.0002 & -0.00031 & 0.0017 & 0.00609 \\ 5 & -7 & 6 & 7 \\ \textcircled{8} & 6 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightleftarrows R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{8} & 6 & 3 & 2 \\ 5 & -7 & 6 & 7 \\ 0.0002 & -0.00031 & 0.0017 & 0.00609 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{8}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.75 & 0.375 & 0.25 \\ 5 & -7 & 6 & 7 \\ 0.0002 & -0.00031 & 0.0017 & 0.00609 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 0.0002R_1]{R_2 \to R_2 - 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.75 & 0.375 & 0.25 \\ 0 & \textcircled{-10.8} & 4.13 & 5.75 \\ 0 & -0.00046 & 0.00163 & 0.00604 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{10.8}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.75 & 0.375 & 0.25 \\ 0 & 1 & -0.382 & -0.532 \\ 0 & -0.00046 & 0.00163 & 0.00604 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 0.00046R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.75 & 0.375 & 0.25 \\ 0 & 1 & -0.382 & -0.532 \\ 0 & 0 & \boxed{0.00145} & 0.0058 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{0.00145}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.75 & 0.375 & 0.25 \\ 0 & 1 & -0.382 & -0.532 \\ 0 & 0 & 1 & 4.00 \end{array}\right)$$

Por lo tanto,

$$x_3 = 4.00$$
$$x_2 = -0.532 + (0.382)(4.00) = 0.996$$
$$x_1 = 0.25 - 0.75(0.996) - (0.375)(4.00) = -2.00$$

Así, con el pivoteo y un redondeo a tres dígitos significativos, x_1 y x_3 se obtienen de manera exacta y x_2 se obtiene con un error relativo de $0.004/1 = 0.4\%$ ✦

Antes de dejar esta sección, se observa que existen algunas matrices para las que un pequeño cambio en los elementos puede llevar a un cambio grande en la solución. Tales matrices se llaman **mal condicionadas**.

EJEMPLO 4 **Un sistema mal condicionado** Considere el sistema

$$x_1 + \quad x_2 = 1$$
$$x_1 + 1.005x_2 = 0$$

Se ve fácilmente que la solución exacta es $x_1 = 201$, $x_2 = -200$. Si los coeficientes se redondean a tres dígitos significativos, se obtiene el sistema

$$x_1 + \quad x_2 = 1$$
$$x_1 + 1.01x_2 = 0$$

con solución exacta $x_1 = 101$, $x_2 = -100$. Al cambiar uno de los elementos de la matriz de coeficientes por $0.005/1.005 \approx 0.5\%$, ¡la matriz sufre un cambio de alrededor del 50% en la solución final! ✦

Existen técnicas para reconocer y manejar las matrices mal condicionadas. Una de ellas, la función cond(A) de MATLAB, da una medida de la sensibilidad de la solución de un sistema de ecuaciones lineales a los cambios en los datos.

PROBLEMAS A4

En los problemas 1 al 4 resuelva el sistema de ecuaciones dado por eliminación gaussiana con pivoteo parcial. Utilice una calculadora manual y redondee a seis dígitos significativos en cada paso.

1.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0.3 \\ -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -1.4 \\ 3x_1 - 8x_2 + 3x_3 &= 0.1 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 4.7x_1 + 1.81x_2 + 2.6x_3 &= -5.047 \\ -3.4x_1 - 0.25x_2 + 1.1x_3 &= 11.495 \\ 12.3x_1 + 0.06x_2 + 0.77x_3 &= 7.9684 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} -7.4x_1 + 3.61x_2 + 8.04x_3 &= 25.1499 \\ 12.16x_1 - 2.7x_2 - 0.891x_3 &= 3.2157 \\ -4.12x_1 + 6.63x_2 - 4.38x_3 &= -36.1383 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} 4.1x_1 - 0.7x_2 + 8.3x_3 + 3.9x_4 &= -4.22 \\ 2.6x_1 + 8.1x_2 + 0.64x_3 - 0.8x_4 &= 37.452 \\ -5.3x_1 - 0.2x_2 + 7.4x_3 - 0.55x_4 &= 25.73 \\ 0.8x_1 - 1.3x_2 + 3.6x_3 + 1.6x_4 &= -7.7 \end{aligned}$$

En los problemas 5 y 6 resuelva el sistema por eliminación gaussiana con y sin pivoteo, redondeando a tres cifras significativas. Después encuentre la solución exacta y calcule los errores relativos de los seis valores calculados.

5.
$$\begin{aligned} 0.1x_1 + 0.05x_2 + 0.2x_3 &= 1.3 \\ 12x_1 + 25x_2 - 3x_3 &= 10 \\ -7x_1 + 8x_2 + 15x_3 &= 2 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} 0.02x_1 + 0.03x_2 - 0.04x_3 &= -0.04 \\ 16x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 50x_1 + 10x_2 + 8x_3 &= 6 \end{aligned}$$

7. Demuestre que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 50 \\ x_1 + 1.026x_2 &= 20 \end{aligned}$$

está mal condicionado si se redondea a tres cifras significativas. ¿Cuál es el error relativo aproximado en cada respuesta inducido por el redondeo?

8. Haga lo mismo para el sistema

$$\begin{aligned} -0.0001x_1 + x_2 &= 2 \\ -x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Apéndice 5
Utilización de MATLAB

MATLAB es un software computacional y visual para realizar el análisis matricial y otras actividades de álgebra lineal. Es un producto de:

The MathWorks, Inc.
24 Prime Park Way
Natick, MA 01760-1520
teléfono: (508) 653-1415
fax: (508) 653-2997
Correo electrónico: Info@mathworks.com

Los problemas de MATLAB en este libro están diseñados para introducir al lector a los comandos de MATLAB según lo van requiriendo los conjuntos de problemas. Los comentarios que siguen se centran en aspectos de apoyo.

Herramientas de álgebra lineal elemental (disco de archivos *.*m*)

Varios problemas de MATLAB en el texto corresponden a archivos *m* (pequeños programas) escritos para permitir una exploración más completa de ciertos conceptos. Los archivos *m* están descritos en los problemas. La versión 3.5 de MATLAB (incluyendo la edición de estudiante) o la versión 4.0 de MATLAB, se encuentran disponibles en un disco (ya sea en formato PC o Mac) llamado herramientas de álgebra lineal elemental (*Elementary Linear Algebra Toolbox*), producido por MathWorks, que puede obtener poniéndose en contacto con The MathWorks.

El disco contiene un archivo README (léeme) que describe brevemente las archivos *m*, contiene información sobre la trayectoria de búsqueda (*path*) para que MATLAB los

accese e información sobre a quién dirigirse con preguntas o problemas concernientes al uso de estos archivos. Los archivos *m* son rutinas con las que han contribuido los usuarios y se distribuyen a través de MathWorks, previa solicitud, sobre la base de "tal como está". Una rutina de contribución de usuario no es un producto de MathWorks, Inc. quien no asume ninguna responsabilidad por lo errores que puedan existir en ellos.

MATLAB Primer

Además de los manuales que acompañan al software, resulta útil adquirir una copia de *MATLAB Primer* de Kermit Sigmon de la University or Florida. Se trata de una guía general cuyo propósito es servir como una introducción a MATLAB. Una característica excelente del *Primer* la constituyen las listas de comandos de MATLAB clasificadas según la función básica del comando. MATLAB incluye una excelente ayuda en pantalla para aquellos que conocen el nombre de cierto comando. (Dé **help**, seguido del nombre del comando y aparecerá una descripción del uso y resultado del comando.) La combinación de la ayuda con las listas de comandos en el *Primer* es una herramienta poderosa para aprender MATLAB.

Los programas fuente básicos $\TeX$ de la última versión del *MATLAB Primer* están disponible via un *ftp* anónimo por

math.ufl.edu   directory:pub/matlab   file:primer.tex

Esta localización también tiene un archivo PostScript *primer.ps* para el *Primer*, al igual que una versión en español de *primersp.tex*. En el archivo README encontrará más información. Le aconsejamos que baje la última versión de cada término porque pueden contener algunas correcciones menores y quizá haya aparecido una nueva edición. Si no puede obtener una copia adecuada de estos programas fuente puede ponerse en contacto con el autor de *MATLAB Primer*: Kermit Sigmon, Departament of Mathematics, Unversity of Florida, Gainesville, FL 32611, sigmon@math.ufl.edu.

La intención es que la distribución del *MATLAB Primer* sea sencilla mediante un centro de copiado local. Si un profesor desea tener copias hechas para una clase, el Dr. Sigmon dará el permiso correspondiente.

Obtención de un registro de trabajo y resultados

El usuario con frecuencia desea guardar un registro del trabajo realizado, tanto de los comandos como de los resultados de MATLAB. El comando **diary** puede almacenar esta información junto con cualquier programa editor. Antes de introducir los comandos que se quieren guardar, dé el comando **diary** seguido de un nombre de archivo que debe comenzar con una letra y tener hasta ocho caracteres. Cualquier texto que aparezca en la pantalla de comandos quedará en el archivo. Debe dar el comando **diary off** (al terminar el trabajo que quiere registrar) para grabar la última porción del trabajo. Si se usa el comando diary otra vez, con el mismo archivo, el nuevo trabajo se anexará al anterior. Una vez que se ha grabado el trabajo, el archivo se puede leer, editar e imprimir usando el editor.

La versión 3.5 de MATLAB facilita el uso de un editor sin tener que salir del programa. Para llamar al editor desde MATLAB, comience con la llamada !. La salida del editor regresará a la pantalla de comandos de MATLAB. En la versión 4.0, la pantalla de edición y de comandos aparecerán en ventanas separadas. Se puede obtener más información sobre el uso de **dairy** o ! en la ayuda en pantalla de MATLAB o en el *MATLAB Primer*.

Debe tenerse cuidado en la elección del editor para evitar frustraciones. Algunos editores colocan un carácter Ctrl-Z al final de un archivo editado (cambios hechos y grabados). En esta situación, aun cuando continúe activo el comando **diary** para guardar el trabajo nuevo en el archivo que se editó, el editor *no* podrá accesarlo, así que de hecho se pierde.

Consideraciones gráficas

Los comandos de gráficas se introdujeron en varios problemas de MATLAB. Diremos algunas cosas que debe saber al respecto.
Al trabajar con MATLAB versión 3.5, o incluso la edición de estudiante, oprima cualquier tecla para regresar a la pantalla de comandos después de ver la pantalla de gráficas. Dé el comando **shg** para regresar a la pantalla actual de gráficas desde la pantalla de comandos. Al trabajar con MATLAB versión 4.0, las pantallas de comandos y de gráficas aparecen en ventanas separadas y se puede cambiar de una a otra o se pueden arreglar para verlas al mismo tiempo.

Al terminar un problema o una parte específica de él que involucre gráficas, debe limpiar la pantalla de gráficas y liberar las características que se congelan (después de guardar o imprimir la gráfica deseada). En MATLAB versión 3.5, dé **clg** y **hold off**. En MATLAB versión 4.0 dé **clf**. Algunas de estas instrucciones aparecen en los problemas del libro.

Hay que tomar en cuanta varias cosas para obtener una *salida de gráficas*. Si está usando MATLAB en un sistema que tiene acceso a memoria extendida o si cuenta con la versión 4.0, dé **help print** y obtendrá las instrucciones. Si su sistema no tiene acceso a memoria extendida, dé **help meta** para obtener información sobre el almacenamiento de una pantalla de gráficas en un archivo. Después lea en el manual de MATLAB la información sobre el uso del programa **gpp**. Si está usando la versión de estudiante, la única manera de obtener una impresión de las gráficas es realizar una impresión directa de pantalla (la teclas Shift.PrtScr, es decir, Mayús-ImpPant). Antes de usar MATLAB debe cargar el paquete de gráficas de su sistema operativo. *Advertencia*: la salida de impresión directa no necesariamente preserva la proporción y aspecto de la pantalla: los ángulos rectos pueden no aparecer como ángulos rectos y las longitudes iguales pueden aparecer diferentes.

Consideraciones de MATLAB versión 4.0

Algunos problemas del libro incluyen pequeños bloques de programas de MATLAB para que el usuario introduzca a la computadora. El programa, como está escrito, es compa-

tible con la versión 3.5, incluyendo la de estudiantes. Se han hecho algunos esfuerzos para incluir una descripción de las modificaciones necesarias para que los programas sean compatibles con MATLAB versión 4.0. En el caso de alguna omisión, acuda a la siguiente guía general para esas modificaciones:

1. En los problemas que incluyen establecer ejes usando el comando **axis**, MATLAB versión 3.5 requiere que se establezcan antes de graficar, mientras que en la versión 4.0 los ejes deben establecerse *después* de la gráfica.
2. Si un problema involucra el uso de **hold on**, con la versión 4.0 use los comandos **hold on** y **axis(axis)** (o vuelva a dar todos los comandos **axis**).
3. Si un problema involucra el uso de **clg**, en la versión 4.0 utilice **clf**.
4. Si un problema incluye el comando **rat**, en la versión 4.0 utilice **format rat**. La ayuda en pantalla contiene una descripción del uso completo de este comando.

Nombres de variables especiales

La variable **i** está construida para representar el número complejo *i*, y la variable **pi** representa el número π siempre que estas variables no se hayan usado con otro propósito. Es improbable que se use **pi** sin advertirlo, pero es muy probable que se use **i**. La variable **eps** se usa en forma global en muchas rutinas de MATLAB y *no* debe usarse de otra manera.

Respuestas a los problemas impares

Capítulo 1

Problemas 1.2, página 5

1. $x = -\frac{13}{5}$, $y = -\frac{11}{5}$; $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -10$
3. No hay soluciones; $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$
5. $x = \frac{11}{2}$, $y = -30$; $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -2$
7. Número infinito de soluciones; $y = \frac{2}{3}x$, donde x es arbitrario; $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$
9. $x = -1$, $y = 2$; $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -1$
11. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a^2 - b^2$; si $a^2 - b^2 \neq 0$ (es decir, si $a \neq \pm b$), entonces $x = y = c/(a + b)$. Si $a^2 - b^2 = 0$, entonces $a = \pm b$. Si $a \neq 0$ y $a = b$, entonces existe un número infinito de soluciones dadas por $y = c/a - x$. Si $a \neq 0$ y $a = -b$, entonces no hay soluciones (a menos que $c = 0$, en cuyo caso $x = y$ es una solución).
13. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -2ab$; solución única si a y b son diferentes de cero.
15. $a = b = 0$ y $c \neq 0$ o $d \neq 0$
17. No hay punto de intersección
19. Las rectas son coincidentes. Cualquier punto de la forma $(x, (4x - 10)/6)$ es un punto de intersección
21. $(\frac{17}{13}, \frac{2}{13})$
23. $\sqrt{13}/13$
25. $\sqrt{61}/5$
27. $\sqrt{5}$
29. Como la pendiente de la recta dada L es $-\frac{a}{b}$, la pendiente de $L_{\perp}$ es $\frac{b}{a}$. La ecuación de la recta $L_{\perp}$ perpendicular a L que pasa por (x_1, y_1) está dada por $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{b}{a}$, o sea, $bx - ay = bx_1 - ay_1$. El único punto de intersección de L y $L_{\perp}$ es $(x_0, y_0) = \left(\frac{ac - aby_1 + b^2x_1}{a^2 + b^2}, \frac{bc - abx_1 + a^2y_1}{a^2 + b^2}\right)$. Entonces d es la distancia entre (x_0, y_0) y (x_1, y_1), y después del álgebra,

$$d^2 = \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} \times (a^2c^2 - 2a^2bcy_1 + a^2b^2y_1^2 - 2a^3cx_1 + 2a^3bx_1y_1 + a^4x_1^2 + c^2b^2 - 2ab^2cx_1 + a^2b^2x_1^2 - 2b^3cy_1 + 2ab^3x_1y_1 + b^4y_1^2 = \frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}(c^2 - 2abcy_1 + b^2y_1^2 - 2acx_1 + 2abx_1y_1 + a^2x_1^2) =$$

$\frac{1}{(a^2 + b^2)}(ax_1 + by_1 - c)^2$. Así $d = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

31. Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, $-a_{11}a_{22} = -a_{12}a_{21}$ y $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}}$ si $a_{12}a_{22} \neq 0$. Las dos rectas son paralelas ya que tienen pendientes iguales. Si $a_{12} = 0$ y $a_{22} = 0$, entonces las rectas son paralelas porque las dos son verticales.

33. Las solución única se puede encontrar como $x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$ y $y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$.

35. Sea x = núm. de tasas; y = núm. de platos; las soluciones son $(x, 240 - \frac{2}{3}x)$. [Existe un número infinito de soluciones porque x y y deben ser enteros positivos.]

37. 32 sodas, 128 malteadas.

Problemas 1.3, página 24

Nota: Cuando hay un número infinito de soluciones, se escriben soluciones seleccionando la última variable arbitrariamente. Las soluciones se pueden escribir de otras maneras.

1. $(2, -3, 1)$

3. $(3 + \frac{2}{5}x_3, \frac{8}{9}x_3, x_3)$, x_3 arbitraria

5. $(-9, 30, 14)$

7. No hay solución

9. $(-\frac{4}{5}x_3, \frac{9}{5}x_3, x_3)$, x_3 arbitraria

11. $(-1, \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_3, x_3)$, x_3 arbitraria

13. No hay solución

15. $(\frac{20}{13} - \frac{4}{13}x_4, -\frac{28}{13} + \frac{3}{13}x_4, -\frac{45}{13} + \frac{9}{13}x_4, x_4)$, x_4 arbitraria

17. $(18 - 4x_4, -\frac{15}{2} + 2x_4, -31 + 7x_4, x_4)$, x_4 arbitraria

19. No hay solución

21. Forma escalonada por renglones

23. Forma escalonada reducida por renglones

25. Ninguna

27. Forma escalonada reducida por renglones

29. Ninguna

31. Forma escalonada por renglones: $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; forma escalonada reducida por renglones $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

33. Forma escalonada por renglones:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forma escalonada reducida por renglones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

35. Forma escalonada por renglones:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

forma escalonada reducida por renglones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

37. $x_1 = 30\,000 - 5x_3$
$x_2 = x_3 - 5000$
$5000 \leq x_3 \leq 6000$; no

39. No hay solución única (2 ecuaciones con 3 incógnitas); si 200 acciones de McDonald's, entonces 100 de Hilton y 300 de Delta

41. La forma escalonada por renglones de la matriz aumentada que representa el sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & a/2 \\ 0 & 1 & -\frac{29}{5} & \frac{2}{5}(b - \frac{3}{2}a) \\ 0 & 0 & 0 & -2a + 3b + c \end{array}\right)$$

lo que es inconsistente si $-2a + 3b + c \neq 0$ o $c \neq 2a - 3b$.

43. $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \neq 0$

45. $(-3, 5, 0, 2)$

47. $(-17.29018527, -0.2927858589, -12.91757558, 39.93531770)$

49. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2.333 & -0.333 & 1.333 \\ 0 & 1 & -0.5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.263 & -0.526 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

51. $\begin{pmatrix} 1 & 0.887 & 0.37 & 0.623 & 2.562 \\ 0 & 1 & 0.086 & 0.653 & 24.665 \\ 0 & 0 & 1 & -0.307 & -25.187 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 39.935 \end{pmatrix}$

53. $\begin{pmatrix} 1 & -0.381 & 1.662 & 0.394 & -0.257 & 1.643 \\ 0 & 1 & -0.74 & -0.258 & -0.768 & -0.129 \\ 0 & 0 & 1 & 1.292 & -1.235 & 0.754 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.246 & -2.847 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.652 \end{pmatrix}$

55. $(1.275x_3 + 0.961, -0.403x_3 - 0.090, x_3)$, x_3 arbitraria

57. $(7.616x_4 - 11.870x_5 + 31.348, 4.876x_4 - 6.775x_5 + 11.043, -1.121x_4 + 3.072x_5 - 2.696, x_4, x_5)$, x_4, x_5 arbitraria

59. $(-11.870x_5 + 50.540, -6.775x_5 + 23.33, 3.072x_5 - 5.52, 2.52, x_5)$, x_5 arbitraria

Tutoría de MATLAB

1. **A =**
   [2 2 3 4 5;-6 -1 2 0 7;1 2 -1 3 4] o
   A =[2 2 3 4 5;
   -6 -1 2 0 7;
   1 2 -1 3 4]
   b = [-1;2;5]

3. **D = 2*(2* rand(3,4)-1)**

5. **K = B, K([1 4],:) = K([4 1],:)**

7. Para escribir una línea de comentario, primero se pone %. El comando da la submatriz de B dada por
$$\begin{pmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{41} & b_{43} \end{pmatrix}.$$

9. **C(2,:) = C(2,:) + 3*C(1,:)**

11. El sistema de ecuaciones equivalente es
$$\begin{aligned} x_1 \quad - .1915x_4 - 1.4681x_5 &= -1.1489 \\ x_2 \quad + 1.7447x_4 + 3.0426x_5 &= 2.4681 \\ x_3 + .2979x_4 + .6170x_5 &= -1.2128 \end{aligned}$$

MATLAB 1.3

1. Existen soluciones únicas ya que cada columna de la forma escalonada reducida por renglones de la matriz de coeficientes tiene un pivote. Si la matriz *aumentada* tiene cinco columnas, por ejemplo, y su forma escalonada reducida por renglones se asigna a la variable **R**, entonces la solución será **x = R(:,5)**.

3. La respuesta para iv) como una muestra es: la forma escalonada reducida por renglones
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & .5 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Los pivotes están en las posiciones (1, 1), (2, 2) y (3, 4). El sistema de ecuaciones equivalente es
$$\begin{aligned} x_1 \quad + .5x_3 \quad + 5x_5 &= 1 \\ x_2 + \quad x_3 \quad &= 2 \\ x_4 - 3x_5 &= -1 \end{aligned}$$
Las columnas 3 y 5 no tienen pivotes, así:
$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - .5x_3 - 5x_5 \\ x_2 &= 2 - x_3 \\ x_4 &= -1 + 3x_5 \end{aligned}$$

5. Se da el programa para el inciso iii) después de introducir la matriz **A**. Existen posibles variaciones.
Para hacer ceros en la columna uno abajo de la posición (1, 1):
A(2,:) = A(2,:)-2*A(1,:)
A(3,:) = A(3,:)+3*A(1,:)
A(4,:) = A(4,:)-A(1,:)
El siguiente pivote está en la posición (2, 3). Para hacer ceros en el resto de la columna 3 (ya hay un cero en el

renglón 4) y para poner un 1 en la posición pivote:

A(3,:) = A(3,:)–2∗A(2,:)
A(1,:) = A(1,:)+2/3∗A(2,:)
A(2,:) = 1/3∗A(2,:)

El siguiente pivote está en la posición (3, 4). Para hacer ceros en el resto de la columna 4 (ya hay ceros arriba del pivote) y poner un 1 en la posición pivote:

A(4,:) = A(4,:)+2∗A(3,:)
A(3,:) = 1/2∗A(3,:)

Esto completa la reducción a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1.5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. a. Primer sistema: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Segundo sistema: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b. Primer sistema: sea x_3 arbitraria. Entonces $x_1 = 2 - x_3$ y $x_2 = -1 + 2x_3$. Segundo sistema: sea x_3 arbitraria. Entonces $x_1 = 1 - x_3$ y $x_2 = -1 + 2x_3$. Tercer sistema: no hay solución.

c. Si un sistema cuadrado tiene una solución única para un lado derecho, tendrá solución única para cualquier lado derecho. Al explicar la causa, analice por qué hay un pivote en cada renglón y cada columna y lo que esto implica (respectivamente) sobre la existencia y unicidad de las soluciones. Es posible que un sistema cuadrado tenga un número infinito de soluciones para un lado derecho y no tenga solución para otro, como se ilustra en el inciso b).

9. b. La matriz de coeficientes adecuada es $\begin{pmatrix} .8 & -.1 & -.3 \\ -.15 & .75 & -.25 \\ -.1 & -.05 & 1 \end{pmatrix}$.

La solución es que la industria 1 necesita producir \$537 197.63; la industria 2, \$466 453.67, y la 3, \$277 042.45.

11. a. Matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Polinomio: $-2.3333x^2 + 11.3333x - 10$.

b. Matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Polinomio: $-1.4167x^3 + 8.8333x^2 - 14.4167x + 5$.

Problemas 1.4, página 42

1. (0, 0) **3.** (0, 0, 0)

5. $(\frac{1}{6}x_3, \frac{5}{6}x_3, x_3)$, x_3 arbitraria

7. (0, 0)

9. $(-4x_4, 2x_4, 7x_4, x_4)$, x_4 arbitraria

11. (0, 0) **13.** (0, 0, 0)

15. $k = \frac{85}{11}$

17. $(1.6621x_3, 0.0023x_3, x_3)$, x_3 arbitraria

19. $(0.3305x_4 + 0.147x_5, 2x_4 - 3.25x_5, -0.7124x_4 + 0.1019x_5, x_4, x_5)$, x_4, x_5 arbitrarias

MATLAB 1.4

3. a. $x_1 = 6$ de CO_2, $x_2 = 6$ de H_2O, $x_3 = 1$ de $C_6H_{12}O_6$ y $x_4 = 6$ de O_2.

b. $x_1 = 15$ de $Pb(N_3)_2$, $x_2 = 44$ de $Cr(MnO_4)_2$, $x_3 = 22$ de Cr_2O_3, $x_4 = 88$ de MnO_2, $x_5 = 5$ de Pb_3O_4 y $x_6 = 90$ de NO.

Problemas 1.5, página 56

1. $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -31 \\ 22 \\ -27 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ -10 \end{pmatrix}$ 11. (1, 2, 5, 7)

13. (−8, 12, 4, 20)

15. (8, −5, 7, −1)

17. (7, 2, 4, 11)

19. (−11, 9, 18, 18)

21. $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 15 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ 23. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 27. $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 15 \\ -15 & 10 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 17 & 22 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$ 31. $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 14 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & -5 \\ -14 & 13 & -1 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 9 & 5 & 10 \\ 7 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -10 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 \\ -9 & -5 & -10 \\ -7 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

41. $0A = \bar{0}$ porque $0a = 0$ para cualquier escalar a;
$1A = A$ porque $1a = a$ para cualquier escalar a;
$\bar{0} + A = A$ porque $0 + a = a$ para cualquier escalar a.

43. Se deduce porque $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ para escalares a y b. Además, $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$

45. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

MATLAB 1.5

1. a. Un programa posible es:

```
c = -A(2,1)/A(1,1),
    A(2,:) = A(2,:)+c*A(1,:)
c = -A(3,1)/A(1,1),
    A(3,:) = A(3,:)+c*A(1,:)
c = -A(4,1)/A(1,1),
    A(4,:) = A(4,:)+c*A(1,:)
```

Observe que la columna 2 no tiene pivote. El siguiente pivote está en la posición (2, 3).

```
c = -A(3,3)/A(2,3),
    A(3,:) = A(3,:)+c*A(2,:)
c = -A(4,3)/A(2,3),
    A(4,:) = A(4,:)+c*A(2,:)
```

El último renglón de comandos se incluyó para asegurar que la posición (4, 3) sea en realidad cero. El siguiente pivote está en la posición (3, 4).

```
c = -A(4,4)/A(3,4),   A(4,:) =
    A(4,:)+c*A(3,:)
```

No hay más pivotes. La forma escalonada por renglones es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. b. $s(A + B) = sA + sB$

Problemas 1.6, página 78

1. −14 3. 1 5. $ac + bd$

7. 51 9. $a = 0$ 11. 4

13. 28

15. $\begin{pmatrix} 8 & 20 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 13 & 35 & 18 \\ 20 & 26 & 20 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 19 & -17 & 34 \\ 8 & -12 & 20 \\ -8 & -11 & 7 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 18 & 15 & 35 \\ 9 & 21 & 13 \\ 10 & 9 & 9 \end{pmatrix}$ **25.** $(7 \quad 16)$

27. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ **29.** $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$

31. Si $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, entonces

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22}/D & -a_{12}/D \\ -a_{21}/D & a_{11}/D \end{pmatrix}$$

33. **a.** 3 en el grupo 1, 4 en el grupo 2 y 5 en el 3

b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

35. Ortogonal

37. Ortogonal **39.** Ortogonal

41. Todo α y β que satisfacen $5\alpha + 4\beta = 25$ ($\beta = (25 - 5\alpha)/4$, α arbitraria)

43. **a.** $(2, 3, 5, 1)$

b. $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ **c.** 11

45. **a.** $\begin{pmatrix} 80\,000 & 45\,000 & 40\,000 \\ 50 & 20 & 10 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ **c.** dinero: 255 000;

acciones: 120

47. $\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 32 & 32 \end{pmatrix}$ **49.** $\begin{pmatrix} 11 & 38 \\ 57 & 106 \end{pmatrix}$

51. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

53. $PQ = \begin{pmatrix} \frac{11}{90} & \frac{41}{90} & \frac{19}{45} \\ \frac{11}{120} & \frac{71}{120} & \frac{19}{60} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; todos los elementos son no negativos y $\frac{11}{90} + \frac{41}{90} + \frac{19}{45} = \frac{11}{120} + \frac{71}{120} + \frac{19}{60} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$.

55. Sea $P = (p_{ij})$ y $Q = (q_{ij})$ dos matrices de probabilidad de $k \times k$. Sea $PQ = C = (c_{ij})$. La suma de los elementos del renglón m de PQ es

$$\begin{aligned} & c_{m1} + c_{m2} + c_{m3} + \cdots \\ & + c_{mk} = p_{m1}q_{11} + p_{m2}q_{21} \\ & + p_{m3}q_{31} + \cdots + p_{mk}q_{k1} \\ & + p_{m1}q_{12} + p_{m2}q_{22} + p_{m3}q_{32} \\ & + \cdots + p_{mk}q_{k2} + p_{m1}q_{13} \\ & + p_{m2}q_{23} + p_{m3}q_{33} + \cdots \\ & + p_{mk}q_{k3} \\ & \vdots \\ & + p_{m1}q_{1k} + p_{m2}q_{2k} + p_{m3}q_{3k} \\ & + \cdots + p_{mk}q_{kk} \end{aligned}$$

(Los elementos entre paréntesis están en un renglón de Q cuya suma es 1.)

$\downarrow$

$$\begin{aligned} & = p_{m1}(q_{11} + q_{12} + q_{13} + \cdots \\ & + q_{1k}) + p_{m2}(q_{21} + q_{22} \\ & + q_{23} + \cdots + q_{2k}) \\ & + p_{m3}(q_{31} + q_{32} + q_{33} + \cdots \\ & + q_{3k}) + \cdots + p_{mk}(q_{k1} + q_{k2} \\ & + q_{k3} + \cdots + q_{kk}) \\ & = p_{m1}(1) + p_{m2}(1) + p_{m3}(1) \\ & + \cdots + p_{mk}(1) = 1 \end{aligned}$$

57. **a.** tenista 2 > tenista 4 > tenista 1 > tenista 3

b. marcador = número de juegos ganados más la mitad del número de juegos ganados por cada tenista al que este tenista dado le ganó.

59. $A(B+C)$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 9\\ 2 & 11\\ 10 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}45 & 35\\ 1 & 16\end{pmatrix}$$

$$AB+AC=\begin{pmatrix}24 & 15\\ 7 & 17\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}21 & 20\\ -6 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45 & 35\\ 1 & 16\end{pmatrix}$$

61. $\begin{pmatrix}3 & 7 & 1 & 5\\ 18 & 42 & 6 & 30\\ 6 & 14 & 2 & 10\end{pmatrix}$

63. $\left(\begin{array}{cc|cc} e & f & 0 & 0\\ g & h & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & a & b\\ 0 & 0 & c & d\end{array}\right)$

65. $AB=BA=\begin{pmatrix}I & 0\\ C+D & I\end{pmatrix}$ Observe que $D+C=C+D$

67. 36 **69.** 9840

71. $\frac{13}{7}+\frac{15}{4}+\frac{17}{5}=\frac{1261}{140}$

73. $(1^2+2^2+3^2)(2^3+3^3+4^3)=1386$

75. $\sum_{k=0}^{5}(-3)^k$ **77.** $\sum_{k=1}^{n}k^{1/k}$

79. $\sum_{k=0}^{9}\frac{(-1)^{k+1}}{a^k}$

81. $\sum_{k=2}^{7}k^2\cdot 2k=\sum_{k=2}^{7}2k^3$

83. $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}$ **85.** $\sum_{k=1}^{5}a_{3k}b_{k2}$

87. $\sum_{k=M}^{N}(a_k+b_k)=(a_M+b_M)+(a_{M+1}+b_{M+1})+(a_{M+2}+b_{M+2})+\cdots+(a_N+b_N)$
$=(a_M+a_{M+1}+a_{M+2}+\cdots+a_N)+(b_M+b_{M+1}+b_{M+2}+\cdots+b_N)$
$=\sum_{k=M}^{N}a_k+\sum_{k=M}^{N}b_k$

89. $\sum_{k=M}^{N}a_k=a_M+a_{M+1}+\cdots+a_m+a_{m+1}+\cdots+a_N=(a_M+a_{M+1}+\cdots+a_m)+(a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_N)=\sum_{k=M}^{m}a_k+\sum_{k=m+1}^{N}a_k$

91. $\begin{pmatrix}34\,192 & 38\,621\\ 50\,408 & 44\,115\\ 62\,661 & 71\,731\\ 59\,190 & 55\,046\end{pmatrix}$

93. **a.** Los números en los renglones de cada matriz son positivos y suman 1.

b. $PQ=$

$$\begin{pmatrix}0.31118 & 0.18444 & 0.14174 & 0.36264\\ 0.32625 & 0.27585 & 0.08454 & 0.31336\\ 0.17955 & 0.22651 & 0.19619 & 0.39775\\ 0.30047 & 0.15251 & 0.33558 & 0.21144\end{pmatrix}$$

es una matriz de probabilidad porque los elementos de los renglones son positivos y suman 1.

95. $A^n=\begin{pmatrix}a^n & u & v\\ 0 & b^n & w\\ 0 & 0 & c^n\end{pmatrix}$ donde u, v y w son número reales.

MATLAB 1.6

1. AB está definido; BA no está definido y produce un mensaje de error.

3. Encontrará que $A(X+sZ)=B$.

5. **A = 10*(2*rand(5,6)−1)**. La expresión dada será igual a cero demostrando que $A\mathbf{x}$ tiene la interpretación de una combinación lineal de las columnas de A.

7. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ sólo para aquellos pares A y B que conmuten. *Sugerencia para la demostración:* extienda la multiplicación $(A + B)^2$.

9. **a.** El producto de matrices triangulares superiores es triangular superior. *Sugerencia para la demostración:* Suponga que T y S son triangulares superiores. Utilice el hecho de que $(TS)ij$ es una suma de elementos de la forma $t_{ik}s_{kj}$ y que $t_{ik} = 0$ si $i > k$ y $s_{kj} = 0$ si $k > j$ para demostrar que $(TS)_{ij} = 0$ para $i > j$.

11. El patrón se cumple: **AA*BB–K = 0**.

13. **a.** La matriz de contacto indirecto deseada K es XYZ, donde X es la matriz de contacto del grupo 1 con el grupo 2, Y es la matriz de contacto entre el grupo 2 y el 3 y Z entre el grupo 3 y el 4.
Se da un ejemplo del programa para introducir Y de una manera sencilla:

```
Y = zeros(5,8);
Y(1,[1  3  5]) = [1  1  1]
Y(2,[3  4  7]) = [1  1  1]
Y(3,[1  5  6  8]) = [1  1  1  1]
Y(4,8) = 1
Y(5,[5  6  7]) = [1  1  1]
```

La matriz de contacto indirecto entre el grupo 1 y el 4:

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 1 & 3 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

b. No hay ceros en K, de manera que cada persona del grupo 1 tiene contacto indirecto con todas las personas del grupo 4.

c. **[1 1 1]*K** producirá las sumas de las columnas, es decir, el número total de contactos indirectos que tiene cada miembro del grupo 4 con el grupo 1. $C1$ tiene 12 contactos, el cual es el número más grande en las sumas de las columnas.
K*ones(10,1) producirá las sumas de los renglones, es decir, el número total de contactos indirectos de cada miembro del grupo 1 con el grupo 4. $A3$ es la más peligrosa pues tiene 26 contactos indirectos.

Problemas 1.7, página 94

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

7. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} 2x_1 \quad\quad + x_3 &= 2 \\ -3x_1 + 4x_2 \quad\quad &= 3 \\ 5x_2 + 6x_3 &= 5 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad &= 2 \\ x_2 \quad\quad &= 3 \\ x_3 \quad &= -5 \\ x_4 &= 6 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 2 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 &= 2 \\ 6x_1 + 9x_2 &= 3 \end{aligned}$$

17. La solución más sencilla al sistema de ecuaciones no homogéneo se obtiene haciendo $x_2 = 0$. Entonces, la solución general es $(2, 0) + x_2(3, 1)$; x_2 arbitraria.

19. Si $x_3 = 0$, una solución no homogénea es $(2, 0, 0)$ y la solución general es $(2, 0, 0) + x_3(-\frac{1}{7}, -\frac{4}{7}, 1)$; x_3 arbitraria.

21. Si $x_3 = x_4 = 0$, una solución no homogénea es $(-1, 4, 0, 0)$ y la solución general es $(-1, 4, 0, 0) + x_3(-3, 4, 1, 0) + x_4(5, -7, 0, 1)$.

23. $(c_1y_1 + c_2y_2)''$
$+ a(x)(c_1y_1 + c_2y_2)'$
$+ b(x)(c_1y_1 + c_2y_2)$
$= c_1y_1'' + c_2y_2'' + a(x)c_1y_1'$
$+ a(x)c_2y_2' + b(x)c_1y_1 + b(x)c_2y_2$
$= c_1(y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1)$
$+ c_2(y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2)$
$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$, ya que y_1 y y_2 son solución de (7).

MATLAB 1.7

1. Para el inciso b), $x_1 = -2x_3 + x_4 + 5$ y $x_2 = -x_3 - x_4 - 1$; un ejemplo de solución, seleccionando $x_3 = -1$ y $x_4 = -2$, es **x** = **[1;0;1;–2]**. Debe encontrarse que $A\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{b}$, lo que ilustra que **x** es una solución al sistema de ecuaciones cuya matriz aumentada es $[A \;\; \mathbf{b}]$, entonces $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y **b** es una combinación lineal de las columnas de A donde los coeficientes en la combinación lineal son las componentes de **x**.

3. Para verificar que un vector **w** es una solución, demuestre que $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$.

5. **a.** Sea $x_3 = 1$ en la solución $x_1 = -x_3$, $x_2 = 2x_3$, $x_4 = 0$ conduce a

$\mathbf{0} = x_1(\text{col } 1) + x_2(\text{col } 2) + x_3(\text{col } 3) + x_4(\text{col } 4) = -(\text{col } 1) + 2(\text{col } 2) + (\text{col } 3)$,

lo que a su vez lleva a col 3 = (col 1) – 2(col 2).

b. La solución es $x_1 = -2x_3 + x_4$ y $x_2 = -x_3 - x_4$. Haciendo $x_3 = 1$ y $x_4 = 0$ se tiene col 3 = 2(col 1) + (col 2). Haciendo $x_3 = 0$ y $x_4 = 1$ se tiene col 4 = – (col 1) + (col 2).

Problemas 1.8, página 112

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. No invertible

7. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

9. No invertible

11. No invertible

13. $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

17. $(A_1A_2\cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1}A_{m-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$ desde $(A_m^{-1}A_{m-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1})(A_1A_2\cdots A_{m-1}A_m) = (A_m^{-1}A_{m-1}^{-1}\cdots A_2^{-1})(A_1^{-1}A_1) \times A_2\cdots A_{m-1}A_m = (A_m^{-1}A_{m-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}) \times (A_2\cdots A_{m-1}A_m) = \cdots = I$.

19. $A^{-1} = \dfrac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \times \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$. Si $A = \pm I$, entonces $A^{-1} = A$. Si $a_{11} = -a_{22}$ y $a_{21}a_{12} = 1 - a_{11}^2$. Entonces $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = -a_{11}^2 - (1 - a_{11}^2) = -1$. Así,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

21. El sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene un número infinito de soluciones (por el teorema 1.4.1). Pero si $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, del teorema 6 [partes i) y ii)], AB no es invertible.

23. $\begin{pmatrix} \text{sen } \theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es su propia inversa (ya que $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$).

25. Si la i-ésima componente diagonal es 0, entonces en la reducción por renglones de A el renglón i es cero de manera que, por la afirmación en el

paso 3b), página 103, A es no invertible. De otra manera, si

$$A = \text{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

entonces

$$A^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)$$

27. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{30} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{15} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

29. Se demuestra el resultado para el caso de que A sea triangular superior. La demostración para una triangular inferior es similar. Considere el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suponga que $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ son todas diferentes de cero. La última ecuación en el sistema homogéneo es $a_{nn}x_n = 0$, y como $a_{nn} \neq 0$, $x_n = 0$. La penúltima ecuación es

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = 0$$

y $a_{n-1,n-1} \neq 0$, $x_n = 0$ implica que $x_{n-1} = 0$. De manera similar, se concluye que $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = x_n = 0$, por lo que la única solución al sistema homogéneo es la trivial. Por el teorema 6 [partes **i**) y **ii**)], A es invertible. Inversamente, suponga que una de las componentes de la diagonal, digamos a_{11}, es igual a 0. Entonces el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene la solución

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

[Si $a_{jj} = 0$ con $j \neq 1$, entonces se elige $\mathbf{x}$ como el vector con un 1 en la posición j y 0 en cualquier otra parte.] Usando el teorema 6 otra vez, se concluye que A no es invertible.

31. Cualquier múltiplo de (1, 2) diferente de cero.

33. 3 sillas y 2 mesas

35. 4 unidades de A y 5 unidades de B

37. **a.** $A = \begin{pmatrix} 0.293 & 0 & 0 \\ 0.014 & 0.207 & 0.017 \\ 0.044 & 0.010 & 0.216 \end{pmatrix}$;

$I - A$

$= \begin{pmatrix} 0.707 & 0 & 0 \\ -0.014 & 0.793 & -0.017 \\ -0.044 & -0.010 & 0.784 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 18\ 689 \\ 22\ 598 \\ 3\ 615 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; sí

40. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; sí

43. $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; no

45. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; no

49. $\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$

En los problemas 51 al 55 las respuestas están dadas con cuatro cifras decimales.

51. $\begin{pmatrix} -1.4075 & 0.4560 & 0.3034 \\ 0.6571 & -0.1670 & -0.1544 \\ 0.4399 & -0.2675 & -0.0323 \end{pmatrix}$

53. $\begin{pmatrix} 0.0398 & 0.0095 & 0.0352 & 0.0106 \\ -0.0037 & 0.0043 & 0.0004 & -0.0056 \\ 0.0183 & 0.0094 & 0.0085 & 0.0030 \\ 0.0194 & 0.0070 & 0.0255 & 0.0158 \end{pmatrix}$

55. El inverso de la matriz dada es

$$\begin{pmatrix} 0.0433 & -0.1257 & -0.1964 & 0.1269 & 0.2034 \\ 0 & -0.0690 & -0.0671 & 0.0357 & 0.1133 \\ 0 & 0 & -0.0269 & 0.0191 & 0.0078 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0110 & -0.0032 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0213 \end{pmatrix}$$

MATLAB 1.8

1. Sea **S**=**R(:,[4 5 6])**, donde **R** se ajusta a la forma escalonada reducida por renglones. Debe tenerse que **A*S** = **S*A**, ambas iguales a la identidad y **S** debe coincidir con **inv(A)**. Se tiene que $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 54 & -23 & -7 \\ -16 & 7 & 2 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Para demostrar que A no es invertible, demuestre que la forma escalonada reducida por renglones no es igual a la identidad. *Sugerencia para demostración:* si $R_3 = 3R_1 + 5R_2$, ¿cuál será el resultado final de las siguientes operaciones con renglones: $R_3 \to R_3 - 3R_1$ seguida de $R_3 \to R_3 - 5R_2$?

5. a. Una matriz triangular superior es no invertible si un elemento de la diagonal es cero. Los elementos de la diagonal de la inversa de una matriz triangular superior son los inversos multiplicativos de los elementos de la diagonal de la matriz original. *Sugerencia para la demostración:* considere $[A \quad I]$. Si primero se realizan las operaciones con renglones para hacer unos en las posiciones pivote, ¿qué crea eso en la parte de la matriz aumentada correspondiente a I? Argumente por qué estas posiciones no cambian con las otras operaciones con renglones necesarias.

b. Todas las matrices de este tipo son no invertibles.

c. Para vectores **x** con elementos distintos, la matriz V asociada es invertible.

7. c. Los elementos de la inversa son grandes y se vuelven más grandes cuando f se hace más pequeño, es decir cuando la matriz se acerca a ser no invertible.

d. La exactitud empeora cuando la matriz se acerca a una no invertible ya que la solución calculada y la solución exacta tienen cada vez menos dígitos iguales.

9. Multiplicando por la derecha en efecto se calcula $(MA)A^{-1}$. El mensaje decodificado dice, "*Are you having fun*", es decir "te estás divirtiendo".

Problemas 1.9, página 124

1. $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$

11. $[(A+B)^t]_{ij} = (A+B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij}$. Así, la componente ij de $(A+B)^t$ es igual a la componente ij de A^t más la componente ij de B^t.

13. $(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$

15. Si A es de $m \times n$, entonces A^t es de $n \times m$ y AA^t es de $m \times m$. Además, $(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$.

17. Si A es triangular superior y $B = A^t$, entonces $b_{ij} = a_{ji} = 0$ si $j > i$. Por lo tanto, B es triangular inferior.

19. $(A+B)^t = A^t + B^t$
$= -A - B = -(A+B)$

21. $(AB)^t = B^tA^t = (-B)(-A)$
$= (-1)^2 BA = BA$

23. $[\frac{1}{2}(A - A^t)]^t = \frac{1}{2}(A^t - (A^t)^t)$
$= \frac{1}{2}(A^t - A)$
$= -[\frac{1}{2}(A - A^t)]$

25. ii) Nos dice que $a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$. Entonces

$$AA^t = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, del teorema 1.8.7, se ve que $A^t = A^{-1}$.

27. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{15}{8} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

MATLAB 1.9

1. $(AB)^t = B^tA^t$.

3. B y G son simétricas; es decir, $b_{ij} = b_{ji}$ y $g_{ij} = g_{ji}$. C es antisimétrica; es decir, $c_{ij} = -c_{ji}$.

Problemas 1.10, página 134

1. Sí; $R_1 \rightleftarrows R_2$

3. No [se usan dos operaciones: $R_1 \rightleftarrows R_2$ seguida de $R_2 \to R_2 + R_1$]

5. No [se usan dos operaciones: $R_1 \to 3R_1$ y $R_2 \to 3R_2$]

7. No [se usan dos operaciones: $R_1 \rightleftarrows R_3$ seguida de $R_1 \rightleftarrows R_2$]

9. Sí, $R_2 \to R_2 + 2R_1$

11. No [se usan dos operaciones: $R_2 \to R_2 + R_1$ y $R_4 \to R_4 + R_3$]

13. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **19.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ **23.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **27.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **33.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

41. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

49. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; las primeras dos matrices son elementales porque $a \neq 0$ y $c \neq 0$

51. Los casos de 2×2 y 3×3 son los resultados de los problemas 49 y 50. En la respuesta al problema 1.8.29 se probó este resultado. Se puede dar otra prueba demostrando, como en los problemas 49 y 50, que A se puede escribir como el producto de matrices elementales. El paso clave es reducir A a I, observando que cuando se divide, sólo se hace entre los números en la diagonal, que son diferentes de cero por suposición.

53. A^t es triangular superior, de manera que $(A^t)^{-1}$ es triangular superior por el resultado del problema 52. Pero $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, de manera que $(A^{-1})^t$ es triangular superior, lo que significa que $A^{-1} = [(A^{-1})^t]^t$ es triangular inferior.

55. Sea $B = A_{ij}$ y $D = A_{ij}A$. Entonces la componente kr-ésima, d_{kr}, de D está dada por

$$d_{kr} = \sum_{l=1}^{n} b_{kl}a_{lr} \qquad (*)$$

Si $k \neq j$, el renglón k de B es el renglón k de la identidad, por lo que $b_{kl} = 1$ si $l = k$ y 0 de otra manera. Entonces

$$d_{kr} = b_{kk}a_{kr} = a_{kr} \quad \text{si } k \neq j$$

Si $k = j$, entonces

$$b_{jl} = \begin{cases} 1, & \text{si } l = j \\ c, & \text{si } l = i \\ 0, & \text{de otra manera} \end{cases}$$

y (*) se convierte en

$$\begin{aligned} a_{jr} &= b_{jj}a_{jr} + b_{ji}a_{ir} \\ &= a_{jr} + ca_{ir} \end{aligned}$$

Así, cada componente en el renglón j de $A_{ij}A$ es la suma de las componentes correspondientes en el renglón j de A y c veces las componentes correspondientes en el renglón i de A.

57. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

59. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

61. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

MATLAB 1.10

1. a. **i.** **F = eye(4); F(3,3) = 4**

ii. **F = eye(4); F(1,2) = –3**

iii. **F = eye(4); F([1 4],:) = F([4 1],:)**

b. **i.** La inversa es la identidad excepto por $\frac{1}{4}$ en la posición (3, 3).

ii. La inversa es la identidad excepto por 3 en la posición (1, 2).

iii. La inversa de F es la misma F.

3. a. Se da un ejemplo de programa. Algunos pasos pueden no ser necesarios para esta matriz en particular pero se incluyen para que sea completo.

```
U = A;
F1 = eye(3);
F1(2,1) = -U(2,1)/U(1,1),
U = F1*U
F2 = eye(3);
F2(3,1) = -U(3,1)/U(1,1),
U = F2*U
F3 = eye(3);
F3(3,2) = -U(3,2)/U(2,2),
U = F3*U
L = inv(F1)*inv(F2)*inv(F3)
```

$U =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz L es triangular inferior con unos en la diagonal. El elemento (1, 2) de L es el negativo

del elemento (1, 2) en $F1$ y contiene el negativo del primer multiplicador usado y su posición dice qué elemento se hizo cero. El elemento (1, 3) de L es el negativo del elemento (1, 3) de $F2$ y el elemento (3, 2) de L es el negativo del (3, 2) de $F3$.

d. $U=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 7.3333 & -8.3333 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 26.8182 \end{pmatrix}$

y

$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.3333 & 1 & 0 & 0 \\ 1.6667 & .5 & 1 & 0 \\ .6667 & .9091 & -7.9394 & 1 \end{pmatrix}$

El programa es similar excepto que las matrices elementales son de 4×4 y se necesitan más pasos en la reducción.

Problemas 1.11, página 152

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 33 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$

9. $(8, -5)$

11. $(\frac{23}{11}, \frac{3}{11})$

13. $(-\frac{63}{2}, 34, 5)$

15. $(\frac{71}{12}, -\frac{17}{12}, -\frac{7}{4}, -\frac{11}{24})$

17. **a.** $L=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $U=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b. $(-11, \frac{3}{2})$

19. **a.** $L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$ $U=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b. $(-\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7})$

21. **a.** $L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{8}{7} & 1 \end{pmatrix}$

$U=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{81}{7} \end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. $(-\frac{73}{162}, \frac{4}{81}, \frac{37}{54}, -\frac{7}{162})$

23. **a.** $L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

$U=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 5 & -10 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b. $(12, \frac{13}{2}, 7, -2)$

25. Sea $C = AB$, donde A y B son matrices triangulares superiores de $n \times n$. Por la definición de matriz triangular superior, $a_{ij} = 0$ si $i > j$. Similarmente,

$b_{ij} = 0$ si $i > j$. Suponga $i > j$. Entonces

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Si $k > j$, entonces $b_{kj} = 0$, de manera que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{j} a_{ik} b_{kj}$$

Pero para $1 \le k \le j$, $i > k$ y así $a_{ik} = 0$, lo que significa que $c_{ij} = 0$ para $i > j$ y C es triangular superior.

27. La matriz se puede factorizar como LU, donde

$$U = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -\frac{22}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & c & 1 \end{pmatrix}$$

donde c puede ser cualquier número real.

29. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donde c es cualquier número real.

33. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{17}{7} & \frac{44}{7} & \frac{61}{7} \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{27}{22} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{6}{11} & \frac{1}{7} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{10}{11} & -\frac{5}{21} & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{22}{5} & \frac{31}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{43}{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Nota: La TI-85 proporciona una U con unos en la diagonal; la L que da no tiene unos en la diagonal. Por lo tanto, en las respuestas a los problemas 39, 41 y 43 se dan dos respuestas: la primera es una L con unos en la diagonal; la segunda es la respuesta dada en la TI-85.

39. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix}$

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1.6667 & 8.5 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{17}{2} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & .3333 & 2.3333 \\ 0 & 1 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

41. $L =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3125 & -0.6518 & 1 & 0 \\ 0.125 & 0.0536 & -0.1945 & 1 \end{pmatrix}$$

$L =$

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 4.5625 & 8.1696 & 0 \\ 2 & -.3750 & -1.5893 & 2.9760 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 16 & -5 & 11 & 8 \\ 0 & -7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 8.1696 & 0.1518 \\ 0 & 0 & 0 & 2.976 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -.3125 & .6875 & .5 \\ 0 & 1 & -.5714 & -.1429 \\ 0 & 0 & 1 & .0186 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

43. $L =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9121 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5055 & -0.0725 & 1 & 0 \\ 0.2308 & 0.5336 & 0.3372 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} .91 & 0 & 0 & 0 \\ .83 & .5002 & 0 & 0 \\ .46 & -.0363 & .1892 & 0 \\ .21 & .2669 & .0638 & .0495 \end{pmatrix}$$

$U =$

$$\begin{pmatrix} 0.91 & 0.23 & 0.16 & -0.2 \\ 0 & 0.5002 & -0.8259 & 0.9524 \\ 0 & 0 & 0.1892 & -0.4199 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0495 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & .2527 & .1758 & -.2198 \\ 0 & 1 & -1.6511 & 1.9040 \\ 0 & 0 & 1 & -2.2186 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MATLAB 1.11

1. El programa sería el mismo que en el problema 3a) de MATLAB 1.10:

$$U = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & -1.5 & -3 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.25 & 1 & 0 \\ .5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

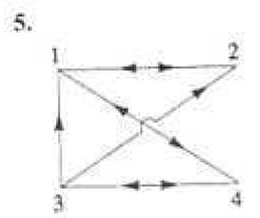
3. Consulte la interpretación en el problema 3 de MATLAB 1.10. El programa es muy similar excepto que se necesitan seis matrices elementales para completar la reducción y cada matriz elemental es de 4×4.

Problemas 1.12, página 163

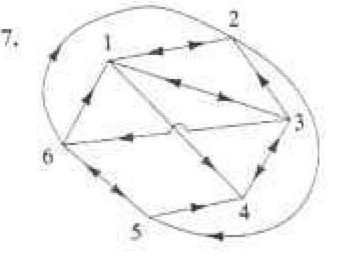
1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5.



7.



9. Existe una 2-cadena entre 12, 14, 21, 22, 25, 32, 33, 34, 35, 41, 43, 51, 54; dos 2-cadenas entre 23, 31, 42, 44; una 3-cadena entre 12, 13, 14, 15, 21, 23, 35, 51, 52, 55; dos 3-cadenas entre 11, 31, 34, 45, 53; tres 3-cadenas entre 22, 24, 32, 33, 42, 43, 44; cuatro 3-cadenas entre 41; una 4-cadenas entre 15, 51, 53; dos 4-cadenas entre 11, 14, 35; tres 4-cadenas entre 12, 13, 25, 45, 52, 54; cuatro 4-cadenas entre 22, 23, 24, 33; cinco 4-cadenas entre 31; seis 4-cadenas entre

21, 32, 34, 41, 44; siete 4-cadenas entre 43; ocho 4-cadenas entre 42.

11. Sea $B = A + A^2$. Entonces $(B)_{ij} = (A)_{ij} + (A^2)_{ij}$. Pero $(A)_{ij}$ es el número de trayectorias de un paso entre los vértices i y j, y $(A^2)_{ij}$ es el número de trayectorias de dos pasos entre los vértices i y j. Entonces $(B)_{ij}$ es el número total de trayectorias de uno y dos pasos entre los vértices i y j.

Capítulo 1. Repaso, página 168

1. $(\frac{1}{7}, \frac{10}{7})$ **3.** No hay solución

5. $(0, 0, 0)$ **7.** $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$

9. $(\frac{1}{2}x_3, \frac{3}{2}x_3, x_3)$, x_3 arbitraria

11. No hay solución

13. $(0, 0, 0, 0)$

15. $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 12 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 16 & 2 & 3 \\ -20 & 10 & -1 \\ -36 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 17 & 39 & 41 \\ 14 & 20 & 42 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 30 & 32 \end{pmatrix}$

23. Forma escalonada reducida por renglones

25. Ninguna

27. Forma escalonada por renglones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

forma escalonada reducida por renglones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

29. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; la inversa es

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

31. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; la inversa es

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

33. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; la inversa es

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

35. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$; A^{-1} está dada en el ejercicio 31:

$x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{9}{8}$, $x_3 = \frac{29}{8}$

37. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; ninguna

39. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & -5 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$; simétrica

41. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & -8 \\ 6 & 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$; simétrica

43. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

49. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

51. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

53. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

55. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}$;

$(\frac{26}{27}, -\frac{2}{9}, -\frac{29}{27})$

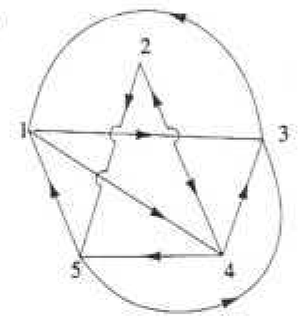
57. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$,

$U = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $(-47, 19, \frac{11}{2})$

59. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

61.



Capítulo 2

Problemas 2.1, página 182

1. -10, 3. 47 5. 4 7. 56

9. 274

11. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

y

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$.

Entonces $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$
$\det B = b_{11}b_{22}b_{33}\cdots b_{nn}$

$AB =$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} \det AB &= (a_{11}b_{11})(a_{22}b_{22}) \\ &\quad \times (a_{33}b_{33})\cdots(a_{nn}b_{nn}) \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}) \\ &\quad \times (b_{11}b_{22}b_{33}\cdots b_{nn}) \\ &= \det A \det B \end{aligned}$$

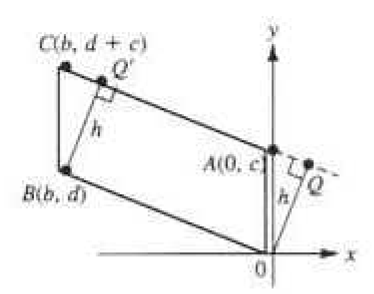
13. Casi cualquier ejemplo funcionará; uno es, $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, pero

$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$0 + 0 \neq 1$

Como otro ejemplo, sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$; entonces $(A + B) = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$, $\det A = -2$, $\det B = -2$ y $\det (A + B) = -8 \neq \det A + \det B$.

15. Suponga que $A = (0, c)$. La situación se describe en la figura.



La base del paralelogramo es $\overline{AC} = \sqrt{b^2 + d^2}$. La pendiente de AC es $\frac{d}{b}$, por lo que la pendiente de $BQ' = -\frac{b}{d}$ y la ecuación de la recta que pasa por 0 y Q es $y = -\frac{b}{d}x$. La ecuación de la recta AC es $y = c + \frac{d}{b}x$. Q es el punto de intersección de estas rectas y es

$$\left(\frac{d(-bc)}{b^2 + d^2}, \frac{-b(-bc)}{b^2 + d^2}\right)$$

$$= \left(\frac{d \det A}{b^2 + d^2}, -\frac{b \det A}{b^2 + d^2}\right)$$

Entonces $h = \overline{0Q} = \frac{|\det A|}{\sqrt{b^2 + d^2}}$, entonces base × altura $= \overline{AC} \times \overline{0Q} = |\det A|$.

Una prueba similar funciona para el caso $A = (a, 0)$.

17. 40,954

19. $1.91524617423 \times 10^{14}$

MATLAB 2.1

1. A es invertible si $\det(A) \neq 0$ y es no invertible si $\det(A) = 0$. Las matrices construidas en el inciso bii) nunca son invertibles y los determinantes serán cero (considere que los números muy pequeños son cero debido a errores de redondeo).

3. $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

5. $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$. *Sugerencia:* use $AA^{-1} = I$ y saque determinantes en ambos lados.

7. **a.** $\det(M) = \det(A)\det(D)$
b. $\det(M) = \det(A)\det(D)\det(F)$.

Problemas 2.2, página 200

1. 28 **3.** 2 **5.** 32 **7.** −36

9. −260 **11.** −183 **13.** 24

15. −296 **17.** 138

19. *abcde* **21.** −8 **23.** 16

25. −16 **27.** −16

29. Prueba por inducción: cierto para $n = 2$ ya que

$$\begin{vmatrix} 1 + x_1 & x_2 \\ x_1 & 1 + x_2 \end{vmatrix}$$
$$= (1 + x_1)(1 + x_2) - x_1x_2$$
$$= 1 + x_1 + x_2$$

Se supone cierto para $n = k$. Es decir,

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_k \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_k \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_k \end{vmatrix}$$

$$= 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k$$

Entonces para $n = k + 1$,

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_k & x_{k+1} \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_k & x_{k+1} \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_k & x_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_k & 1+x_{k+1} \end{vmatrix}$$

(usando la propiedad 3 en la primera columna)

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_k & x_{k+1} \\ 0 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_k & x_{k+1} \\ 0 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_k & x_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2 & x_3 & \cdots & x_k & 1+x_{k+1} \end{vmatrix} \; ①$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_k & x_{k+1} \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_k & x_{k+1} \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_k & x_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_k & 1+x_{k+1} \end{vmatrix} \; ②$$

Pero expandiendo det ① en su primera columna se tiene

$$\det ① = \begin{vmatrix} 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_k & x_{k+1} \\ x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_k & x_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_k & 1+x_{k+1} \end{vmatrix}$$

$$= 1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1}$$

por la hipótesis de inducción (ya que ① es un determinante de $k \times k$). Para evaluar det ②, reste el primer renglón de todos los demás:

$$\det ② = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_k & x_{k+1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_1$$

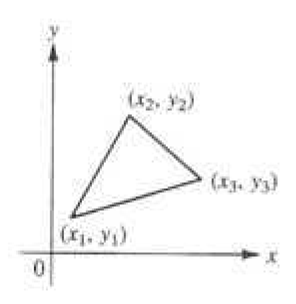
Sumando det ① y det ② se completa la demostración.

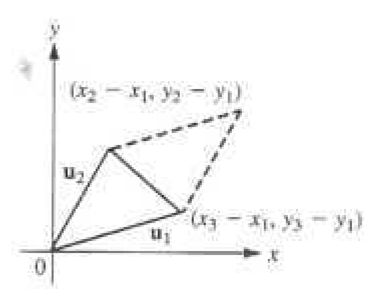
31. Si n es impar, $\det A = -\det A$, por lo que $2 \det A = 0$ y $\det A = 0$.

33. $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

Observe las figuras siguientes.





El área A del triángulo es la mitad del área del paralelogramo generado por los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ que, por el resul-

tado del problema 2.1.16, está dada por

$$A = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

35. $$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ a_1^2 & a_2^2 - a_1^2 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ (a_2 + a_1)(a_2 - a_1) & (a_3 - a_1)(a_3 - a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 + a_1 & a_3 + a_1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \times (a_3 - a_2)$$

37. a. $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

b. Se prueba esto por inducción. El resultado es cierto para $n = 3$ por el resultado del problema 35. Se supone cierto para $n = k$. Ahora

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k & a_{k+1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_k^2 & a_{k+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \cdots & a_k^{k-1} & a_{k+1}^{k-1} \\ a_1^k & a_2^k & \cdots & a_k^k & a_{k+1}^k \end{vmatrix}$$

Se resta la primera columna de las otras k columnas:

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 - a_1 & \cdots & a_k - a_1 & a_{k+1} - a_1 \\ a_1^2 & a_2^2 - a_1^2 & \cdots & a_k^2 - a_1^2 & a_{k+1}^2 - a_1^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} - a_1^{k-1} & \cdots & a_k^{k-1} - a_1^{k-1} & a_{k+1}^{k-1} - a_1^{k-1} \\ a_1^k & a_2^k - a_1^k & \cdots & a_k^k - a_1^k & a_{k+1}^k - a_1^k \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_k - a_1 & a_{k+1} - a_1 \\ a_2^2 - a_1^2 & a_3^2 - a_1^2 & \cdots & a_k^2 - a_1^2 & a_{k+1}^2 - a_1^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_2^{k-1} - a_1^{k-1} & a_3^{k-1} - a_1^{k-1} & \cdots & a_k^{k-1} - a_1^{k-1} & a_{k+1}^{k-1} - a_1^{k-1} \\ a_2^k - a_1^k & a_3^k - a_1^k & \cdots & a_k^k - a_1^k & a_{k+1}^k - a_1^k \end{vmatrix}$$

Ahora $a_2^k - a_1^k = (a_2 - a_1) \times (a_2^{k-1} + a_2^{k-2}a_1 + a_2^{k-3}a_1^2 + \cdots + a_2^2a_1^{k-3} + a_2a_1^{k-2} + a_1^{k-1})$ y $a_2^{k-1} - a_1^{k-1} = (a_2 - a_1) \times (a_2^{k-2} + a_2^{k-3}a_1 + \cdots + a_2^2a_1^{k-4} + a_2a_1^{k-3} + a_1^{k-2})$. Observe que si los términos en el segundo factor de la última expresión se multiplican por a_1 y después se restan del segundo factor de $a_2^k - a_1^k$, sólo queda el término a_2^{k-1}. Así, **i)** se expande el determinante anterior respecto al primer renglón, **ii)** se factoriza $a_{j+1} - a_1$ en la columna j, para $1 \le j \le k$ y **iii)** se multiplica el renglón l por a_1 y se resta del renglón $(l + 1)$, para $l = k - 1, k - 2, \ldots, 3, 2$ en secuencia. Esto lleva a $D_{k+1} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_{k+1} - a_1)$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_k & a_{k+1} \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_k^2 & a_{k+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_2^{k-1} & a_3^{k-1} & \cdots & a_k^{k-1} & a_{k+1}^{k-1} \\ a_2^k & a_3^k & \cdots & a_k^k & a_{k+1}^k \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{j=2}^{k+1} (a_j - a_1) \prod_{\substack{i=2 \\ j>i}}^{k+1} (a_j - a_i)$$

(de la hipótesis de inducción ya que el último determinante es $k \times k$)

$$= \prod_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{k+1} (a_j - a_i)$$

Esto completa la demostración.

39. **a.** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $k = 2$

b. $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $k = 3$

41. $\det A^2 = \det A \det A = \det A$. Si $\det A \neq 0$, entonces $\det A = 1$. La respuesta es 0 o 1.

43. Sea Q una matriz de permutación elemental de manera que Q se obtiene intercambiando dos renglones, el i y el j, de I. El renglón j de I tiene un 1 en la columna j, así que el renglón i de Q tiene un 1 en la columna j. Es decir, $Q_{ij} = 1$. Similarmente, $Q_{ji} = 1$. Entonces $Q_{ij} = Q_{ji}$. Las únicas componentes diferentes de cero de Q son los unos en la diagonal y las componentes de la diagonal se quedan igual cuando se obtiene la transpuesta. Así $Q^t = Q$. Ahora, si P es una matriz de permutación. Entonces

$$P = P_n P_{n-1} \cdots P_2 P_1$$

donde cada P_i es una matriz de permutación elemental. Entonces, por el teorema 1:

$\det P =$

$\det P_n \det P_{n-1} \cdots \det P_2 \det P_1 = (-1)^n$

por el resultado del problema 42. Además, por el teorema 1.9.1ii)

$$P^t = P_1^t P_2^t \cdots P_{n-1}^t P_n^t$$
$$= P_1 P_2 \cdots P_{n-1} P_n$$

Así P^t es una matriz de permutación y como antes,

$$\det P^t = (-1)^n = \det P$$

MATLAB 2.2

1. $\det(kA) = k^n \det(A)$, donde A es de $n \times n$. *Sugerencia:* en kA se multiplica cada uno de los n renglones de A por k.

Problemas 2.3, página 210

1. EB es la matriz obtenida al permutar dos renglones de B. Por la propiedad 4, $\det EB = -\det B$. Por el problema 2.2.42, $\det E = -1$. Entonces $-\det B = \det E \det B$.

3. EB es la matriz obtenida al multiplicar el renglón i de B por c. Por la propiedad 2, $\det EB = c \det B$. E es la matriz obtenida al multiplicar el renglón i de I por c. Entonces

$$\det E = c \det I = c \quad \text{y} \quad \det EB = c \det B = \det E \det B$$

Problemas 2.4, página 216

1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

9. No invertible

11. $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

13. Se deduce del hecho de que $\det A^t = \det A$.

15. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{1}{14} & \frac{9}{28} \\ -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{5}{28} \end{pmatrix}$,

$\det A = -28, \quad \det A^{-1} = -\frac{1}{28}$

17. No hay inversa si α es cualquier número real

19. Su determinante es $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$; su inversa es $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

MATLAB 2.4

1. Para $n < m$, es decir, más columnas que renglones, $\det(A^tA) = 0$ (o muy pequeño debido a errores de redondeo), así, A^tA es no invertible. Para $n > m$, es decir, más renglones que columnas, A^tA puede ser invertible.

3. Se tiene que la forma escalonada reducida por renglones de A es la identidad por lo que A es invertible, aunque, por construcción, está muy cerca de ser no invertible. Se tiene que $\det(A) = 6.55$, que no es cercano a cero.

Problemas 2.5, página 222

1. $x_1 = -5,\ x_2 = 3$

3. $x_1 = 2,\ x_2 = 5,\ x_3 = -3$

5. $x_1 = \frac{45}{11}, x_2 = -\frac{11}{11}, x_3 = \frac{23}{11}$

7. $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}$

9. $x_1 = \frac{21}{29}, x_2 = \frac{171}{29}, x_3 = -\frac{284}{29}, x_4 = -\frac{182}{29}$

MATLAB 2.5

1. He aquí un programa ejemplo para el inciso a):

```
d = det(A); C = A; C(:,1) = b;
                    x1 = det(C)/d
C = A; C(:,2) = b; x2 = det(C)/d
```

Continúe de esta manera y haga **x = [x1;x2;x3;x4;x5]**.

El conteo **flop** es mayor para la regla de Cramer que para el comando "\" (descomposición LU). La diferencia en el conteo de **flop** es aún mayor para matrices más grandes.

Capítulo 2. Repaso, página 225

1. −4 **3.** 24 **5.** 60 **7.** 34

9. $\begin{pmatrix} -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$

11. No invertible

13. $\begin{pmatrix} \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} & 0 & -\frac{8}{11} \\ \frac{5}{11} & \frac{3}{11} & 0 & -\frac{2}{11} \\ \frac{1}{22} & \frac{1}{22} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{22} \end{pmatrix}$

15. $x_1 = \frac{11}{7},\ x_2 = \frac{1}{5}$

17. $x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{5}{4},\ x_3 = -\frac{1}{4}$

Capítulo 3

Problemas 3.1, página 236

1. $|\mathbf{v}| = 4\sqrt{2},\ \theta = \pi/4$

3. $|\mathbf{v}| = 4\sqrt{2},\ \theta = 7\pi/4$

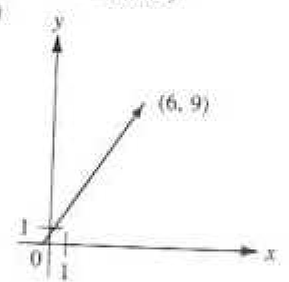
5. $|\mathbf{v}| = 2,\ \theta = \pi/6$

7. $|\mathbf{v}| = 2,\ \theta = 2\pi/3$

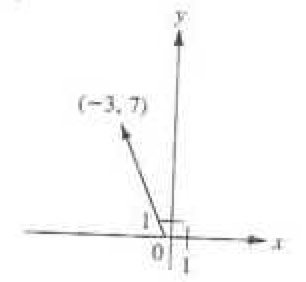
9. $|\mathbf{v}| = 2,\ \theta = 4\pi/3$

11. $|\mathbf{v}| = \sqrt{89},\ \theta = \pi + \tan^{-1}(-\frac{8}{5}) \approx 2.13$ (en el segundo cuadrante)

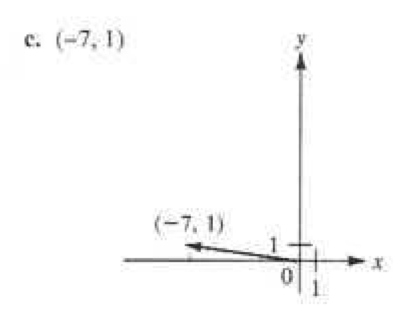
13. a. (6, 9)



b. (−3, 7)



c. $(-7, 1)$



d. $(39, -22)$

y
3
0
3
x
(39, −22)

15. $|\mathbf{i}| = |(1, 0)|$
$= \sqrt{1^2+0^2} = \sqrt{1} = 1;$
$|\mathbf{j}| = |(0, 1)|$
$= \sqrt{0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1$

17. $$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}} = 1$$

Dirección de $|\mathbf{u}| = \tan^{-1} \dfrac{\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} =$

$\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right) =$ dirección de $\mathbf{v}$.

19. $(1/\sqrt{2})\mathbf{i} - (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$

21. $(1/\sqrt{2})\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$ si $a > 0$;
$-(1/\sqrt{2})\mathbf{i} - (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$ si $a < 0$

23. $\operatorname{sen} \theta = -3/\sqrt{13}$,
$\cos \theta = 2/\sqrt{13}$

25. $-(1/\sqrt{2})\mathbf{i} - (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$

27. $\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$

29. **a.** $(1/\sqrt{2})\mathbf{i} - (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$
b. $(7/\sqrt{193})\mathbf{i} - (12/\sqrt{193})\mathbf{j}$
c. $-(2/\sqrt{53})\mathbf{i} + (7/\sqrt{53})\mathbf{j}$

31. $\overrightarrow{PQ}$ es una representación de $(c + a - c)\mathbf{i} + (d + b - d)\mathbf{j} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Entonces $\overrightarrow{PQ}$ y (a, b) son representaciones del mismo vector.

33. $4\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\,\mathbf{j}$ **35.** $-3\mathbf{i} + 3\sqrt{3}\,\mathbf{j}$

37. **i.** Suponga que $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ donde $\alpha > 0$. Entonces $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\alpha\mathbf{v} + \mathbf{v}| = |(\alpha + 1)\mathbf{v}| = |\alpha + 1|\,|\mathbf{v}| = (\alpha + 1)|\mathbf{v}|$ (ya que $\alpha + 1 > 0$) $= \alpha|\mathbf{v}| + |\mathbf{v}| = |\alpha\mathbf{v}| + |\mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

ii. Inversamente, suponga que $\mathbf{u} = (a, b)$, $\mathbf{v} = (c, d)$ y $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$. Entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a + c, b + d)$ y $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2$, lo que implica que

$$(a + c)^2 + (b + d)^2 = a^2 + b^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + c^2 + d^2$$

y después de multiplicar y cancelar los términos semejantes se obtiene $ac + bd = \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}$. Elevando al cuadrado ambos lados y de nuevo cancelando términos semejantes se obtiene $2abcd = a^2d^2 + b^2c^2$, o sea, $(ad - bc)^2 = a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 = 0$ de manera que $ad = bc$. Si $d \neq 0$, entonces $a = \dfrac{b}{d}c$, $b = \dfrac{b}{d}d$, y $|\mathbf{u}| = \left|\dfrac{b}{d}\right|\,|\mathbf{v}|$. Entonces

$$\left|\frac{b + d}{d}\right| |\mathbf{v}| = \left|\frac{b + d}{d}(c, d)\right|$$
$$= \left|\left(\frac{b}{d}c + c, \frac{b}{d}d + d\right)\right|$$
$$= |(a + c, b + d)| = |\mathbf{u} + \mathbf{v}| =$$
$$|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| = \left|\frac{b}{d}\mathbf{v}\right| + |\mathbf{v}| =$$
$$\left(\left|\frac{b}{d}\right| + 1\right)|\mathbf{v}| = \frac{|b| + |d|}{|d|}|\mathbf{v}|.$$

Así, $\left|\dfrac{b + d}{d}\right| = \dfrac{|b| + |d|}{|d|}$ de manera que $|b + d| = |b| + |d|$. Como b y d

son números reales, esto implica que b y d tienen el mismo signo por lo que $\frac{b}{d}$ es positivo. Así, si $\alpha = \left|\frac{b}{d}\right| = \frac{b}{d}$, entonces $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$. Si $d = 0$, entonces $c \neq 0$ y $\mathbf{u} = \frac{a}{c}\mathbf{v}$ por el mismo razonamiento donde $\frac{a}{c} > 0$. Por lo tanto, **u** es un múltiplo escalar positivo de **v**.

En las siguientes respuestas $|\mathbf{v}|$ está dada primero y la dirección está dada en radianes.

39. 2.99152034925; −0.952101203437

41. 2.99152034925; −2.18949145015

43. 114.738833879; −2.10075283072

45. 114.738833879; −1.04083982287

47. 0.086425871705; 1.40011222941

49. 0.086425871705; 1.74148042418

MATLAB 3.1

1. b. Se da un ejemplo de programa (para el problema 40) después de introducir el vector como **v**:

```
mag = sqrt(v'*v),
direc = atan(v(2)/v(1))+pi
deg = 180/pi*direc
```

Observe que para el problema 40 el vector **v** está en el segundo cuadrante, de ahí la necesidad de agregar π al ángulo de dirección. *Problema 38:* magnitud = 2.9915, dirección = .9521 radianes = 54.55°; *problema 40:* magnitud = 2.9915, dirección = 2.1895 radianes = 125.45°; *problema 42:* magnitud = 114.7388, dirección = 2.1008 radianes = 120.36°; *problema 44:* magnitud = 114.7388, dirección = 1.0408 radianes = 59.64°; *problema 46:* magnitud = 0.0864, dirección = −1.4001 radianes = −80.22°; *problema 48:* magnitud = .0864, dirección = 4.5417 radianes = 260.22°.

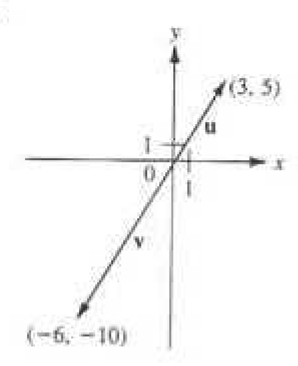
Problemas 3.2, página 247

1. 0; 0 **3.** 0; 0 **5.** 20; $\frac{20}{29}$

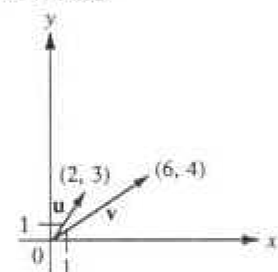
7. −22; $-22/5\sqrt{53}$

9. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \alpha\beta - \beta\alpha = 0$

11. Paralelos



13. Ninguno de los dos



15. Ortogonales

17. a. $-\frac{1}{4}$ **b.** $\frac{4}{5}$ **c.** $\frac{1}{7}$
d. $(-96 + \sqrt{7500})/78 \approx -0.12$

19. Si **u** y **v** tienen direcciones opuestas, entonces $\theta_u = \theta_v + \pi$. Por lo tanto, $\cos\theta_u = \cos(\theta_v + \pi) = -\cos\theta_v$.

Esto implica que $\cos\theta_u = \frac{3}{5} = -\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = -\cos\theta_v$, o sea, $\sqrt{1+\alpha^2} = -\frac{5}{3} < 0$, lo que es imposible ya que $\sqrt{1+\alpha^2} = |\mathbf{v}| \geq 0$.

21. $\frac{3}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}$ **23.** 0 **25.** $-\frac{2}{13}\mathbf{i} + \frac{3}{13}\mathbf{j}$

27. $[(\alpha+\beta)/2]\mathbf{i} + [(\alpha+\beta)/2]\mathbf{j}$

29. $[(\alpha-\beta)/2]\mathbf{i} + [(\alpha-\beta)/2]\mathbf{j}$

31. $a_1a_2 + b_1b_2 \geq 0$

33. $\text{Proy}_{\overrightarrow{PQ}}\, \overrightarrow{RS} = \frac{51}{25}\mathbf{i} + \frac{68}{25}\mathbf{j}$; $\text{Proy}_{\overrightarrow{RS}}\, \overrightarrow{PQ} = -\frac{17}{26}\mathbf{i} + \frac{85}{26}\mathbf{j}$

35. i. Si $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \alpha|\mathbf{v}|^2$, $|\mathbf{u}| = |\alpha|\,|\mathbf{v}|$ de manera que $\cos\varphi = \frac{\alpha|\mathbf{v}|^2}{|\alpha||\mathbf{v}||\mathbf{v}|} = \frac{\alpha}{|\alpha|} = \pm 1$.

ii. Suponga que **u** y **v** son paralelos. Entonces, si $\mathbf{u} = (a, b)$ y $\mathbf{v} = (c, d)$, se tiene que $1 = \cos^2\varphi = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2} = \frac{(ac+bd)^2}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$. Multiplicando y simplificando se obtiene $0 = a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2$. Así, $ad = bc$. Si $a \neq 0$, entonces $d = \left(\frac{c}{a}\right)b$ y $c = \left(\frac{c}{a}\right)a$, por lo que $\mathbf{v} = \left(\frac{c}{a}\right)\mathbf{u}$. Si $a = 0$, entonces $b \neq 0$ y $\mathbf{v} = \left(\frac{d}{b}\right)\mathbf{u}$.

37. La recta $ax + by + c = 0$ tiene pendiente $-\frac{a}{b}$. Un vector paralelo a esta recta es $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \frac{a}{b}\mathbf{j}$, y $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 1\cdot a - \frac{a}{b}\cdot b = 0$.

39. $52/5\sqrt{113} \approx 0.9783$; $61/\sqrt{34}\,\sqrt{113} \approx 0.9841$; $-27/5\sqrt{34} \approx -0.9261$

41. Si $a_1 = a_2 = 0$ o $b_1 = b_2 = 0$, ambos lados de la desigualdad son cero. Si al menos una entre a_1 y $a_2 \neq 0$ y al menos una entre b_1 y $b_2 \neq 0$, sea $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. Entonces $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \neq 0$ y $\left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}\right| = |\cos\varphi| \leq 1$. Entonces $|a_1b_1 + a_2b_2| = |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$. La igualdad se cumple cuando $|\cos\varphi| = 1$, lo que es cierto si y sólo si **u** y **v** son paralelos.

43. $\sqrt{5}$

45. Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$. Entonces $A^t = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$. Sea $\mathbf{u} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{v} = (b_1, b_2)$. Entonces $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, $|\mathbf{u}| = 1$ y $|\mathbf{v}| = 1$, $A^tA = \begin{pmatrix} a_1^2 + b_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 \\ a_2a_1 + b_2b_1 & a_2^2 + b_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\mathbf{u}|^2 & \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} & |\mathbf{v}|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Similarmente, $AA^t = I$. Por lo tanto, A es invertible y $A^{-1} = A^t$.

47. (−0.88449617907, 0.466547435114)

49. (−0.27075830549, −0.962647360152)

51. (−1.42889364286, −2.66927522328)

53. (−6164.36315451, 3523.92922513)

MATLAB 3.2

1. Si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, entonces dé **v = [a;b]**. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ **= p = ((u'*v)/(v'*v))*v**. *Problema 22:* $\mathbf{p} = -2.5(\mathbf{i}+\mathbf{j})$; *problema 24:* $\mathbf{p} = 2.5882\mathbf{i} + .6471\mathbf{j}$; *problema 26:* $\mathbf{p} = .7692\mathbf{i} + 1.1538\mathbf{j}$.

Problemas 3.3, página 258

1. $\sqrt{40}$ **3.** 6

5. 3; −1, 0, 0

7. $\sqrt{5}$; $1/\sqrt{5}$, 0, $2/\sqrt{5}$

9. $\sqrt{3}$; $1/\sqrt{3}$; $1/\sqrt{3}$; $-1/\sqrt{3}$

11. $\sqrt{3}$; $1/\sqrt{3}$, $-1/\sqrt{3}$; $-1/\sqrt{3}$

13. $\sqrt{3}$; $-1/\sqrt{3}$, $-1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$

15. $\sqrt{78}$; $2/\sqrt{78}$, $5/\sqrt{78}$, $-7/\sqrt{78}$

17. $\sqrt{29}$; $-2/\sqrt{29}$, $-3/\sqrt{29}$, $-4/\sqrt{29}$

19. $4\sqrt{3}\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\mathbf{j} + 4\sqrt{3}\mathbf{k}$

21. $(1/\sqrt{26})\mathbf{i} - (3/\sqrt{26})\mathbf{j} + (4/\sqrt{26})\mathbf{k}$

23. $R = (-3, y, z)$, y, z arbitrarias; este conjunto de puntos constituye un plano paralelo al plano yz.

25. $\left|\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}\right| = |\cos\varphi| \le 1$. Así, $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$. Entonces

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})\\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2\\ &\le |\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2\\ &= (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2\end{aligned}$$

27. $-6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ **29.** $8\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

31. $16\mathbf{i} + 29\mathbf{j} + 42\mathbf{k}$ **33.** $\sqrt{59}$

35. $\cos^{-1}(35/\sqrt{29}\,\sqrt{59})$
$\approx \cos^{-1}(0.8461)$
≈ 0.5621
$\approx 32.21°$

37. $\frac{25}{29}\mathbf{u} = \frac{50}{29}\mathbf{i} - \frac{75}{29}\mathbf{j} + \frac{100}{29}\mathbf{k}$

39. Como los segmentos de recta PS y SR son perpendiculares (en la figura 3.26), el triángulo PSR es un triángulo rectángulo y

$$\overline{PR}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{SR}^2 \qquad \text{(i)}$$

Pero el triángulo PRQ es también un triángulo rectángulo de manera que

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 \qquad \text{(ii)}$$

Combinando (i) y (ii) se obtiene

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{SR}^2 + \overline{RQ}^2 \qquad \text{(iii)}$$

Como las coordenadas x y z de P y S son iguales,

$$\overline{PS}^2 = (y_2 - y_1)^2 \qquad \text{(iv)}$$

De manera similar,

$$\overline{RS}^2 = (x_2 - x_1)^2 \qquad \text{(v)}$$

y $$\overline{RQ}^2 = (z_2 - z_1)^2 \qquad \text{(vi)}$$

Entonces, usando (iv), (v) y (vi) en (iii) se llega a

$$\overline{PQ}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

41. **i.** Si $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$, entonces $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} = \dfrac{\alpha|\mathbf{u}|^2}{|\alpha|\,|\mathbf{u}|^2} = \pm 1$. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos, entonces $\dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \pm\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ de manera que

$$\mathbf{v} = \pm\frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$$

ii. Si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, entonces $\cos\varphi = 0$ y $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$. Si $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, entonces $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\varphi = 0$

En los problemas 43 al 49 se da primero la magnitud.

43. 0.707129874917; (0.327521164379, 0.590980546606, −0.737205453328)

45. 85.2279883606; (0.20298496225, 0.91988560927, 0.335570515627)

47. (−18.3995893751, −16.8662902605, 11.1711792634)

49. (57.4451474781, 271.495923758, 310.507180628)

Problemas 3.4, página 270

1. $-6\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **3.** $-\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

5. $12\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 21\mathbf{k}$

7. $(bc - ad)\mathbf{j}$

9. $-5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ **11.** $\mathbf{0}$

13. $42\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

15. $-9\mathbf{i} + 39\mathbf{j} + 61\mathbf{k}$

17. $-4\mathbf{i} + 8\mathbf{k}$ **19.** $\mathbf{0}$

21. $\pm[-(9/\sqrt{181})\mathbf{i} - (6/\sqrt{181})\mathbf{j} + (8/\sqrt{181})\mathbf{k}]$

23. $\sqrt{30}/\sqrt{6}\sqrt{29} \approx 0.415$

25. $5\sqrt{5}$ **27.** $\sqrt{523}$

29. $\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$

31. Sea $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}$. Entonces $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{i} + (c_1a_2 - a_1c_2)\mathbf{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k}$

tal que $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2=(b_1c_2-c_1b_2)^2+(c_1a_2-a_1c_2)^2+(a_1b_2-b_1a_2)^2=b_1^2c_2^2-2b_1c_2c_1b_2+c_1^2b_2^2+c_1^2a_2^2-2c_1a_2a_1c_2+a_1^2c_2^2+a_1^2b_2^2-2a_1b_2b_1a_2+b_1^2a_2^2$. Esto es igual a $|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2=(a_1^2+b_1^2+c_1^2)\cdot(a_2^2+b_2^2+c_2^2)-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2$.

33. Sea $\mathbf{u}=a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}+c_1\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=a_2\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+c_2\mathbf{k}$ y $\mathbf{w}=a_3\mathbf{i}+b_3\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$. Entonces

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} &= [(b_1c_2-c_1b_2)\mathbf{i}\\ &\quad+(c_1a_2-a_1c_2)\mathbf{j}\\ &\quad+(a_1b_2-b_1a_2)\mathbf{k}]\\ &\quad\cdot[a_3\mathbf{i}+b_3\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}]\\ &= b_1c_2a_3-c_1b_2a_3\\ &\quad+c_1a_2b_3-a_1c_2b_3\\ &\quad+a_1b_2c_3-b_1a_2c_3\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) &= [a_1\mathbf{i}+b_1\mathbf{j}+c_1\mathbf{k}]\\ &\quad\cdot[(b_2c_3-c_2b_3)\mathbf{i}\\ &\quad+(c_2a_3-a_2c_3)\mathbf{j}\\ &\quad+(a_2b_3-b_2a_3)\mathbf{k}]\\ &= a_1b_2c_3-a_1c_2b_3\\ &\quad+b_1c_2a_3-b_1a_2c_3\\ &\quad+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3\end{aligned}$$

35. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos y ninguna es $\mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v}=t\mathbf{u}$ para alguna constante t. Entonces si $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$,

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ a&b&c\\ ta&tb&tc\end{vmatrix}$$

$=0$ por la propiedad 6 en la página 196

Inversamente, si $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$ y ni $\mathbf{u}$ ni $\mathbf{v}$ son $\mathbf{0}$, entonces por el teorema 3, sen $\varphi=|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|/|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|=0$, por lo que $\varphi=0$ o π y, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos.

37. 23

39. Este problema se basa fuertemente en la propiedad 3 de los determinantes que establece que si la columna (o renglón) i de un determinante consiste en un par de elementos, el determinante se puede rescribir como una suma de dos determinantes cuyas columnas (o renglones) son idénticos, excepto en la columna (renglón) i. El primer determinante contiene uno de los elementos del par, mientras que el otro miembro de cada par de elementos de la columna (renglón) i aparece en el segundo determinante. Observe además que el volumen generado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ está dado por

$$\text{Volumen}=\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\ v_1&v_2&v_3\\ w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}$$

Sea

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

$\mathbf{u}_1=A\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1=A\mathbf{v}$, $\mathbf{w}_1=A\mathbf{w}$

Entonces,

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}u_1+a_{12}u_2+a_{13}u_3\\ a_{21}u_1+a_{22}u_2+a_{23}u_3\\ a_{31}u_1+a_{32}u_2+a_{33}u_3\end{pmatrix}$$

De manera similar,

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}a_{11}v_1+a_{12}v_2+a_{13}v_3\\ a_{21}v_1+a_{22}v_2+a_{23}v_3\\ a_{31}v_1+a_{32}v_2+a_{33}v_3\end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{w}_1=\begin{pmatrix}a_{11}w_1+a_{12}w_2+a_{13}w_3\\ a_{21}w_1+a_{22}w_2+a_{23}w_3\\ a_{31}w_1+a_{32}w_2+a_{33}w_3\end{pmatrix}$$

Por el problema 36, el volumen generado por $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_1$ es

$$V = \begin{vmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 & a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 & a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 \\ a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 & a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 & a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3 \\ a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + a_{13}w_3 & a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + a_{23}w_3 & a_{31}w_1 + a_{32}w_2 + a_{33}w_3 \end{vmatrix}$$

Por expansión, se puede verificar que

$$V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

= (det A)(volumen generado por **u**, **v**, **w**), si det $A \geq 0$, de otra manera use $-$det A.

41. Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Entonces

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$= (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$;

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_2w_3 - v_3w_2 & v_3w_1 - v_1w_3 & v_1w_2 - v_2w_1 \end{vmatrix}$$

$= (-u_3v_3w_1 + u_3v_1w_3 + u_2v_1w_2 - u_2v_2w_1, u_3v_2w_3 - u_3v_3w_2 - u_1v_1w_2 + u_1v_2w_1, u_1v_3w_1 - u_1v_1w_3 - u_2v_2w_3 + u_2v_3w_2)(*)$

$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} = (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_1v_1w_1 + u_2v_1w_2 + u_3v_1w_3, u_1v_2w_1 + u_2v_2w_2 + u_3v_2w_3, u_1v_3w_1 + u_2v_3w_2 + u_3v_3w_3)$

$-(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} = -(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)(w_1, w_2, w_3) = (-u_1v_1w_1 - u_2v_2w_1 - u_3v_3w_1, -u_1v_1w_2 - u_2v_2w_2 - u_3v_3w_2, -u_1v_1w_3 - u_2v_2w_3 - u_3v_3w_3)$

Si se suman los dos últimos vectores, se obtiene el vector (*).

43. (0.294473, 0.676166, −0.547895)

45. (0.004852, 0.003952, −0.004704)

MATLAB 3.4

1. Sea **c** el producto cruz. Verifique sus respuestas demostrando que **c**'***u** y **c**'***v** son ambas 0. *Problema 2:* $\mathbf{c} = -7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$; *problema 4:* $\mathbf{c} = 7\mathbf{i}$; *problema 10:* $\mathbf{c} = -14\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$.

Problemas 3.5, página 281

En las respuestas a los problemas 1 al 5 se supone que el primer punto es P y el segundo Q. Las ecuaciones vectoriales son de la forma $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t\mathbf{v}$. Sólo **v** está dado en las respuestas.

1. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$; $x = 2 - t$, $y = 1 + t$, $z = 3 - 4t$; $(x - 2)/(-1) = y - 1 = (z - 3)/(-4)$

3. $\mathbf{v} = -\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; $x = -4$, $y = 1 - t$, $z = 3 - 2t$; $x = -4$ y $z = 1 + 2y$

5. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$; $x = 1 + 2t$, $y = 2$, $z = 3 - 2t$; $y = 2$ y $x = 4 - z$

En los problemas 7 al 11, **v** está dado.

7. $x = 2 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = 1 - t$; $(x - 2)/2 = (y - 2)/(-1) = (z - 1)/(-1)$

9. $x = -1$, $y = -2 - 3t$, $z = 5 + 7t$; $x = -1$ y $7y + 3z = 1$

11. $x = a + dt$, $y = b + et$, $z = c$; $(x - a)/d = (y - b)/e$ y $z = c$

13. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; $x = 4 + 3t$, $y = 1 + 6t$, $z = -6 + 2t$; $(x - 4)/3 = (y - 1)/6 = (z + 6)/2$

15. El vector $\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$ es paralelo a L_1, mientras que el vector $\mathbf{v}_2 = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}$ es paralelo a L_2. Así, $L_1 \perp L_2$ si $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$ o $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Pero $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$.

17. $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k} = 3(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$, por lo que los vectores directores de las rectas son paralelos. Observe que no son coincidentes ya que, por ejemplo, el punto $(1, -3, -3)$ está sobre L_1 pero no sobre L_2.

19. Si tuvieran un punto en común, se tendría

$$\begin{aligned} 2 - t &= 1 + s \\ 1 + t &= -2s \\ -2t &= 3 + 2s \end{aligned}$$

La solución única de las primeras dos ecuaciones es $s = -2$, $t = 3$; pero este par no satisface la tercera ecuación.

21. **a.** $(\sqrt{186}/3)(t = \frac{1}{3})$
b. $\sqrt{1518}/11 = \sqrt{138/11}$, $(t = -\frac{4}{11})$
c. $\sqrt{30}/2$ $(t = -\frac{3}{2})$

23. $(x + 4)/26 = (y - 7)/1 = (z - 3)/37$

25. $(x - 4)/(-4) = (y - 6)/16 = z/24$

27. 3 **29.** $y = 0$ (plano xz)

31. $x + y = 3$ **33.** $y + z = 5$

35. $-3x - 4y + z = 45$

37. $2x - 7y - 8z = -20$

39. $-12x - 21y + 22z = 63$

41. $2x + y = 7$ **43.** Coincidentes

45. Ninguna de las anteriores.

47. $(x, y, z) = (-1, -3, 0) + t(1, 2, 1)$

49. $(x, y, z) = (-11/4, -3/2, 0) + t(9, 16, 2)$

51. $13/\sqrt{69}$ **53.** $19/\sqrt{35}$

55. $\cos^{-1}(9/\sqrt{3}\sqrt{29}) = \cos^{-1}(0.9649) \approx 0.2657 \approx 15.23°$

57. $\cos^{-1}(20/\sqrt{294}\sqrt{6}) = \cos^{-1}(\frac{20}{42}) \approx 1.074 \approx 61.56°$

59. $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Si $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$, entonces $\mathbf{u} \perp \mathbf{n}$, lo que significa que $\mathbf{u}$ está en el plano determinado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

61. Coplanar; $29x - y + 11z = 0$

63. No coplanar; $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -9$.

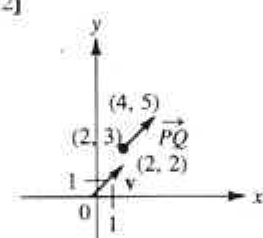
Capítulo 3. Repaso, página 288

1. $|\mathbf{v}| = 3\sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$

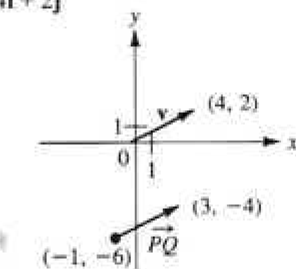
3. $|\mathbf{v}| = 4$, $\theta = 5\pi/3$

5. $|\mathbf{v}| = 12\sqrt{2}$, $\theta = 5\pi/4$

7. $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$



9. $4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$



11. **a.** $(10, 5)$, **b.** $(5, -3)$, **c.** $(-31, 12)$

13. $(1/\sqrt{2})\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$

15. $(2/\sqrt{29})\mathbf{i} + (5/\sqrt{29})\mathbf{j}$ **17.** $\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$

19. $(1/\sqrt{2})\mathbf{i} - (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$ si $a > 0$ y $-(1/\sqrt{2})\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$ si $a < 0$

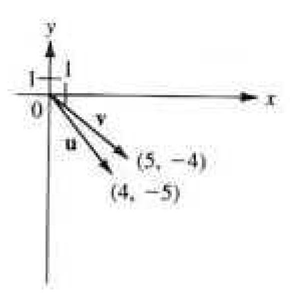
21. $-(5/\sqrt{29})\mathbf{i} - (2/\sqrt{29})\mathbf{j}$

23. $-(10/\sqrt{149})\mathbf{i} + (7/\sqrt{149})\mathbf{j}$

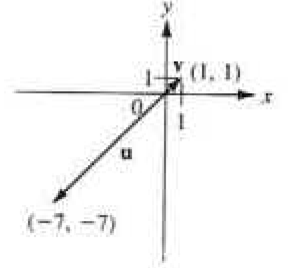
25. $\mathbf{j}$ **27.** $-\frac{7}{2}\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \frac{7}{2}\mathbf{j}$ **29.** 0; 0

31. -14, $-14/\sqrt{5}\sqrt{41}$

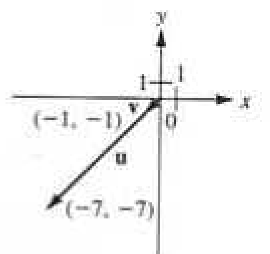
33. Ninguna



35. Paralelos



37. Paralelos



39. $7\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

41. $\frac{17}{13}\mathbf{i} + \frac{20}{13}\mathbf{j}$ **43.** $-\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j}$

45. $\text{Proy}_{\overrightarrow{RS}}\,\overrightarrow{PQ} = -\frac{29}{25}\mathbf{i} + \frac{132}{25}\mathbf{j}$;
$\text{Proy}_{\overrightarrow{PQ}}\,\overrightarrow{RS} = -\frac{71}{42}\mathbf{i} - \frac{207}{42}\mathbf{j}$

47. $\sqrt{216}$

49. $\sqrt{130}$; $0, 3/\sqrt{130}, 11/\sqrt{130}$

51. $\sqrt{53}$; $-4/\sqrt{53}, 1/\sqrt{53}, 6/\sqrt{53}$

53. $(2/\sqrt{6})\mathbf{i} - (1/\sqrt{6})\mathbf{j} + (1/\sqrt{6})\mathbf{k}$

55. $\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 20\mathbf{k}$

57. $\frac{25}{21}\mathbf{i} - \frac{32}{21}\mathbf{j} + \frac{11}{21}\mathbf{k}$ **59.** 22

61. $\cos^{-1}(-9/\sqrt{798}) \approx 1.895 \approx 108.6°$

63. $-7\mathbf{i} - 7\mathbf{k}$

65. $-26\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

67. $\sqrt{2065}$

69. $\overrightarrow{OR} = (-4\mathbf{i} + \mathbf{j}) + t(7\mathbf{i} - \mathbf{j} + 7\mathbf{k})$;
$x = -4 + 7t, y = 1 - t, z = 7t$;
$(x + 4)/7 = (y - 1)/(-1) = z/7$

71. $\overrightarrow{OR} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + t(5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$;
$x = 1 + 5t, y = -2 - 3t, z = -3 + 2t$;
$(x - 1)/5 = (y + 2)/(-3)$
$= (z + 3)/2$

73. $\sqrt{165}/3$ **75.** $x + z = -1$

77. $2x - 3y + 5z = 19$

79. $x = \frac{1}{2} - \frac{9}{2}t, y = \frac{3}{2} - \frac{11}{2}t, z = t$

81. $x = \frac{8}{5} - \frac{3}{5}t, y = -4 - \frac{2}{5}t, z = t$

83. $\cos^{-1}|-1/\sqrt{207}|$
$= \cos^{-1} 1/\sqrt{207}$
$\approx 1.501 \approx 86.01°$

Capítulo 4

Problemas 4.2, página 297

1. Sí

3. No; *iv*); tampoco *vi*) se cumple si $\alpha < 0$

5. Sí **7.** Sí

9. No *i*), *iii*), *iv*), *vi*) no se cumplen

11. Sí **13.** Sí

15. No; *i*), *iii*), *iv*), *vi*) no se cumplen

17. Sí **19.** Sí

21. Suponga que $\mathbf{0}$ y $\mathbf{0}'$ son identidades aditivas. Entonces, por definición de identidad aditiva, $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}'$ y $\mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}'$. Así, $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$.

23. Para $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ en V defina $\mathbf{z}$ como $\mathbf{z} = -\mathbf{x} + \mathbf{y}$. $\mathbf{z}$ existe ya que toda $\mathbf{x}$ tiene un inverso aditivo $-\mathbf{x}$ y V es una cerradura bajo la adición. Entonces $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (-\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}) + \mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{y} = \mathbf{y}$. Suponga que existen $\mathbf{z}$ y $\mathbf{z}'$ tales que $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{y}$ y $\mathbf{x} + \mathbf{z}' = \mathbf{y}$.
Entonces $\mathbf{z} = -\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z}'$. Por lo que $\mathbf{z}$ es única.

25. Sean y_1 y y_2 soluciones a la ecuación. Entonces

$$y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1(x) = 0$$

y

$y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2(x) = 0$

Entonces

$$(y_1 + y_2)'' + a(x)(y_1 + y_2)' + b(x)(y_1 + y_2)$$
$$= [y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1] + [y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2]$$
$$= 0 + 0 = 0$$

de manera que $y_1 + y_2$ es una solución. Similarmente, $(\alpha y_1)'' + a(x)(\alpha y_1') + b(x)(\alpha y) = \alpha[y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1] = \alpha \cdot 0 = 0$, con lo que αy_1 también es una solución, y la cerradura se cumple. Como $-y_1 = (-1)y$ también es una solución, se tiene el inverso aditivo. Es sencilla la deducción de los otros axiomas.

Problemas 4.3, página 303

1. No; porque $\alpha(x, y) \notin H$ si $\alpha < 0$
3. Sí 5. Sí 7. Sí
9. Sí 11. Sí 13. Sí
15. No; el polinomio cero $\notin H$
17. No; la función $f(x) = 0 \notin V$
19. Sí
21. **a.** Si $A_1, A_2 \in H_1$, entonces $(A_1 + A_2)_{11} = (A_1)_{11} + (A_2)_{11} = 0 + 0 = 0$ y $(\alpha A_1)_{11} = \alpha(A_1)_{11} = \alpha 0 = 0$, de manera que H_1 es un subespacio. Si $A_1, A_2 \in H_2$, entonces

$$A_1 = \begin{pmatrix} -b_1 & a_1 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -b_2 & a_2 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} -(b_1 + b_2) & (a_1 + a_2) \\ (a_1 + a_2) & (b_1 + b_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -c & d \\ d & c \end{pmatrix} \in H_2. \text{ Además,}$$

$$\alpha A_1 = \begin{pmatrix} -\alpha b_1 & \alpha a_1 \\ \alpha a_1 & \alpha b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -c & d \\ d & c \end{pmatrix} \in H_2$$

y por lo tanto H_2 también es un subespacio.

b. $H = H_1 \cap H_2 = \left\{A \in M_{22}: A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \text{ para algún escalar } a\right\}$. Si $A_1, A_2 \in H$, entonces $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \in H$ y $\alpha A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a_1 \\ \alpha a_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \in H$.

23. Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in H$, entonces, $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, de manera que $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in H$. Además, $A(\alpha\mathbf{x}_1) = \alpha A\mathbf{x}_1 = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ de manera que $\alpha\mathbf{x}_1 \in H$ y H es un subespacio.

25. Sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2, w_2) \in H$. Entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2)$ y $a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) + d(w_1 + w_2) = (ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1) + (ax_2 + by_2 + cz_2 + dw_2) = 0 + 0 = 0$, de manera que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$. Similarmente, $\alpha\mathbf{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1, \alpha w_1)$ y $a(\alpha x_1) + b(\alpha y_1) + c(\alpha z_1) + d(\alpha w_1) = \alpha(ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1) = \alpha 0 = 0$, de manera que $\alpha\mathbf{u} \in H$. Por lo tanto, H es un subespacio.

27. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$. Entonces $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{y} = \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2$, donde $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in H_1$ y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in H_2$. Entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$. Como H_1 y H_2 son subespacios, $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in H_1$ y $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in H_2$, de manera que $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in H$. De igual manera, $\alpha\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) = \alpha\mathbf{u}_1 + \alpha\mathbf{v}_1$. Pero $\alpha\mathbf{u}_1 \in H_1$ y $\alpha\mathbf{v}_1 \in H_2$, por lo que $\alpha\mathbf{x} \in H$ y H es un subespacio.

29. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. $\mathbf{v}_1$ no es un múltiplo de $\mathbf{v}_2$ ya que los vectores no son colineales. Sea $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$. Entonces $\det A = x_1y_2 - x_2y_1$. Si $\det A = 0$, entonces $x_1y_2 = x_2y_1$, o sea, $x_1/x_2 = y_1/y_2$ (si $x_2 = 0$ o $y_2 = 0$, se puede obtener una conclusión similar). Sea $c = x_1/x_2 = y_1/y_2$. Entonces $x_1 = cx_2$ y $y_1 = cy_2$, de manera que $\mathbf{v}_1 = c\mathbf{v}_2$ lo que contradice lo establecido. Así, $\det A \neq 0$. Sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cualquier otro vector en $\mathbb{R}^2$. Se quiere encontrar escalares a y b tales que $\mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$, o

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ ay_1 + by_2 \end{pmatrix}$$

o sea,

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

es decir,

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Como $\det A \neq 0$, este sistema tiene una solución única $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Entonces $\mathbf{v} \in H$, lo que muestra que $\mathbb{R}^2 \subset H$. Pero como $H \subset \mathbb{R}^2$, se tiene que

$$H = \mathbb{R}^2$$

MATLAB 4.3

1. Verifique que $\mathbf{S} - \mathbf{S}' = 0$. *Sugerencia:* use la definición para demostrar que una matriz W es simétrica; es decir, demuestre que $w_{ij} = w_{ji}$.

Problemas 4.4, página 310

1. Sí

3. No; por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin$ conjunto generado por los tres vectores $\left[\text{cada uno es múltiplo de } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

5. Sí **7.** Sí

9. No; por ejemplo $x \notin \text{gen}\,\{1 - x, 3 - x^2\}$

11. Sí **13.** Sí

15. Sea $p_i(x) = a_{0i} + a_{1i}x + \cdots + a_{ni}x^n$ para $i = 1, 2, \ldots, m$ y defina el vector

$$\mathbf{a}_i = (a_{0i}, a_{1i}, \ldots, a_{ni})$$

Elija un vector $\mathbf{b} = (b_0, \ldots, b_n)$ tal que $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, m$. Si $m < n + 1$, este último sistema de ecuaciones homogéneo siempre tiene una solución no trivial $\mathbf{b}$ (por el teorema 1.4.1). Suponga que $\mathbf{b}$ se puede expresar como $\mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_m\mathbf{a}_m$. Entonces $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b} + \alpha_2\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b} + \cdots + \alpha_m\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{b} = 0$. Pero $\mathbf{b} \neq 0$. Esta contradicción muestra que $\mathbf{b}$ no se puede escribir como una combinación lineal de las $\mathbf{a}_i$ si $m < n + 1$. Sea $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$. Entonces $q(x)$ no se puede escribir como una combinación lineal de las p_i y, por lo tanto, las p_i no son conjunto generador. Queda por concluir que $m \geq n + 1$.

17. Si $p(x) \in P$, entonces $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ para algún entero k. Entonces $p(x)$ se puede escribir como una combinación lineal de $1, x, x^2, \ldots, x^k$.

19. $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 = (\alpha + \beta c)\mathbf{v}_1$. Sea $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Entonces cualquier vector $\mathbf{v} = (x, y, z)$ en gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ se puede escribir como $(x, y, z) = ((\alpha + \beta c)x_1, (\alpha + \beta c)y_1, (\alpha + \beta c)z_1)$, es decir,

$$x = (\alpha + \beta c)x_1$$
$$y = (\alpha + \beta c)y_1$$
$$z = (\alpha + \beta c)z_1$$

que, de la sección 3.5, es la ecuación de una recta que pasa por $(0, 0, 0)$ con dirección (x_1, y_1, z_1).

21. Sea $\mathbf{v} \in V$. Entonces existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n + 0\mathbf{v}_{n+1}$. La última ecuación muestra que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}$ generan a V.

23. Sean $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{im})$ y $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{im})$. Además sean

$$\mathbf{w}_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \\ \vdots \\ v_{nj} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}_j = \begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{nj} \end{pmatrix}$$

y $A = (a_{ij})$. Entonces al escribir las componentes de las desigualdades dadas, se tiene

$$(*) \quad v_{ij} = a_{i1}u_{1j} + a_{i2}u_{2j} + \cdots + a_{in}u_{nj}$$

o

dado que $\det A \neq 0$ ↓

$\mathbf{w}_j = A\mathbf{z}_j$; de manera que $\mathbf{z}_j = A^{-1}\mathbf{w}_j$

Sea $A^{-1} = B = (b_{ij})$. Entonces la expresión para $\mathbf{z}_j$ se puede escribir como

$$u_{ij} = b_{i1}v_{1j} + b_{i2}v_{2j} + \cdots + b_{in}v_{nj}$$

Se ve que ésta es similar a la expresión (*) con u y v intercambiadas. Entonces

$$\mathbf{u}_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\mathbf{v}_k \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n$$

de manera que $\mathbf{u}_i \in$ gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Como se supuso que $\mathbf{v}_i \in$ gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, se concluye que los conjuntos generados son iguales.

MATLAB 4.4

3. a. i. El sistema de ecuaciones es

$$1 = 1c_1 - 1c_2 + 3c_3$$
$$-4 = 1c_1 + 1c_2 + 0c_3$$

La solución es c_3 arbitrario y $c_1 = -1.5 - 1.5c_3$ y $c_2 = -2.5 + 1.5c_3$.

ii. La solución es c_3 arbitraria y $c_1 = -2 - 3.2857c_3$ y $c_2 = 1 + .8571c_3$.

b. Para *i*), $\mathbf{w} = -1.5\mathbf{v}_1 - 2.5\mathbf{v}_2$, $\mathbf{w} = -4\mathbf{v}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{w} = -4\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$.

5. a. La razón es que la forma escalonada reducida por renglones de A no tiene renglones de ceros.

b. La forma escalonada reducida por renglones de A tiene un renglón de ceros, por lo que habrá alguna $\mathbf{w}$ para la que el sistema cuya matriz aumentada es $[A \quad \mathbf{w}]$ no tenga solución y, por lo tanto, $\mathbf{w}$ no será una combinación lineal de las columnas de A. Experimente para encontrar una $\mathbf{w}$ de este tipo por prueba y error, eligiendo valores para $\mathbf{w}$ y verificando si hay una solución.

7. a. La forma escalonada reducida por renglones no tiene renglones de ceros (por lo que la solución existe) y hay al menos una columna sin pivote, lo que implica que habrá una variable arbitraria en la solución.

b. Para la primera $\mathbf{w}$ dada se tiene $x_1 = 2 - x_4$, $x_2 = -1 + 2x_4$, $x_3 = 2 - x_4$ y $x_5 = 1$.
Así, $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_5$. Para la segunda $\mathbf{w}$ dada se tiene $x_1 = -3 - x_4$, $x_2 = 6 + 2x_4$, $x_3 = 1 - x_4$, y $x_5 = 1$. Entonces, $\mathbf{w} = -3\mathbf{v}_1 + 6\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_5$.

c. El cuarto vector no era necesario, lo que corresponde al hecho de que x_4 era la variable arbitraria natural.

d. Se tiene que $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Demuestre que la forma escalonada reducida por renglones de la matriz, cuyas columnas son los vectores en el subconjunto, no tie-

ne renglones de ceros y tiene un pivote en cada columna.

e. Los vectores no necesarios son el tercero y el quinto. El primero $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4$ y el segundo $\mathbf{w} = -1\mathbf{v}_1 + 7\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_4$; $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_5 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_4$.

9. b. El término constante de r es $2 \times$ (término constante de p) $- 3 \times$ (término constante de q) y esto se cumple para los coeficientes de los términos en x, x^2 y x^3.

c. Expresados como vectores de 3×1 se tiene

$$p = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{conjunto} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

p es una combinación lineal con $p = p_1 - p_2 + p_3$, donde p_i se refiere al i-ésimo polinomio en el conjunto. El conjunto de polinomios genera a todo P_2.

d. $p = 3p_1 + 2p_2 + p_3$; el conjunto no puede ser generador, por el problema 15.

e. Sí, ya que la forma escalonada reducida por renglones de la matriz, cuyas columnas son los vectores que representan los polinomios dados, no tiene renglones de ceros.

Problemas 4.5, página 328

1. Independiente

3. Dependiente;

$$-2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Dependiente (por el teorema 2)

7. Independiente

9. Independiente

11. Independiente

13. Independiente

15. Independiente

17. Dependiente

19. Independiente

21. Independiente

23. $ad - bc = 0$ **25.** $\alpha = -\frac{11}{7}$

27. El sistema (7) se puede escribir como

$$(*) \quad c_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si (7) tiene aunque sea una solución no trivial, entonces las columnas de A son linealmente dependientes. Si las columnas de A son dependientes, entonces existen números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos cero tales que (*).

29. Si $\mathbf{0} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$, entonces $\mathbf{0} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k + 0\mathbf{v}_{k+1} + 0\mathbf{v}_{k+2} + \cdots + 0\mathbf{v}_n$. Como $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son independientes, se tiene $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$.

31. Si $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, entonces $0 = \mathbf{0} \cdot \mathbf{v}_1 = (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3) \cdot \mathbf{v}_1 = c_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) + c_2(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1) + c_3(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1) = c_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + c_2 0 + c_3 0 = c_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1$. Como $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \neq 0$, de manera que debe tenerse $c_1 = 0$. Un cálculo similar muestra que $c_2 = c_3 = 0$.

33. $x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

35. $x_3\begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

37. $x_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

39. Cualquier vector **u** diferente de cero lleva a un resultado similar. Por ejemplo, sea **u** = (1, 0, 0); entonces **x** = (0, 1, 0) y **y** = (0, 0, 1) están en H. **w** = **x** × **y** = (1, 0, 0) = **u**.

e. H es un plano ortogonal a **u** y **w** es ortogonal a este plano y así, debe ser paralelo a **u**.

41. Sean $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ dos polinomios en P_2. Sea $r(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ un tercer polinomio en P_2. Si p y q generan a P_2, entonces existen escalares α y β tales que $r = \alpha p + \beta q$; esto es,

$$\begin{aligned} c_0 &= \alpha a_0 + \beta b_0 \\ c_1 &= \alpha a_1 + \beta b_1 \\ c_2 &= \alpha a_2 + \beta b_2 \end{aligned}$$

Este sistema "sobredeterminado" de tres ecuaciones con dos incógnitas tendrá una solución si y y sólo si la tercera ecuación es una combinación lineal de las dos primeras. Como c_0, c_1 y c_2 son arbitrarias, esto será cierto muy rara vez. Por lo tanto, p y q no pueden generar a P_2. Para ver esto de otra manera, suponga que $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ es una solución al sistema de ecuaciones. Entonces $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}$. Pero además, $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. En general, estas dos expresiones para $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ no serán iguales, lo que significa que, en general, el sistema no tiene solución.

43. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un subconjunto del conjunto linealmente independiente $T = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ con $k < n$. Suponga que S es dependiente. Entonces existen escalares no todos cero tales que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Esto muestra que T es dependiente, lo cual es una contradicción. Simplemente forme una combinación lineal de los vectores en T, usando c_j siempre que $\mathbf{v}_j \in S$ y 0 de otra manera.

45. Escriba las matrices como $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(mn+1)}$. Suponga que $A^{(l)} = (a_{ij}^{(l)})$. Considere el sistema

$$\begin{aligned} &a_{11}^{(1)}\alpha_1 + a_{11}^{(2)}\alpha_2 + \cdots \\ &\quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ &a_{mn}^{(1)}\alpha_1 + a_{mn}^{(2)}\alpha_2 + \cdots \\ &\qquad\qquad + a_{11}^{(mn+1)}\alpha_{mn+1} = 0 \\ &\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ &\qquad\qquad + a_{mn}^{(mn+1)}\alpha_{mn+1} = 0 \end{aligned}$$

Éste es un sistema homogéneo con mn ecuaciones y $mn + 1$ incógnitas. Por lo tanto, tiene una solución diferente de cero, y existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{mn+1}$ no todos cero tales que $\alpha_1A^{(1)} + \alpha_2A^{(2)} + \cdots + \alpha_{mn+1}A^{mn+1} = 0$ (la matriz cero de $m \times n$).

47. Suponga que $1, x, \ldots, x^k$ son linealmente independientes. Suponga que $c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k + c_{k+1}x^{k+1} = 0$. Si $c_{k+1} \neq 0$, entonces $x^{k+1} = -\frac{c_0}{c_{k+1}} - \frac{c_1}{c_{k+1}}x - \cdots - \frac{c_k}{c_{k+1}}x^k$, lo que es evidentemente imposible. Así, $c_{k+1} = 0$. Pero entonces $c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k = 0$, lo que implica que $c_0 = c_1 = \cdots = c_k = 0$ ya que $1, x, x^2, \ldots, x^k$ son linealmente independientes. Entonces $1, x, x^2, \ldots, x^k, x^{k+1}$ también son linealmente independientes y esto completa la demostración por inducción (vea el apéndice 1).

49. Existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ no todos cero tales que $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. Sea k el entero más grande para el cual $\alpha_k \neq 0$ (k puede ser igual a n). Entonces la ecuación queda $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ de manera que

$$\mathbf{v}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\mathbf{v}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\mathbf{v}_{k-1}$$

51. Suponga que f y g son dependientes. Entonces $g = cf$ y $g' = cf'$ para alguna constante c y

$$w(f, g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(x) & cf(x) \\ f'(x) & cf'(x) \end{vmatrix} = cf(x)f'(x) - cf(x)f'(x) = 0$$

53. Suponga que $c_1(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + c_2(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + c_3(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{0}$. Entonces $(c_1 + c_2)\mathbf{u} + (c_1 + c_3)\mathbf{v} + (c_2 + c_3)\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Como $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente independientes,

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \quad &= 0 \\ c_1 \quad + c_3 &= 0 \\ c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

El determinante de este sistema homogéneo es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

así, la única solución es $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ y los tres vectores son independientes.

55. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$, según el resultado del problema 2.2.35, página 203.

57. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. (Existen muchas posibilidades de elección para el tercer vector.)

59. **a.** Por el resultado del problema 3.5.59, página 285, $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$. De la parte iv) del teorema 2, página 263,

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$$

Sea $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0$$

y escribiendo los términos en cada producto escalar se obtiene el resultado deseado.

b. Piense en el sistema del inciso a) como un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas a, b y c. Como el sistema tiene soluciones no triviales, su determinante es 0.

c. Esto se deduce de a) ya que se tiene

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

pero a, b y c no son todas iguales a 0.

MATLAB 4.5

1. Los conjuntos son independientes para los problemas pares del 2 al 8 y son dependientes para los problemas 10 y 12.

3. Las columnas siempre serán dependientes en una matriz que tiene más columnas que renglones. *Sugerencia:* ¿qué puede decir sobre la localización de los pivotes en la forma escalonada reducida por renglones de tal matriz?

5. **a.** $A\mathbf{z}$ es una combinación lineal de las columnas de A.

b. Primero genere un vector aleatorio $\mathbf{z}$ del lado derecho y después haga $\mathbf{w} = A\mathbf{z}$, donde A es la matriz cuyas columnas son los vectores en el conjunto dado.

c. $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}\}$ es linealmente dependiente.

7. a. Las columnas sin pivote en la forma escalonada reducida por renglones corresponden a las columnas que se crearon como combinaciones lineales de otras columnas.

c. Las columnas de A son dependientes.

e. Alguna o algunas columnas de A son combinaciones de columnas anteriores de A.

f. *Sugerencia:* para el inciso c) rescriba la combinación lineal con **0** en un lado de la ecuación. Para el inciso e) suponga que $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, donde $a_k \neq 0$. Utilice esto para despejar $\mathbf{v}_k$.

9. a. La forma escalonada reducida por renglones, cuyas columnas son los vectores en el conjunto dado, tiene un pivote en cada columna pero tiene un renglón de ceros.

b. La forma escalonada reducida por renglones de la matriz, cuyas columnas son los vectores en el conjunto dado, no tiene renglones de ceros pero tiene al menos una columna sin pivote.

c. No.

11. *Problemas 13, 15 y 16:* el conjunto es independiente. *Problema 14:* el conjunto es dependiente y $3x + 5x^2 = -13(-x) + 5(x^2 - 2x)$. *Problema 17:* el conjunto es dependiente y $x^3 + 18x - 9 = 8.7273(2x) + 3.1818(x^3 - 3) + .5455(1 + x - 4x^3)$. (Los coeficientes exactos son $\frac{96}{11}$, $\frac{35}{11}$ y $\frac{6}{11}$.)

13. Sea A una matriz aleatoria del tamaño deseado. Encuentre **A(:)** y observe que crea la representación vectorial de A como se describió en MATLAB 4.4, problema 10. Pruebe la independencia o dependencia de los vectores. *Sugerencia:* las matrices en M_{mn} están representadas por vectores con mn componentes.

Problemas 4.6, página 344

1. No; no genera

3. No; dependiente

5. No; no genera

7. Sí **9.** sí

11. $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ **13.** $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$

15. Como dim $\mathbb{R}^2 = 2$, un subespacio propio H debe tener dimensión 1. Sea $\{(x_0, y_0)\}$ una base para H. Si $(x, y) \in H$, entonces $(x, y) = c(x_0, y_0)$ para algún número c. Esto significa que $x = cx_0$, $y = cy_0$ o $c = \dfrac{x}{x_0} = \dfrac{y}{y_0}$ y

$y = \left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)x$, que es la ecuación de una recta que pasa por el origen con pendiente $\dfrac{y_0}{x_0}$ si $x_0 \neq 0$. Si $x_0 = 0$, entonces la recta es el eje y.

17. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ una base para H. Sea $\mathbf{v}_n$ otro vector en H. Entonces los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes. Sea A la matriz cuyos renglones son $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n$. Entonces det $A = 0$ y la ecuación $A\mathbf{a} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Esto significa que $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. En particular, si $\mathbf{v}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces $\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$, es decir, $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$. Como $\mathbf{v}_n$ era un vector arbitrario en H, esto demuestra el resultado.

19. $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ **21.** $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

23. $\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ **25.** n

27. V tiene una base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, de manera que existen escalares tales que

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{12}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{u}_n\\ \mathbf{v}_2 &= a_{21}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{u}_n\\ &\vdots\\ \mathbf{v}_m &= a_{m1}\mathbf{u}_1 + a_{m2}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{u}_n\end{aligned}$$

Sea $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$. Las $\mathbf{a}_i$ son m vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ (de otra manera las $\mathbf{v}_i$ no serían independientes). Extienda las $\mathbf{a}_i$ a una base $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ para $\mathbb{R}^n$ agregando al conjunto $n - m$ vectores linealmente independientes. Entonces si $\mathbf{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$ para $m < k \le n$, definiendo $\mathbf{v}_k = a_{k1}\mathbf{u}_1 + a_{k2}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{kn}\mathbf{u}_n$ para $k = m+1, m+2, \ldots, n$. Como

$$\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \ne 0$$

el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ forma una base para V ya que consiste en n vectores linealmente independientes en V con $\dim V = n$.

29. Si los vectores son independientes, entonces forman una base y $\dim V = n$. Si no, entonces por el problema 4.5.49, al menos uno de ellos se puede escribir como combinación lineal de los que le preceden. Elimine este vector. Continúe de esta manera hasta que queden m vectores linealmente independientes. Éstos todavía deben generar V por la forma en que se eligieron. Por lo tanto, $\dim V = m < n$. En cualquier caso $\dim V \le n$.

31. **a.** Vea el problema 4.3.27.

b. Sea $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para H, y sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ una base para K. Es evidente que $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ genera a $H + K$. Suponga que $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n + \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \beta_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0}$, donde no todos los coeficientes son cero. Sea $\mathbf{h} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{k} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \beta_m\mathbf{u}_m$. Entonces por la independencia lineal, ni $\mathbf{h}$ ni $\mathbf{k}$ son el vector cero. Además, $\mathbf{h} \in H$ y $\mathbf{k} \in K$. Pero entonces $\mathbf{h} + \mathbf{k} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{h} = -\mathbf{k} \in K$. Así, $\mathbf{0} \ne \mathbf{h} \in H \cap K$, lo que contradice el hecho de que $H \cap K = \{\mathbf{0}\}$. Por lo tanto todos los coeficientes α y β son cero, lo que implica que los vectores en B son linealmente independientes. Entonces B es una base para $H + K$ y $\dim(H + K) = \dim H + \dim K$.

33. **i.** Si $\dim \text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = 1$, elija una base $\{\mathbf{v}\}$ para $\text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Entonces $\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}_2 = \beta\mathbf{v}$. Si $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v}_1$ es un solo punto que está en $\mathbf{v}_2$. Si $\mathbf{v}_1 \ne \mathbf{0}$, entonces $\alpha \ne 0$ de manera que $\mathbf{v}_2 = \beta\mathbf{v} = \frac{\beta}{\alpha}(\alpha\mathbf{v}) = \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{v}_1$. En cualquier caso, los vectores son colineales.

ii. Si los vectores son colineales, entonces $\mathbf{v}_2 = c\mathbf{v}_1$ para algún escalar c de manera que $\mathbf{v}_1$ es una base para $\text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $\dim \text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = 1$.

35. Si no son linealmente independientes, entonces, igual que en la respuesta al problema 29, $\dim V < n$. Como $\dim V = n$, los vectores deben ser independientes y por lo tanto constituyen una base para V.

37. $B_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$B_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Existe un número infinito de posibilidades.

MATLAB 4.6

1. La base necesita generar todo $\mathbb{R}^n$ y ser independiente. ¿Qué propiedades de la forma escalonada reducida por renglones de la matriz, cuyas columnas son los vectores de la base, reflejan cada una de estas propiedades de la base?

3. **a.** El nuevo conjunto no generará a todo $\mathbb{R}^n$.
   b. El nuevo conjunto no será independiente.
   c. *Sugerencia:* piense en las propiedades, de tener o no un renglón de ceros en la forma escalonada reducida por renglones y de tener o no un pivote en cada columna.

5. **b.** A es invertible si y sólo si las columnas de A forman una base.
   c. *Sugerencia:* A es invertible si y sólo si la forma escalonada reducida por renglones de A es la identidad. ¿Cómo se refleja esto en las propiedades de esta forma para concluir que las columnas de A forman una base para $\mathbb{R}^n$?

Problemas 4.7, página 360

1. $\rho = 2,\ \nu = 0$ 3. $\rho = 1,\ \nu = 2$
5. $\rho = 2,\ \nu = 1$ 7. $\rho = 2,\ \nu = 2$
9. $\rho = 2,\ \nu = 0$ 11. $\rho = 2,\ \nu = 2$
13. $\rho = 3,\ \nu = 1$ 15. $\rho = 2,\ \nu = 1$

17. Base de la imagen $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$; éstas son las primeras dos columnas de A.

    Base del espacio nulo $= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

19. Base de la imagen $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$; éstas son las primeras tres columnas (linealmente independientes) de A correspondientes a los pivotes en el forma escalonada reducida por renglones de la matriz.

    Base del espacio nulo $= \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

21. Base de la imagen $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

    base del espacio nulo =

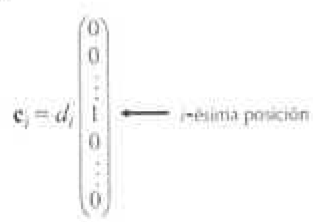
    $$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

23. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$

25. $\{(1, 0, 0, \frac{1}{2}), (0, 1, -1, \frac{3}{2}), (0, 0, 0, 1)\}$

27. No   29. Sí

31. Si $\mathbf{c}_i$ denota la columna i de D, entonces



    Así, los $\mathbf{c}_i$ son linealmente independientes cuando $d_i \neq 0$, y el número de columnas linealmente independientes es el rango.

33. $\rho(A^t)$ = dimensión del espacio de las columnas de A^t = dimensión del espacio de los renglones de A = dimensión del espacio de las columnas de A (por el teorema 4) = $\rho(A)$.

35. **i.** Sea H = imagen de A y sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ una base para H. Como B es invertible, $N_B = \{\mathbf{0}\}$, lo que significa que $\{B\mathbf{v}_1, B\mathbf{v}_2, \ldots, B\mathbf{v}_k\}$

es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^m$ y, por lo tanto, es una base para la imagen BA. Entonces $\rho(BA) = k = \rho(A)$.

ii. Como C es invertible, imagen $C = \mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{h} \in H$; entonces existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{h}$. Como imagen $C = \mathbb{R}^n$, existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que $C\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Entonces $AC\mathbf{y} = \mathbf{h}$. Así, $H \subset$ imagen AC. Si $\mathbf{v} \in$ imagen AC, existe $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $AC\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Pero entonces $\mathbf{v} = A(C\mathbf{u})$ de manera que $\mathbf{v} \in$ imagen $A = H$. Por lo tanto, imagen $AC \subset H$ de manera que imagen $AC = H$ y $\rho(A) = \rho(AC)$.

37. Como $\rho(A) = 5$, los cinco renglones de A son linealmente independientes. Entonces los cinco renglones de $(A, \mathbf{b})$ son linealmente independientes y $\rho(A, \mathbf{b}) = 5$.

39. Por el problema 35, $\rho(A) = \rho(AD) = \rho(C(AD)) = \rho(B)$.

41. **i.** Si existe una $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ de manera que $\nu(A) = \dim N_A \geq 1$ y $\rho(A) = n - \nu(A) \leq n - 1 < n$.

ii. Si $\rho(A) < n$, entonces $\nu(A) = n - \rho(A) > 0$ de manera que existe una $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

43. Suponga que B, la forma escalonada por renglones de A, tiene k pivotes en sus primeros k renglones. Como no hay otros pivotes, todos los elementos abajo de los primeros k renglones son cero. Sean $a_{1,m_1}, a_{2,m_2}, \ldots, a_{k,m_k}$ los pivotes; sean $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_k$ los primeros k renglones de B y suponga que $c_1\mathbf{r}_1 + c_2\mathbf{r}_2 + \cdots + c_k\mathbf{r}_k = \mathbf{0}$. Por definición de pivote, la componente m_1 en el vector $\mathbf{0} = c_1\mathbf{r}_1 + \cdots + c_k\mathbf{r}_k$ es $c_1 a_{1,m_1}$. Debido que $a_{1,m_1} \neq 0$, se concluye que $c_1 = 0$. La componente m_2 del vector es $c_1 a_{1_p} + c_2 a_{2,m_2}$ para algún valor $p > 1$. Como $c_1 = 0$ y $a_{2,m_2} \neq 0$, se concluye que $c_2 = 0$. Continuando de esta manera, se ve que $c_j = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, k$ por lo que los primeros k renglones de B son linealmente independientes. Como todos los demás renglones en la forma escalonada por renglones de A son cero, se concluye que $\rho(A) = k$.

Ahora suponga que $\rho(A) = k$. Sea B igual a la forma escalonada por renglones de A. Igual que antes, los primeros k renglones de B son linealmente independientes y todos los elementos abajo de los primeros k renglones son cero. El primer elemento diferente de cero en cada uno de los primeros k renglones de B es un pivote, ya que si no se habría hecho cero en la reducción por renglones de A a su forma escalonada por renglones. Así, B tiene k pivotes.

45. imagen $A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 187 \\ -35 \\ 257 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -46 \\ 51 \\ -148 \end{pmatrix}\right\}$;

$\rho(A) = 2$; $\nu(A) = 3$

47. imagen $A =$

$$\text{gen}\left\{\begin{pmatrix} .0284 \\ -0.5110 \\ -.0965 \\ .0795 \\ -.0110 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -.0311 \\ -.1216 \\ -.4270 \\ .0905 \\ -.3365 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -.0207 \\ -.1811 \\ -.5847 \\ .1604 \\ -.4243 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} .0431 \\ .0904 \\ .3574 \\ -.4730 \\ .3101 \end{pmatrix}\right\}$$

$\rho(A) = 4$, $\nu(A) = 1$

MATLAB 4.7

1. a. A continuación se dan las bases para los espacios nulos y sus respectivas dimensiones.

Problema 7: $\left\{\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ Dimensión = 2

Problema 8: $\left\{\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ Dimensión = 1

Problema 10: $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ Dimensión = 0

Problema 11: $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ Dimensión = 2

Problema 12: $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ Dimensión = 3

Problema 13: $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\-1.5\\1\end{pmatrix}\right\}$ Dimensión = 1

Problema vii): $\left\{\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Dimensión = 2

c. Al encontrar los vectores para la base, el proceso involucra escribir la solución como una combinación lineal de los vectores y los coeficientes de la combinación lineal son las variables arbitrarias.

d. La dimensión es igual al número de variables arbitrarias.

3. a. ii. Esta base para el espacio nulo tiene el mismo número de vectores que la base encontrada a partir de la forma escalonada reducida por renglones.

iii. Por ejemplo, **rref([B N])** resolverá el o los sistemas cuya matriz de coeficientes es B, donde las columnas de N son los lados derechos. Para la primera matriz en el problema 2 de MATLAB,

$$B = \begin{pmatrix}-2 & -1\\-3 & -1\\1 & 0\\0 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

Para la segunda matriz en el problema 2 de MATLAB, sea **R = rref(A)**. Entonces **B = [[–R(:,4);1;0] [–R(:,5);0;1]]**.

b. Sea **R = rref(A)** y **B = [[2;1;0;0;0] [–R(1,5);0; –R(2,5); –R(3,5);1]]**. Debe observar que todos los elementos en **A*N** están más cerca de cero, los valores verdaderos.

5. a. Demuestre que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b. Utilice **N = null(A)**.

c. Primero genere un vector aleatorio **z** de 2 × 1 (ya que la base contendrá dos vectores). Después haga $\mathbf{w} = N\mathbf{z}$ y demuestre que $A(\mathbf{x} + \mathbf{w}) = \mathbf{b}$.

7. a. Los renglones diferentes de cero de **rref(A')** proporcionan una base para el espacio de los renglones de A', así, sus transpuestas dan una base para el espacio de las columnas de A.

b. La matriz deseada será la transpuesta de los renglones diferentes de cero de la forma escalonada reducida por renglones de A'. Para verificar las combinaciones lineales, utilice la matriz descrita como la matriz de coeficientes y use A para los lados derechos. En seguida se muestran las matrices cuyas columnas forman una base para imagen A.

Problema 7: $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$

Problema 11: $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\2 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$

Problema 12: $\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\3\end{pmatrix}$

Problema 13: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

9. a. Consulte la sección 4.4.
b. Para *i*), la base consiste en las columnas 1 y 3 de A. Para *ii*) la base consiste en todas las columnas de A. Para iii), la base consiste en las columnas 1, 2 y 4 de A. Asegúrese de usar las columnas de A *no* de la forma escalonada reducida por renglones de A.
c. Para el problema 7, una base consiste en las columnas 1 y 2 de A. Para el problema 11, una base está formada por las columnas 1 y 2 de A. En el problema 12, una base consiste en la primera columna de A. En el problema 13, una base está formada por las columnas 1, 2 y 3 de A.

11. Sea O la matriz cuyas columnas forman una base obtenida al usar **orth** y sea B la matriz cuyas columnas forman una base a partir del problema 7 de MATLAB. Estas matrices tendrán el mismo número de columnas (es decir, cada base contiene el mismo número de vectores). Para verificar las combinaciones lineales, vea **rref([O B])** y **rref([B O])**.

13. e. El rango es igual al número de pivotes.
f. A es invertible si y sólo si rango(A) $= n =$ tamaño de A.
g. Para la matriz de 5×5, genere una matriz aleatoria de 5×5 y verifique que sea invertible. Si lo es, cambie tres columnas para que sean combinaciones lineales de las otras dos.

15. Para que exista una solución, la matriz aumentada tendrá el mismo rango que A. *Sugerencia:* piense en la localización de los pivotes en la forma escalonada reducida por renglones de la matriz aumentada y en la forma escalonada reducida por renglones de A.

17. a. El rango de AB es igual a k.
b. al d. La conclusión final debe ser que rango $(AB) \leq \min(\text{rango}(A), \text{rango}(B))$.

Problemas 4.8, página 382

1. $\frac{x+y}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{x-y}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

3. $\frac{4x+3y}{41}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}+\frac{7x-5y}{41}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

5. $\frac{dx-by}{ad-bc}\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+\frac{-cx+ay}{ad-bc}\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

7. $(x-y)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(y-z)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

9. $\frac{6x-11y+10z}{31}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\frac{2x+17y-7z}{31}\begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}+\frac{7x+13y-9z}{31}\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

11. $a_0+a_1x+a_2x^2 = (a_0+a_1+a_2)1 + a_1(x-1)+a_2(x^2-1)$

13. $a_0+a_1x+a_2x^2 = \frac{(a_0+a_1+a_2)}{2}(x+1) + \frac{(a_1-a_0+a_2)}{2}(x-1) + a_2(x^2-1)$

15. $2(x^3+x^2)-5(x^2+x) + 10(x+1)-16(1)$

17. $(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

19. $(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{80}{11} \\ -\frac{20}{11} \\ \frac{7}{11} \end{pmatrix}$

21. Independiente

23. Dependiente

25. Independiente

27. Independiente

29. Si fueran linealmente independientes, generarían a P_n. Pero $1 \in P_n$ y $1 \notin \text{gen}\,\{p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}\}$ ya que el término constante en cada polinomio es cero.

31. Si fueran linealmente independientes, generarían a M_{mn}. Pero la matriz $A = (a_{ij})$, donde $a_{11} = 1$ y $a_{ij} = 0$ de otra manera no está en el conjunto generado por $A_1, A_2, \ldots, A_{mn}$ ya que una combinación lineal de las matrices con un cero en la posición 1, 1 también tiene un 0 en la posición 1, 1.

33. $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\,\theta \end{pmatrix};$

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen}\,\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$

A^{-1} se obtiene rotando un ángulo de $-\theta$. Por lo tanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\text{sen}\,(-\theta) \\ \text{sen}\,(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

De manera alternativa, como

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

35. $A^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & \text{sen}\,(\pi/4) \\ -\text{sen}\,(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(del problema 33), por lo que

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/\sqrt{2} \\ -9/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

37. Como C es invertible, las columnas de C son linealmente independientes. Es decir, $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ son n vectores linealmente independientes en V que, por lo tanto, forman una base para V ya que $\dim V = n$.

39. Si $CA = I$, entonces $(\mathbf{x})_{B_1} = I(\mathbf{x})_{B_1} = CA(\mathbf{x})_{B_1}$. Inversamente, suponga que $(\mathbf{x})_{B_1} = CA(\mathbf{x})_{B_1}$. Sea $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Entonces

$$(\mathbf{v}_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = CA\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sea

$$CA = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces $CA\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ = la primera columna de $CA = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{22} \\ \vdots \\ r_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. En forma similar, la segunda columna de $CA = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ya que $(\mathbf{v}_2)_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Continuando de esta manera, se ve que $CA = I$.

MATLAB 4.8

1. a. i. $\mathbf{w} = 1.5\mathbf{v}_1 + .5\mathbf{v}_2$
   ii. $\mathbf{w} = .5\mathbf{v}_1 + 3.5\mathbf{v}_2$
3. a. Para encontrar las coordenadas de un vector $\mathbf{w}$ respecto a la base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4\}$, resuelva el sistema de ecuaciones para escribir $\mathbf{w}$ como una combinación lineal de los vectores de la base; esto es, resuelva el sistema $[\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \ \mathbf{v}_3\ \ \mathbf{v}_4 \mid \mathbf{w}]$.
   b. $C = \begin{pmatrix} -84 & 45 & -5 & 21 \\ 19 & -10 & 1 & -5 \\ 21 & -11 & 1 & -5 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   c. i. $(\mathbf{w})_B = (-105\ \ 22\ \ 26\ \ -4)^t$.
   iii. *Sugerencia:* $(\mathbf{w})_B = C\mathbf{w}$ = combinación lineal de las columnas de C, donde los coeficientes en la combinación lineal son los elementos de $\mathbf{w}$.
5. c. $D = \begin{pmatrix} -7 & -13 & 19 \\ -6 & -11 & 18 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
   d. $(\mathbf{x})_B$ = solución a $[\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \ \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{x}] = (-6\ \ 2\ \ -1)^t$. $(\mathbf{x})_C$ = solución a $[\mathbf{w}_1\ \ \mathbf{w}_2\ \ \mathbf{w}_3 \mid \mathbf{x}] = (-3\ \ -4\ \ 0)^t$.
   e. $D = W^{-1}V$.
   f. $D = \begin{pmatrix} -27 & -165 & 25 & -81 \\ 7 & 40 & -4 & 21 \\ 6 & 37 & -6 & 17 \\ -1 & -6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
7. a. Sea B la matriz cuyas columnas son los vectores de la base en el conjunto B y similarmente para C. Por ejemplo, la matriz de transición T de B a C será igual a $C^{-1}B$. (Explique esto.)

$$T = \begin{pmatrix} -7 & -13 & 19 \\ -6 & -11 & 18 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -9 \\ 2 & 6 & 80 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -3 & -7 & 0 \\ 30 & 68 & -14 \end{pmatrix}$$

   b. $K = ST$.
9. a. Utilice trigonometría básica.
   c. i. Tanto B como C tendrán la forma $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ para alguna θ. Se tiene que $T = \begin{pmatrix} .2588 & .9659 \\ -.9659 & .2588 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} .2588 & -.9659 \\ .9659 & .2588 \end{pmatrix}$
   ii. Las coordenadas con orientación $\frac{2\pi}{3}$ son $(3.0272\ \ .2935)^t$ y las coordenadas estándar son $(-1.7678\ \ 2.4749)^t$. Por ejemplo, para encontrar las coordenadas estándar a partir de las coordenadas respecto a B, encuentre $B\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x}$ contiene las coordenadas respecto a B.
   iii. Las coordenadas con orientación $\frac{\pi}{4}$ son $(1.8699\ \ 1.5695)^t$ y las coordendas estándar son $(.2124\ \ 2.4321)^t$.

Problemas 4.9, página 407

1. $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$
3. i. Si $a = b = 0$, $\{(1, 0), (0, 1)\}$
   ii. Si $a = 0, b \neq 0$, $\{(1, 0)\}$
   iii. Si $a \neq 0, b = 0$, $\{(0, 1)\}$
   iv. Si $a \neq 0, b \neq 0$, $\{(b/\sqrt{a^2+b^2}, -a/\sqrt{a^2+b^2})\}$
5. $\{(1/\sqrt{5}, 0, 2/\sqrt{5}), (2/\sqrt{30}, 5/\sqrt{30}, -1/\sqrt{30})\}$
7. $\{(2/\sqrt{29}, 3/\sqrt{29}, 4/\sqrt{29})\}$
9. $\{(1/\sqrt{5}, 0, 0, 2/\sqrt{5}), (2/\sqrt{30}, 5/\sqrt{30}, 0, -1/\sqrt{30}), (-2/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}, 2/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})\}$

11. $\{(a/\sqrt{a^2+b^2+c^2},$
$b/\sqrt{a^2+b^2+c^2},$
$c/\sqrt{a^2+b^2+c^2})\}$

13. $\{(-7/\sqrt{66}, -1/\sqrt{66}, 4/\sqrt{66})\}$

15. $Q^t = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ y $Q^tQ =$
$I = QQ^t$

17. $PQ = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$
$$\times \begin{pmatrix} 1-\sqrt{8} & -1-\sqrt{8} \\ 1+\sqrt{8} & 1-\sqrt{8} \end{pmatrix}$$
$(PQ)^t = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$
$$\times \begin{pmatrix} 1-\sqrt{8} & 1+\sqrt{8} \\ -1-\sqrt{8} & 1-\sqrt{8} \end{pmatrix}$$
$$(PQ)(PQ)^t = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} = I$$

19. $I = Q^{-1}Q = Q^tQ$. Pero $\det(Q^tQ) = \det Q^t \det Q = \det Q \det Q = (\det Q)^2$. Como
$$1 = \det I = \det Q^tQ$$
$$= (\det Q)^2$$
se tiene
$$\det Q = \pm 1$$

21. Si $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, entonces $0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_{i-1} + \mathbf{v}_i + 0\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, lo que implica que los vectores $\mathbf{v}_i$ son linealmente dependientes. Así, $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

23. a. $\mathbf{0}$

b. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

c. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

25. a. $\dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} -186 \\ 75 \\ 118 \end{pmatrix}$

b. $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

c. $\mathbf{v} = \dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} -186 \\ 75 \\ 118 \end{pmatrix} + \dfrac{13}{49}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

27. a. $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 17 \end{pmatrix}$

b. $\dfrac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

c. $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 17 \end{pmatrix} + \dfrac{2}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

29. $|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\cdot(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2 = 1 - 0 - 0 + 1 = 2$ ya que $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ son ortonormales.

31. $a^2 + b^2 = 1$.

33. $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2$. Esto significa que $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2 = (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2$. Así, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$, lo que puede ocurrir sólo si $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$; es decir, si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente dependientes.

35. Se demuestra esto por inducción matemática, si $k = 2$, este es el resultado del problema 33. Se supone que es cierto para $k = n$ y se demuestra para $k = n + 1$. Suponga que $|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+1}| = |\mathbf{x}_1| + |\mathbf{x}_2| + \cdots + |\mathbf{x}_n| + |\mathbf{x}_{n+1}|$. (*) Esto implica que $|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_n| = |\mathbf{x}_1| + |\mathbf{x}_2| + \cdots + |\mathbf{x}_n|^{(\checkmark)}$, ya que si esto no es cierto, entonces por la desigualdad del triángulo,
$$|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_n|$$
$$< |\mathbf{x}_1| + |\mathbf{x}_2| + \cdots + |\mathbf{x}_n|$$

Pero entonces

$|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+1}|$
$\leq |\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_n|$
$+ |\mathbf{x}_{n+1}| < |\mathbf{x}_1|$
$+ |\mathbf{x}_2| + \cdots + |\mathbf{x}_n|$
$+ |\mathbf{x}_{n+1}|$

lo que contradice (*). Así, por la suposición de inducción, dim gen $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\} = 1$. Sea $\mathbf{u} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_n$. Por (*) y (✓) $|\mathbf{u} + \mathbf{x}_{n+1}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{x}_{n+1}|$ de manera que por el problema 33, $\mathbf{x}_{n+1} = \lambda\mathbf{u}$ para algún número λ. Esto es, $\mathbf{x}_{n+1} \in$ gen $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ de manera que también dim gen $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}\} = 1$. Por lo tanto, el resultado es cierto para $k = n + 1$, y la demostración queda completa.

37. $(H^\perp)^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n: \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0$ para todo $\mathbf{k} \in H^\perp\}$. Sea $\mathbf{x} \in H$; entonces $\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} = 0$ para todo $\mathbf{k} \in H^\perp$ de manera que $\mathbf{x} \in (H^\perp)^\perp$, lo que demuestra que $H \subseteq (H^\perp)^\perp$. Inversamente, si $\mathbf{v} \in (H^\perp)^\perp$, entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0$ para todo $\mathbf{k} \in H^\perp$. Pero $\mathbf{v} = \mathbf{h}' + \mathbf{k}'$, donde $\mathbf{h}' \in H$ y $\mathbf{k}' \in H^\perp$. Entonces $0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{h}' \cdot \mathbf{k} + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} = 0 + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}$. Así, $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} = 0$ para todo $\mathbf{k} \in H$, lo que significa, en particular, que $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' = 0$. Por lo tanto, $\mathbf{k}' = \mathbf{0}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{h}' \in H$. Por lo tanto, $(H^\perp)^\perp \subset H$ y junto con $H \subset (H^\perp)^\perp$ demuestra que $(H^\perp)^\perp = H$.

39. Sea $\mathbf{k} \in H_2^\perp$. Entonces $\mathbf{k} \cdot \mathbf{h} = 0$ para todo $\mathbf{h} \in H_2$. Como $H_1 \subset H_2$, esto demuestra que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{h} = 0$ para todo $\mathbf{h} \in H_1$. Es decir, $\mathbf{k} \in H_1^\perp$. Por lo tanto, $H_2^\perp \subset H_1^\perp$.

MATLAB 4.9

1. El programa para el inciso b) es:

```
z1 = w1/norm(w1),
t2 = w2 - (w2'*z1)*z1;
z2 = t2/norm(2),
t3 = w3 - (w3' *z1)*z1
      - (w3'*z2)*z2;
z3 = t3/norm(t3)
```

Verifique la ortogonalidad encontrando $\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_3$ y $\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_3$. Verifique las combinaciones lineales encontrando la forma escalonada reducida por renglones de la matriz $[\mathbf{z}_1\ \mathbf{z}_2\ \mathbf{z}_3 \mid \mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \mathbf{w}_3]$.

3. a. al c. $\mathbf{p}_1 = (1\ \ 2)'$ y $\mathbf{p}_2 = (-4\ \ 2)'$. Recuerde que una proyección sobre un vector baja una perpendicular a la recta determinada por el vector de manera que, en la gráfica de la combinación lineal, el paralelogramo dibujado será un rectángulo.

d. $\mathbf{p}_1 = (1.6\ \ 3.2)'$ y $\mathbf{p}_2 = (2.4\ \ -1.2)'$.

f. La proyección sobre $\mathbf{v}_2$ es la proyección sobre $H^\perp$.

5. a. $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1\} =$

$$\left\{\begin{pmatrix} -.2673 \\ .5345 \\ .8018 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} .8729 \\ -.2182 \\ .4364 \end{pmatrix}\right\}$$

b. Porque la dimensión de $H^\perp$ es 1 y $\mathbf{n}$ es perpendicular a H.

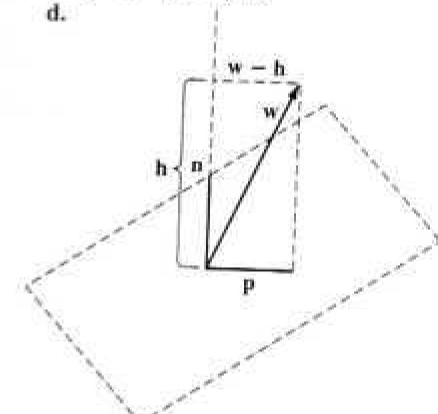
c. Compare

p = (z1' *w)*z1 + (z2' *w)*z2

con

q = w − (n'*w)*n.

d.



7. a. Primero calcule

q = u1'*w*u1 + u2'*w*u2 + u3'*w*u3 + u4'*w*u4

y compare con **p = B*B'*w**.

b. Seleccione $\mathbf{x}$, un vector de 4×1. Observará que $|\mathbf{w} - \mathbf{p}|$ es más pequeño que $|\mathbf{w} - \mathbf{h}|$ ya que $\mathbf{p}$ es el

vector en H que está más cerca de $\mathbf{w}$.

c. $\mathbf{p} = BB^t\mathbf{w} = DD^t\mathbf{w}$.

d. *Sugerencia:* consulte el inciso a). Piense que $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_i$ es $\mathbf{u}_i^t * \mathbf{w}$ y observe que ese renglón i de B^t es $\mathbf{u}_i^t$.
Recuerde que una combinación lineal de vectores se puede interpretar como una multiplicación por la matriz cuyas columnas son los vectores.

9\. a. *Sugerencia: interprete* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i$ *como* $\mathbf{u}_i^t * \mathbf{v}$ *y utilice el hecho de que el renglón* i *de* B^t *es* $\mathbf{u}_i^t$.

b. Utilice los hechos de que $\mathbf{u}_i$ y $\mathbf{w}$ tienen normas iguales a 1.

c. i. Cada ángulo es de 45°. Asegúrese de encontrar $\mathbf{w}$ introduciendo el vector dado y después dividiendo por su norma.

ii. El ángulo con $\mathbf{v}_1$ es de 135° y el ángulo con $\mathbf{v}_2$ es de 45°.

d. Todos los ángulos son los mismos e iguales a 54.74°.

11\. *Sugerencia:* demuestre que $(AB)^t(AB) = I$ usando las propiedades de A, B y la transpuesta.

13\. a. $\det(Q) = \pm 1$

b. *Sugerencia:* encuentre el determinante de ambos lados de $QQ^t = I$.

c. $|\det(Q)| = 1$.

15\. *b. La base canónica es ortonormal y la rotación preserva la longitud y los ángulos.*

c. Los productos de matrices ortogonales son ortogonales.

d. $[\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3]$ no es una matriz ortogonal.

e. $A = YRP =$

$$\begin{pmatrix} .9186 & -.2500 & .3062 \\ -.1768 & .4330 & .8839 \\ -.3536 & -.8660 & .3536 \end{pmatrix}$$

La matriz B siguiente contiene los nueve ángulos. La primera columna[illegible] ángulos entre el eje x estándar y los ejes x, y y z del satélite, respectivamente. De manera similar, la segunda columna contiene los ángulos entre el eje estándar y y las coordenadas del satélite, y la tercera columna contiene los ángulos entre el eje estándar z y las coordenadas del satélite:

$B =$

$$\begin{pmatrix} 23.28° & 100.18° & 110.70° \\ 104.48° & 64.34° & 150.00° \\ 72.17° & 27.88° & 69.30° \end{pmatrix}$$

Problemas 4.10, *página 427*

1\. $y = \frac{408}{126} - \frac{57}{126}x \approx 3.24 - 0.45x$

3\. $y = \frac{162}{84} - \frac{10}{84}x \approx 1.93 - 0.12x$

5\. $y = \frac{13\,536}{5\,184} + \frac{10\,800}{5\,184}x + \frac{1\,584}{5\,184}x^2 \approx 2.61 + 2.08x + 0.31x^2$

Ésta es la ecuación de la parábola que pasa por los tres puntos.

7\. El argumento aquí es casi paralelo a los argumentos dados para las aproximaciones lineales y cuadráticas.

9\. Ésta es una generalización del problema 7.

11\. $y \approx 108.71 + 4.906x - 0.00973x^2$

13\. $y = 116.71766114 - 0.87933592x$

15\. $y = -111.930576071 + 2.133265272x$

17\. $y = 0.01357392x^2 - 3.39135882x + 217.42127707$

19. $y = 0.00004056437x^2 + 2.01798203x - 53.88518039$

MATLAB 4.10

1\. b. $\mathbf{u} = (2.9535 \quad -1.1813)^t$; por lo tanto, la recta es $y = 2.9535 - 1.1813x$.

c. Utilice el comando **norm** de MATLAB. $|\mathbf{y} - A\mathbf{u}| = 4.066$ y $|\mathbf{y} - A\mathbf{w}| = 2.9712$. La suma de los cuadrados de las diferencias en las coordenadas y entre la recta de

mínimos cuadrados y los puntos es menor que si se usa cualquier otra recta.

d. Recuerde que $\text{proy}_H \mathbf{y} = BB^t\mathbf{y}$.

e. $y = -.4722$.

3. $g \approx -30.6364$, $v_0 \approx 60.9470$ y la altura sobre el suelo es ≈ 10.8977.

5. **a.** El ajuste de recta es $y = -.1942 + 1.1921x$ con la norma del error de mínimos cuadrados igual a .4419. El ajuste cuadrático es $y = -.0423 - .7078x - 5.7751x^2$, con la norma del error de mínimos cuadrados igual a .1171. El ajuste cuadrático es un poco mejor: la norma es más pequeña y los puntos * parecen más cercanos al ajuste cuadrático.

b. El ajuste de recta es $y = 35.9357 - 83.4269x$, con la norma del error de mínimos cuadrados igual a 25.3326. El ajuste cuadrático es $y = 41.5798 - 51.2577x - 59.5481x^2$ con la norma del error de mínimos cuadrados igual a 15.2469. En apariencia el ajuste cuadrático es mejor: la norma es más pequeña y los puntos * se ven mucho más cercanos al ajuste. Sin embargo, observe que un punto se puede considerar disperso.

7. El ajuste de recta es $y = 40.8537 + .0066x$ y el ajuste cuadrático es $y = -78 + .32x - .0002x^2$. El ajuste cuadrático parece mejor, y con esto se puede concluir que el producto será más fuerte si la temperatura es de 800°.

9. **a.** **i.** Usando $\mathbf{x} = [0{:}10]'$, se tiene el ajuste $y = e^{1.7322 + .2706x}$. El ajuste parece razonable.

ii. Use $x = 15$. La población proyectada para 1950 es 327.1814 millones.

b. **i.** La población proyectada para 1950 es mayor que la población actual.

ii. Un modelo exponencial parece un ajuste razonable. Se tiene $y = e^{4.3999 + .1287x}$. (No olvide usar el logaritmo de los valores de la población para el vector **y**.)

iii. El crecimiento de la exponencial está controlado en su mayor parte por el coeficiente del término en x en el exponente. Este coeficiente para el segundo siglo es menos de la mitad del coeficiente correspondiente para el primer siglo.

iv. $y = 294.89$ millones.

Problemas 4.11, página 447

1. **i.** $(A, A) = a_{11}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{nn}^2 \geq 0$.

ii. $(A, A) = 0$ implica que $a_{ii}^2 = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ de manera que $A = 0$. Si $A = 0$, entonces $(A, A) = 0$.

iii. $(A, B + C) = a_{11}(b_{11} + c_{11}) + \cdots + a_{nn}(b_{nn} + c_{nn}) = a_{11}b_{11} + a_{11}c_{11} + \cdots + a_{nn}b_{nn} + a_{nn}c_{nn} = (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{nn}b_{nn}) + (a_{11}c_{11} + \cdots + a_{nn}c_{nn}) = (A, B) + (A, C)$

iv. Similarmente $(A + B, C) = (A, C) + (B, C)$

v. $(A, B) = (B, A) = \overline{(B, A)}$, ya que todos los elementos son reales y $a_{ii}b_{ii} = b_{ii}a_{ii}$.

vi. $(\alpha A, B) = (\alpha a_{11})b_{11} + \cdots + (\alpha a_{nn})b_{nn} = \alpha[a_{11}b_{11} + \cdots + a_{nn}b_{nn}] = \alpha(A, B)$

vii. $(A, \alpha B) = \overline{(\alpha B, A)} = (\alpha B, A) = \alpha(B, A) = \alpha\overline{(A, B)} = \alpha(A, B)$

3. Sea E_i la matriz de $n \times n$ con un 1 en la posición i, i y 0 en otra parte. Es sencillo ver que $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ es una base ortonormal para D_n.

5. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

7. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1)\right\}$

9. Primero observe que si $A = (a_{ij})$ y $B^t = (b_{ji})$, entonces

$$(AB^t)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{jk}$$

de manera que

$$\text{tr}(AB^t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$$

i. $(A, A) = \text{tr}(AA^t)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right) \geq 0$$

ii. $(A, A) = 0$ implica que $a_{ij}^2 = 0$ para todo i y j con lo que $A = 0$. Inversamente, si $A = 0$, entonces $A^t = 0$ y $AA^t = 0$ por lo que $\text{tr}(AA^t) = 0$.

iii. $(A, B + C) = \text{tr}[A(B + C)^t] + \text{tr}[A(B^t + C^t)] = \text{tr}(AB^t + AC^t) = \text{tr}(AB^t) + \text{tr}(AC^t) = (A, B) + (A, C)$

iv. De manera similar, $(A + B, C) = (A, C) + (B, C)$

v. $(A, B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$

$= \text{tr}(BA^t) = (B, A)$

vi. $(\alpha A, B) = \text{tr}(\alpha AB^t) = \alpha\text{tr}(AB^t) = \alpha(A, B)$

vii. $(A, \alpha B) = (\alpha B, A) = \alpha(B, A) = \alpha(A, B)$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

13. a. i. $(p, p) = p(a)^2 + p(b)^2 + p(c)^2 \geq 0$

ii. $(p, p) = 0$ implica que $p(a) = p(b) = p(c) = 0$. Pero una cuadrática puede tener a lo más dos raíces. Entonces $p(x) = 0$ para toda x. Inversamente, si $p = 0$, entonces $p(a) = p(b) = p(c) = 0$, de manera que $(p, p) = 0$.

iii. $(p, q + r)$
$= p(a)(q(a) + r(a)) + p(b)(q(b) + r(b)) + p(c)(q(c) + r(c))$
$= [p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)q(c)] + [p(a)r(a) + p(b)r(b) + p(c)r(c)]$
$= (p, q) + (p, r)$

iv. De manera similar, $(p + q, r) = (p, r) + (q, r)$

v. $(p, q) = p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)q(c) = q(a)p(a) + q(b)p(b) + q(c)p(c) = (q, p)$

vi. $(\alpha p, q) = [\alpha p(a)]q(a) + [\alpha p(b)]q(b) + [\alpha p(c)]q(c) = \alpha[p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)q(c)] = \alpha(p, q)$

vii. $(p, \alpha q) = (\alpha q, p) = \alpha(q, p) = \alpha(p, q)$

b. No, ya que ii) se viola. Por ejemplo, sea $a = 1$, $b = -1$ y $p(x) = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1 \neq 0$. Entonces $p(a) = p(b) = 0$ de manera que $(p, p) = 0$ aun cuando $p \neq 0$. De hecho, para cualquier polinomio q, se tiene que $(p, q) = 0$.

15. $\sqrt{31}$

17. $0 \leq \left(\left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right), \left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)\right)$

$$= \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{|\mathbf{u}|^2} - \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} - \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} + \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2}$$

$$= \frac{|\mathbf{u}|^2}{|\mathbf{u}|^2} - \left[\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \overline{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}\right] + \frac{|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2}$$

Ahora si $z = a + bi$, entonces $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2 \text{ Re } z$ (y $z - \bar{z} = 2bi = 2i Im z$). Así, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \overline{(\mathbf{u}, \mathbf{v})} = 2 \text{ Re } (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, y se tiene $2 - \frac{2 \text{ Re}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} \geq 0$ o sea, $\frac{\text{Re}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|} \leq 1$. Sea λ un número real. Entonces $0 \leq ((\lambda\mathbf{u} + (\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{v}), (\lambda\mathbf{u} + (\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{v})) = \lambda^2 |\mathbf{u}|^2 + |(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2|\mathbf{v}|^2 + \lambda\overline{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v})(\mathbf{v}, \mathbf{u}) =$ (ya que λ es real) $\lambda^2|\mathbf{u}|^2 + 2\lambda|(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2 + |(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2|\mathbf{v}|^2$. La última línea es una ecuación cuadrática en λ. Si se tiene $a\lambda^2 + b\lambda + c \geq 0$, entonces la ecuación $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ puede tener a lo más una raíz real y, por lo tanto, $b^2 - 4ac \leq 0$. Así,

$$4(|(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2)^2 - 4|\mathbf{u}|^2|(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2|\mathbf{v}|^2 \leq 0$$

o $|(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2 \leq |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2$

y $|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$

19. $H^\perp = \text{gen }\{(-15x^2 + 16x - 3), (20x^3 - 30x^2 + 12x - 1)\}$

21. $1 + 2x + 3x^2 - x^3 = \frac{30x^2 + 52x + 19}{20} + \frac{(-20x^3 + 30x^2 - 12x + 1)}{20}$

23. $\frac{2}{\pi} + \sqrt{3}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^2}\right)\sqrt{3}(2x - 1) + \sqrt{5}\left(\frac{2}{\pi} + \frac{24}{\pi^2} - \frac{96}{\pi^3}\right) \times \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1) \approx -0.8346x^2 - 0.2091x + 1.0194$

25. $A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{pmatrix}$

Verifique que $A^*A = I$.

27. Se verifican las siete condiciones en la página 439.

i. $(f, f) = \int_a^b f\bar{f} = \int_a^b f_1^2 + f_2^2 \geq 0$

ya que $f_1^2 \geq 0$ y $f_2^2 \geq 0$

ii. Se deduce del inciso *i*)

iii. $(f, g + h) = \int_a^b f(\overline{g + h})$

$= \int_a^b f\bar{g} + f\bar{h} = (f, g) + (f, h)$

iv. Similar al inciso *iii*)

v. $(f, g) = \int_a^b f\bar{g} = \int_a^b \bar{g} f$ y

$\overline{(g, f)} = \int_a^b \overline{g\bar{f}} = \int_a^b \bar{g} f$

vi. $(\alpha f, g) = \int_a^b \alpha f\bar{g} = \alpha \int_a^b f\bar{g}$

vii. $(f, \alpha g) = \int_a^b f(\overline{\alpha g}) = \int_a^b f\bar{\alpha}\bar{g}$

$= \bar{\alpha} \int_a^b f\bar{g} = \bar{\alpha}(f, g)$

29. $\sqrt{\pi}$

MATLAB 4.11

1. Consulte el problema 1 de MATLAB 4.9. Necesitará calcular un **t4** y un **z4**.

3. El inciso a) funciona porque $(\mathbf{w}, \mathbf{u}_i)$ es igual a $\mathbf{u}_i'*\mathbf{w}$ por definición. Consulte el problema 7 de MATLAB 4.9.

Problemas 4.12, página 457

1. Sea L un conjunto linealmente independiente en V. Sea S la colección de todos los subconjuntos linealmente independientes de V, parcialmente ordenados por inclusión tales que cada conjunto en S contiene a L. La demostración sale igual que la del teorema 2.

3. El resultado es cierto para $n = 2$. Suponga que es cierto para $n = k$. Considere los $k + 1$ conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ en una cadena. Los primeros k conjuntos forman una cadena y, por la hipótesis de inducción, uno de ellos contiene a los otros $k - 1$ conjuntos. Llame a este conjunto A_i. Entonces $A_i \subseteq A_{k+1}$ o bien $A_{k+1} \subseteq A_i$. En cualquier caso se encontró un conjunto que contiene a los otros k subconjuntos y el resultado es cierto para $n = k + 1$. Esto completa la demostración por inducción.

Capítulo 4. Repaso, página 462

1. Sí; dimensión 2; base $\{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$
3. Sí; dimensión 3; base $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$
5. Sí; dimensión $[n(n+1)]/2$; base $\{(E_{ij}: j \geq i\}$, donde E_{ij} es la matriz con un 1 en la posición i, j y 0 en otra parte
7. No; por ejemplo, $(x^5 - 2x) + (-x^5 + x^2) = x^2 - 2x$, lo que no es un polinomio de grado 5, de manera que el conjunto no es cerrado bajo la suma.
9. No; por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, que no satisface $a_{12} = 1$.
11. Independiente
13. Dependiente
15. Independiente
17. Independiente
19. Independiente
21. Dimensión 2; base $\{(2, 0, 1), (0, 4, 3)\}$
23. Dimensión 3; base $\{(1, 0, 3, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$
25. Dimensión 4; base $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ donde D_i es la matriz con un 1 en la posición i, i y 0 en otra parte
27. Imagen $A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$; $N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$; $\rho(A) = \nu(A) = 1$
29. Imagen $A = \mathbb{R}^3$, $N_A = \{\mathbf{0}\}$; $\rho(A) = 3$, $\nu(A) = 0$
31. Imagen $A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}$; $N_A = \{\mathbf{0}\}$; $\rho(T) = 2$, $\nu(T) = 0$
33. $\frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
35. $1(1 + x^2) + 0(1 + x) + 3(1) = 4 + x^2$
37. $\left\{\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$
39. $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$
41. **a.** $\begin{pmatrix} \text{[illegible]} \\ -\text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$
    c. $\begin{pmatrix} \text{[illegible]} \\ -\text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix}$
43. **a.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
    b. $\left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$
    c. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

45. $\frac{e^2-1}{2} + 3(x-1) + (\frac{15}{4}e^2 - \frac{105}{4})$
$\times (x^2 - 2x + \frac{2}{3}) \approx 1.167 + 0.0821x +$
$1.459x^2$

47. $y = $ [illegible]

Capítulo 5

Problemas 5.1, página 472

1. Lineal **3.** Lineal

5. No lineal, ya que

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}\alpha x\\ \alpha y\\ \alpha z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \alpha z\end{pmatrix}$$

mientras que

$$\alpha T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha z\end{pmatrix}$$

7. Lineal

9. No lineal, ya que

$$\begin{aligned}T\left(\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= T\begin{pmatrix}\alpha x\\ \alpha y\end{pmatrix}\\ &= (\alpha x)(\alpha y)\\ &= \alpha^2 xy\end{aligned}$$

mientras que

$$\alpha T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha xy$$

11. Lineal

13. No lineal, ya que

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\right) = \alpha^2 T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$$

$$\neq \alpha T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$$

si $\alpha \neq 1$ o 0

15. No lineal, ya que

$$\begin{aligned}T(A+B) &= (A+B)^t(A+B)\\ &= (A^t + B^t)(A+B)\\ &= A^tA + A^tB\\ &\quad + B^tA + B^tB\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}T(A) + T(B) &= A^tA + B^tB\\ &\neq T(A+B)\end{aligned}$$

a menos que $A^tB + B^tA = 0$.

17. No lineal, ya que $T(\alpha D) = (\alpha D)^2 = \alpha^2 D^2 \neq \alpha T(D) = \alpha D^2$ a menos que $\alpha = 1$ o 0.

19. Lineal **21.** Lineal

23. No lineal, ya que $T(f+g) = (f+g)^2 \neq f^2 + g^2 = T(f) + T(g)$

25. Lineal **27.** Lineal

29. No lineal, ya que

$$\begin{aligned}T(\alpha A) &= \det(\alpha A)\\ &= \alpha^n \det A\\ &\neq \alpha \det A\\ &= \alpha T(A)\end{aligned}$$

a menos que $\alpha = 0$ o 1. [$\det \alpha A = \alpha^n \det A$ por el problema 2.2.28.] Además, en general

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B$$

31. **a.** $\begin{pmatrix}-14\\4\\26\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}-31\\-6\\26\end{pmatrix}$

33. Realiza la rotación de un vector en el sentido contrario a las manecillas del reloj, alrededor del eje z, un ángulo θ en un plano paralelo al plano xy.

35. Suponga que $\alpha < 0$. Entonces $T[(\alpha - \alpha)\mathbf{x}] = T(0\mathbf{x}) = 0T\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Así, $T[(\alpha - \alpha)\mathbf{x}] = T(0\mathbf{x}) = 0T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $T(\alpha\mathbf{x}) + T(-\alpha\mathbf{x}) = T((\alpha - \alpha)\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Pero $-\alpha > 0$ de manera que $T(-\alpha\mathbf{x}) = -\alpha T\mathbf{x}$. Por lo tanto, también $T(\alpha\mathbf{x}) - \alpha T\mathbf{x} = \mathbf{0}$, o $T(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T\mathbf{x}$ para $\alpha < 0$.

37. $T(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = T\mathbf{x} + T(-\mathbf{y}) = T\mathbf{x} + T[(-1)\mathbf{y}] = T\mathbf{x} + (-1)T\mathbf{y} = T\mathbf{x} - T\mathbf{y}$

39. $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_0) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_0) + (\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_0) = T\mathbf{v}_1 + T\mathbf{v}_2$ y $T(\alpha\mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{v}, \mathbf{u}_0) = \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{u}_0) = \alpha T\mathbf{v}$

41. $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n$
$= (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + (\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n + (\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n$
$= (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n + (\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n$
$= T\mathbf{v}_1 + T\mathbf{v}_2$
$T(\alpha\mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{v}, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\alpha\mathbf{v}, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\alpha\mathbf{v}, \mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n$
$= \alpha[(\mathbf{v}, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}, \mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n] = \alpha T\mathbf{v}$

MATLAB 5.1

1. La figura es un perro sin cola. Los puntos son asteriscos (*) rojos y se tiene $-20 \le x, y \le 20$.

3. **a.** Las dos escalas, de x y y del perro están duplicadas. Por ejemplo, el ancho de una pata se duplica y la altura se duplica.
   b. La primera matriz duplica la escala de x y deja la escala de y igual. Entonces, por ejemplo, el ancho de una pata se duplica pero la altura es la misma. La segunda matriz duplica la escala de y y deja la de x como está. Así, por ejemplo el ancho de la pata es la misma pero la altura es el doble.
   c. La matriz multiplica la escala de x por r y la escala de y por s.

Problemas 5.2, página 484

1. Núcleo $= \{(0, y): y \in \mathbb{R}\}$, es decir, el eje y; imagen $= \{(x, 0): x \in \mathbb{R}\}$, es decir, el eje x; $\rho(T) = \nu(T) = 1$.

3. Núcleo $= \{(x, -x): x \in \mathbb{R}\}$, ésta es la recta $x + y = 0$; imagen $= \mathbb{R}$; $\rho(T) = \nu(T) = 1$.

5. Núcleo $= \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$; imagen $= M_{22}$; $\rho(T) = 4$, $\nu(T) = 0$

7. Núcleo $= \{A: A^t = -A\} = \{A: A$ es antisimétrica$\}$; imagen $= \{A: A$ es simétrica$\}$; $\rho(T) = (n^2 + n)/2$; $\nu(T) = (n^2 - n)/2$

9. Núcleo $= \{f \in C[0, 1]: f(\frac{1}{2}) = 0\}$; imagen $= \mathbb{R}$; $\rho(T) = 1$; el núcleo es un espacio de dimensión infinita de manera que $\nu(T) = \infty$. Por ejemplo, las funciones linealmente independientes $x - \frac{1}{2}, (x - \frac{1}{2})^2, (x - \frac{1}{2})^3, (x - \frac{1}{2})^4, \ldots, (x - \frac{1}{2})^n, \ldots$ satisfacen todas $f(\frac{1}{2}) = 0$.

11. Si $\mathbf{v} \in V$, entonces $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$ de manera que $T\mathbf{v} = T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1T\mathbf{v}_1 + c_2T\mathbf{v}_2 + \cdots + c_nT\mathbf{v}_n = c_1\mathbf{0} + c_2\mathbf{0} + \cdots + c_n\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Así, $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in V$ y es, por lo tanto, la transformación cero.

13. La imagen de T es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y, por el ejemplo 4.6.9, los subespacios de $\mathbb{R}^3$ son $\{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R}^3$ y las rectas y planos que pasan por el origen.

15. $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, a, b, c reales.

17. $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

19. **i.** Si $A \in$ nu T, entonces $A - A^t = 0$, o $A = A^t$.
    ii. Si $A \in$ imagen T, existe una matriz B tal que $B - B^t = A$. Entonces $A^t = (B - B^t)^t = B^t - (B^t)^t = B^t - B = -A$, de manera que A es antisimétrica.

21. Sea $T_{ij}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{w}_j$ y $T_{ij}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{0}$ si $k \ne i$. Éstas forman una base para $L(V, W)$, con lo que dim $L(V, W) = nm$.

23. Falso. Sean S y T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por $S(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ y $T(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces $ST(\mathbf{x}) = AB\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Sin embargo, $TS(\mathbf{x})$ no es la transformación cero porque $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq$ la matriz cero.

Problemas 5.3, página 504

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; nu $T = \{\mathbf{0}\}$; imagen $T = \mathbb{R}^2$, $\nu(T) = 0$, $\rho(T) = 2$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; imagen $T = $ gen $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$; nu $T = $ gen $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$; $\rho(T) = 1$, $\nu(T) = 2$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$; imagen $T = $ gen $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$; nu $T = $ gen $\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$; $\rho(T) = 2$, $\nu(T) = 1$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$; imagen $T = $ gen $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$; nu $T = $ gen $\left\{\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$; $\rho(T) = 2$, $\nu(T) = 2$

9. $\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{13}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$; imagen $T = \mathbb{R}^2$; nu $T = \{\mathbf{0}\}$; $\rho(T) = 2$, $\nu(T) = 0$

11. $\begin{pmatrix} 3 & \frac{7}{5} & \frac{16}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$; imagen $T = \mathbb{R}^2$; $(\text{nu } T)_{B_1} = $ gen $\left\{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}\right\}$; $\rho(T) = 2$, $\nu(T) = 1$

13. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; imagen $T = $ gen $\{1 - x, x^3\}$; nu $T = $ gen $\{x^2\}$; $\rho(T) = 2$, $\nu(T) = 1$

15. $(0, 0, 1, 0)$; imagen $T = \mathbb{R}$; nu $T = $ gen $\{1, x, x^3\}$; $\rho(T) = 1$, $\nu(T) = 3$

17. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; imagen $T = $ gen $\{1 + x^2, -1 + x, 3 + 3x + 5x^2\} = P_2$; nu $T = $ gen $\{x^2 - 4x - 6\}$; $\rho(T) = 3$, $\nu(T) = 1$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; imagen $T = M_{22}$; nu $T = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$; $\rho(T) = 4$, $\nu(T) = 0$

21. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; imagen $D = P_3$; nu $D = \mathbb{R}$; $\rho(D) = 4$, $\nu(D) = 1$

23. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$; imagen $D = P_{n-1}$; nu $D = \mathbb{R}$; $\rho(D) = n$, $\nu(D) = 1$

25. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; imagen $T = P_4$; nu $T = \{\mathbf{0}\}$; $\rho(T) = 5$, $\nu(T) = 0$

27. $A_T = \text{diag}\,(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n)$, donde $b_j = \sum_{i=1}^{j+1} \frac{j!}{(j+1-i)!}$; imagen $T = P_n$; nu $T = \{\mathbf{0}\}$; $\rho(T) = n+1$, $\nu(T) = 0$

29. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; imagen $T = P_2$; nu $T = \{\mathbf{0}\}$; $\rho(T) = 3$, $\nu(T) = 0$

31. Por ejemplo, en M_{34},

$$A_T = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

En general, $A_T = (a_{ij})$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = km + l, \\ & \text{y } j = (l-1)n + k + 1 \\ & \text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ & \text{y } l = 1, 2, \ldots, m \\ 0, & \text{de otra manera} \end{cases}$$

33. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; imagen $D =$ gen $\{\text{sen}\, x, \cos x\}$; nu $D = \mathbb{R}$; $\rho(D) = 2$, $\nu(D) = 1$

35. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -i/2 \\ i/2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

37. Sean B_1 y B_2 dos bases para V y W, respectivamente. Se tiene $(T\mathbf{v})_{B_2} = A_T(\mathbf{v})_{B_1}$ para todo $\mathbf{v} \in V$. Entonces $\mathbf{v} \in$ nu T si y sólo si $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y sólo si $A_T(\mathbf{v})_{B_1} = (\mathbf{0})_{B_2}$ si y sólo si $(\mathbf{v})_{B_1} \in$ nu A_T. Así, el núcleo de $T = N_{A_T}$ de manera que $\nu(T) = \nu(A_T)$. Si $\mathbf{w} \in$ imagen T, entonces $T\mathbf{v} = \mathbf{w}$ para algún $\mathbf{v} \in V$, con lo que $A_T(\mathbf{v})_{B_1} = (T\mathbf{v})_{B_2} = (\mathbf{w})_{B_2}$. Esto significa que $(\mathbf{w})_{B_2} \in R_{A_T}$. De este modo $R_{A_T} =$ imagen T de manera que $\rho(T) = \rho(A_T)$. Como $\nu(A_T) + \rho(A_T) = n$, del teorema 4.7.5., se ve que también $\nu(T) + \rho(T) = n$

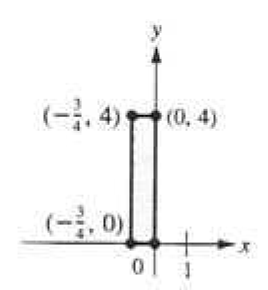
39. Compresión a lo largo del eje y con $c = \frac{1}{4}$

41. Corte a lo largo del eje x con $c = 2$

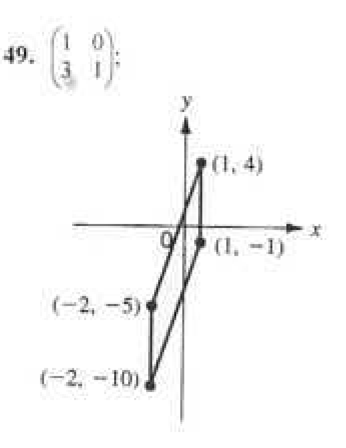
43. Corte a lo largo del eje y con $c = \frac{1}{2}$

45. Reflexión respecto a la recta $y = x$

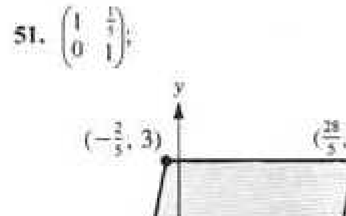
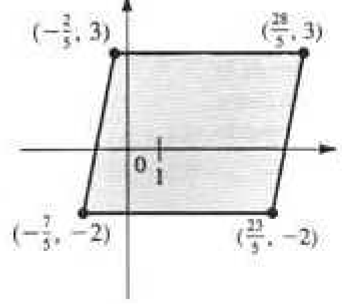
47. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;



49. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;



51. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

53. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(−5, 3) (−2, 3)

(−5, −2) (−2, −2)

55. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(−5, −1) (1, −1)

(−5, −4) (1, −4)

57. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{14}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

59. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

61. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

63. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 62 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

MATLAB 5.3

1. a. El siguiente es un posible programa:

```
pts = [0  3  3  0;0  0  2  2]
lns = [1  2  3  4;2  3  4  1]
A = [.5  0;0  3]
grafics(pts,lns,'b','*',10)
hold on
grafics(A*pts,lns,'g','o',10)
hold off
```

b. Utilice **A = [1 2;0 1]** para el corte en la figura 5.8a) y use **A = [1 −2;0 1]** para el corte en la figura 5.8b). Al llamar a *grafics* será suficiente con usar $M = 7$.

c. Utilice **A = [1 0;−2 1]**. Será suficiente con usar $M = 6$.

3. a. Al demostrar que T es lineal, use las propiedades del producto punto: $(\mathbf{v}\cdot a\mathbf{x}) = a(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x})$ y $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{y}$. Para encontrar la representación matricial use el hecho de que $T(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i)\mathbf{v} = v_i\mathbf{v}$.

b. **P = [1 0;0 0]**. Una base para la imagen es **v** y una base para el núcleo es $\mathbf{w} = (0 \quad 1)^t$, un vector que es perpendicular a **v**. Para proyectar un vector sobre **v**, se baja una perpendicular desde el punto terminal del vector a la recta determinada por **v**. Así, por ejemplo, si un vector es perpendicular a **v**, la proyección es el vector cero. Toda proyección sobre **v** es paralela a **v**, por lo que es evidente que **v** es una base para la imagen.

c. y d. Similar a b). Una base para la imagen será **v** y una base para el núcleo será un vector perpendicular a **v**.

7. a. $A = \begin{pmatrix} 2.5 & -.5 \\ -.5 & 2.5 \end{pmatrix}$

Multiplique las representaciones individuales de las matrices en el orden correcto: (rotación positi-

va) (expansión) (rotación negativa).

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

c. T expande por un factor de 2 en la dirección del primer vector de la base en B y expande por un factor de 3 en la dirección del segundo vector de la base en B.

Problemas 5.4, página 517

1. Como $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ y $(A + B)^t = A^t + B^t$, T es lineal. $A^t = 0$ si y sólo si $A = 0$ de manera que nu $T = \{0\}$ y T es 1-1. Para cualquier matriz A, $(A^t)^t = A$, por lo que T es sobre.

3. **i.** Si T es un isomorfismo, entonces $T\mathbf{x} = A_T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Así, por el teorema de resumen, det $A_T \neq 0$.

ii. Si det $A_T \neq 0$, entonces $A_T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución trivial. Así T es 1-1, y como V y W son de dimensión finita, T también es sobre.

5. $m = [n(n + 1)]/2 = \dim \{A: A$ es $n \times n$ y simétrica$\}$.

7. Defina $T: P_4 \to W$ como $T_p = xp$. $T_p = 0$ implica $p(x) = 0$; es decir, p es el polinomio cero. Así T es 1-1, y como dim $W = 5$, T es también sobre.

9. $mn = pq$

11. La demostración del teorema 6 prueba la afirmación bajo el entendimiento de que los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son números complejos.

13. $T(A_1 + A_2) = (A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B = TA_1 + TA_2$; $T(\alpha A) = (\alpha A)B = \alpha(AB) = \alpha TA$. Así T es lineal. Suponga que $TA = 0$. Entonces $AB = 0$. Como B es invertible, se puede multiplicar por la izquierda por B^{-1} para obtener $A = ABB^{-1} = 0B^{-1} = 0$, o sea, $A = 0$. Por lo tanto, T es 1-1 y como dim $M_{mn} = n^2 < \infty$, T es un isomorfismo.

15. Elija $\mathbf{h} \in H$. Después $\text{proy}_H \mathbf{h} = \mathbf{h}$ de manera que T es sobre. Si $H = V$, entonces T también es 1-1.

17. Como T es un isomorfismo, nu T = nu $A = \{\mathbf{0}\}$ de manera que, por el teorema de resumen, A es invertible. Si $\mathbf{x} = T^{-1}\mathbf{y}$, entonces $T\mathbf{x} = A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ con lo que $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$ porque A^{-1} existe. Por lo tanto, $T^{-1}\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{y}$ para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

19. Para $z = a + ib \in \mathbb{C}$ defina $Tz = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Entonces $T(z_1 + z_2) = T((a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = Tz_1 + Tz_2$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $T(\alpha z) = T(\alpha(a + ib)) = T(\alpha a + i\alpha b) = (\alpha a, \alpha b) = \alpha(a, b) = \alpha Tz$. Por lo tanto, T es lineal. Por último, si $T(z) = (0, 0)$, entonces es claro que $z = a + ib = 0 + i0 = 0$. Por lo tanto T es 1-1 y como dim $\mathbb{C}$ (sobre los reales) = dim $\mathbb{R}^2 = 2$, T es un isomorfismo.

MATLAB 5.4

1. **b.** Explique por qué T es uno a uno y sobre $\mathbb{R}^4$.

c. $A = WV^{-1}$, donde la columna i de W es $\mathbf{w}_i$ y la columna i de V es $\mathbf{v}_i$. (Para ver por qué, utilice lo siguiente: $T(\mathbf{e}) = a_1\mathbf{w}_1 + \cdots + a_4\mathbf{w}_4$, donde las a_i son las coordenadas de $\mathbf{e}$ respecto a la base en V; cómo se encuentran las coordenadas, y que una combinación lineal de vectores se puede representar como multiplicación por la matriz cuyas columnas son los vectores.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .5 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & -9 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 38 & -18 & -2 & 10 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El núcleo será 0, la imagen será $\mathbb{R}^4$ y A es invertible ya que la forma escalonada reducida por renglones de A es la identidad.

d. La matriz para S será VW^{-1}, que es A^{-1}.

Problemas 5.5, página 525

1. $T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{y}$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \operatorname{sen}\theta + x_2 \cos\theta \\ x_1 \cos\theta - x_2 \operatorname{sen}\theta \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \operatorname{sen}\theta + y_2 \cos\theta \\ y_1 \cos\theta - y_2 \operatorname{sen}\theta \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1y_1(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + x_2y_2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + x_3y_3 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$$

(todos los demás términos en el producto escalar se eliminan).

3. Usando el teorema 1, $T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{y} = (AB\mathbf{x}) \cdot (AB\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (AB)^t(AB\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (B^tA^t)(AB)\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (B^{-1}A^{-1}AB)\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$

5. La misma demostración que para el teorema 2 excepto que se sustituye $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en lugar de $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ y $(T\mathbf{x}, T\mathbf{y})$ en lugar de $T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{y}$.

7. $T\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}$ donde α es un escalar y $\alpha \neq 0$ o 1.

9. $T\mathbf{x} \cdot T\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y}$ y $A^t = A^{-1}$ de manera que $A = (A^{-1})^t$. Entonces $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (I\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (A^{-1})^tA^{-1}\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{x} \cdot A^{-1}\mathbf{y} = S\mathbf{x} \cdot S\mathbf{y}$ de manera que $S\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$ es una isometría.

11. $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (a_0/\sqrt{2} - (\sqrt{5}/2\sqrt{2})a_2, \sqrt{(3/2)}\,a_1 - (3\sqrt{7}/2\sqrt{2})a_3, (3\sqrt{5}/2\sqrt{2})a_2, (5\sqrt{7}/2\sqrt{2})a_3)$

13. $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a/\sqrt{2} - (\sqrt{5}/2\sqrt{2})c, \sqrt{(3/2)}\,b - (3\sqrt{7}/2\sqrt{2})d, (3\sqrt{5}/2\sqrt{2})c, (5\sqrt{7}/2\sqrt{2})d)$

15. $A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 3 \\ -4-2i & 6+3i \end{pmatrix}$

17. Si A es hermitiana, entonces $A^* = A$. En particular, las componentes diagonales de A no se mueven cuando se toma la transpuesta, por lo que $\overline{a_{ii}} = a_{ii}$, que quiere decir que a_{ii} es real.

19. Sea $A^* = B = (b_{ij})$ y sea $\mathbf{c}_i$ la columna i de A. Entonces $AB = I = (\delta_{ij})$ donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Pero $\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a_{kj}} = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = \delta_{ij}$.

21. Como la i-ésima componente de $A\mathbf{x}$ es

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, se tiene $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\overline{y_i}$. Similarmente, si $A^* = B = (b_{ij})$, $(\mathbf{x}, A^*\mathbf{y}) =$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\overline{b_{ji}y_i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j\overline{b_{ji}y_i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_ja_{ij}\overline{y_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\overline{y_i} = (A\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

MATLAB 5.5

1. a. La rotación y la reflexión preservan la longitud.

c. Escriba una representación general para cada matriz y demuestre que la matriz multiplicada por su transpuesta es igual a la matriz identidad. Para la reflexión use $F = 2P - I$, donde primero se demuestra que $P = \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1v_2 \\ v_1v_2 & v_2^2 \end{pmatrix}$. Utilice el hecho de que $v_1^2 + v_2^2 = 1$.

d. Algunos puntos clave en el programa son

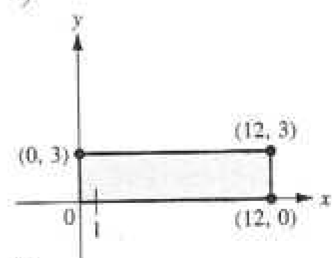
```
th = atan(v(2)/v(1))
```

```
R = [cos(th)  -sen(th);
        sen(th)  cos(th)];
F = 2*[v(1)*v
v(2)*v]- eye(2)
X = [1  0;0  -1]
```

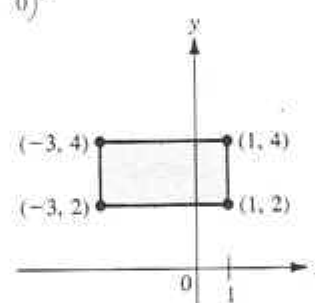
e. Para la reflexión, sea $F = 2P - I$, donde P es la misma que en el inciso c) anterior, con $v_1 = \cos(\alpha)$ y $v_2 = \text{sen}(\alpha)$ y simplifique.

Capítulo 5. Repaso, página 531

1. Lineal
3. No lineal, ya que $T(\alpha(x, y)) = T(\alpha x, \alpha y) = \alpha x/\alpha y = x/y = T(x, y) \neq \alpha T(x, y)$ a menos que $\alpha = 1$.
5. No lineal, ya que $T(p_1 + p_2) = 1 + p_1 + p_2$, pero
$$Tp_1 + Tp_2 = (1 + p_1) + (1 + p_2) = 2 + p_1 + p_2.$$
7. nu $T = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$; imagen $T = \mathbb{R}^2$; $\rho(T) = 2$, $\nu(T) = 0$
9. nu $T = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$; imagen $T = \mathbb{R}^2$; $\rho(T) = 2$, $\nu(T) = 1$
11. nu $T = \left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right\}$; imagen $T = M_{22}$; $\rho(T) = 4$, $\nu(T) = 0$
13. $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$; imagen $T = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$; nu $T = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$; $\rho(T) = \nu(T) = 1$
15. $\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\0 & 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$; imagen $T = \mathbb{R}^2$; nu $T = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$; $\rho(A) = \nu(A) = 2$
17. $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 1\\0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$; imagen $T = M_{22}$; nu $T = \{\mathbf{0}\}$; $\rho(T) = 4$, $\nu(T) = 0$
19. Expansión a lo largo del eje x con $c = 3$.
21. Corte a lo largo del eje y con $c = -2$
23. $\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$;



25. $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$;



27. $\begin{pmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}$
29. $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\-6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 22\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}$
31. $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}$

Capítulo 6

Problemas 6.1, página 546

1. $-4, 3$; $E_{-4} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$; $E_3 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}\right\}$

3. $i, -i$; $E_i = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2+i \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$;

$E_{-i} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2-i \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$

5. $-3, -3$; $E_{-3} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$;

la multiplicidad geométrica es 1

7. $0, 1, 3$; $E_0 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$;

$E_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$;

$E_3 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

9. $1, 1, 10$;

$E_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$;

$E_{10} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$;

la multiplicidad geométrica de 1 es 2

11. $1, 1, 1$; $E_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$;

la multipl. geom. es 1
(multipl. alg., 3)

13. $-1, i, -i$;

$E_{-1} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$;

$E_i = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$;

$E_{-i} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

15. $1, 2, 2$;

$E_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$;

$E_2 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$;

la multipl. geom de 2 es 1

17. a, a, a, a; $E_a = \mathbb{R}^4$; la multipl. geom. de a = multipl. alg. de $a = 4$

19. a, a, a, a;

$E_a = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$;

multipl. alg. de $a = 4$; multipl. geom. de $a = 2$.

21. Los valores propios son $a \pm ib$. Entonces

$[A - (a + ib)I]\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right\}$

$= \begin{pmatrix} -ib & b \\ -b & -ib \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

De manera similar,

$[A - (a - ib)I]\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

23. Sean $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ los valores propios de αA. Entonces, para cada i existe un vector $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ tal que $(\alpha A)\mathbf{v}_i = \beta_i\mathbf{v}_i$. Así, $(\alpha A - \beta_i I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, o sea, $\alpha\left(A - \frac{\beta_i}{\alpha}I\right)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, lo que implica que $\det\left(A - \frac{\beta_i}{\alpha}I\right) = 0$. Por lo tanto, $\frac{\beta_i}{\alpha}$ es un valor propio de A y $\frac{\beta_i}{\alpha} = \lambda_j$ para alguna j y $\beta_i = \alpha\lambda_j$. Entonces cada valor propio de αA es de la forma $\alpha\lambda_j$. Inversamente, si $\mu_i = \alpha\lambda_i$, seleccione un vector $\mathbf{v}_i$ tal que $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$. Entonces $(\alpha A)\mathbf{v}_i = \alpha\lambda_i\mathbf{v}_i$

$= \mu_j \mathbf{v}_j$, de manera que μ_j es un valor propio de αA.

25. $\det(A - \lambda_j I) = 0$ y $\det A^{-1} \neq 0$ debido a que existe $(A^{-1})^{-1} = A$. Entonces $0 = \det(A - \lambda_j I)\det A^{-1} = \det[(A - \lambda_j I)A^{-1}] = \det(I - \lambda_j A^{-1}) = \det \lambda_j \left(\frac{1}{\lambda_j} I - A^{-1}\right) = \lambda_j^n \det\left(\frac{1}{\lambda_j} I - A^{-1}\right)$. En el último paso se usó el hecho de que $\det \alpha A = \alpha^n \det A$ si A es una matriz de $n \times n$ (vea el problema 2.2.28), y $\lambda_j \neq 0$ por las partes **i)** y **x)** del teorema 6. Así,

$$\det\left(A^{-1} - \frac{1}{\lambda_j} I\right) = (-1)^n \det\left(\frac{1}{\lambda_j} I - A^{-1}\right) = 0$$

y $\frac{1}{\lambda_j}$ es un valor propio de A^{-1}. Inversamente, si μ_j es un valor propio de A^{-1}, entonces como $(A^{-1})^{-1} = A$, $\frac{1}{\mu_j}$ es un valor propio de A, por lo que $\frac{1}{\mu_j} = \lambda_j$ para alguna j; es decir, $\mu_j = \frac{1}{\lambda_j}$. Entonces, todos los valores propios de A^{-1} son de la forma $\frac{1}{\lambda_j}$. De manera alternativa, si $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{v} = A^{-1}\lambda\mathbf{v}$, es decir, $A^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$ y $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de A^{-1}.

27. Como $\det(A - \lambda_j I) = 0$, se ve que $\det(A^2 - \lambda_j^2 I) = \det(A - \lambda_j I)(A + \lambda_j I) = \det(A - \lambda_j I)\det(A + \lambda_j I) = 0$. Así, λ_j^2 es un valor propio de A^2. Inversamente, si μ_j es un valor propio de A^2, entonces $0 = \det(A^2 - \mu_j I) = \det[(A - \sqrt{\mu_j} I)(A + \sqrt{\mu_j} I)]$ de manera que $\det(A - \sqrt{\mu_j} I)$ o bien $\det(A + \sqrt{\mu_j} I) = 0$. En cualquier caso, $\pm\sqrt{\mu_j}$ es un valor propio de A de manera que $\mu_j = (\pm\sqrt{\mu_j})^2 = (\pm\lambda_j)^2 = \lambda_j^2$ para alguna j.

29. Del problema 28, $a_i A^i \mathbf{v} = a_i \lambda^i \mathbf{v}$ de manera que $p(A)\mathbf{v} = \sum_{i=0}^{n} (a_i A^i)\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} (a_i A^i \mathbf{v}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i \mathbf{v}) = \left(\sum a_i \lambda^i\right)\mathbf{v} = p(\lambda)\mathbf{v}$.

31. Si A es diagonal, entonces también lo es $A - \lambda I$ de manera que, por el teorema 2.1.1, $\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda) = 0$ cuando $\lambda = a_{ii}$ para alguna $i = 1, 2, \ldots, n$.

33. $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ donde $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Entonces $\overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}}$, lo que implica que $\overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{v}}$. Pero si A es real, entonces $\overline{A} = A$. Así, $A\overline{\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{v}}$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ de manera que $\overline{\lambda}$ es un valor propio de A con vector propio $\overline{\mathbf{v}}$. Aquí se usó el hecho, sencillo de verificar, de que $\overline{A\mathbf{v}} = \overline{A}\overline{\mathbf{v}}$.

35. Sea $\lambda = a + bm$; entonces $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -bm & b \\ c & d - a - bm \end{pmatrix}$ y $\det(A - \lambda I) = b^2m^2 + b(a - d)m - bc = b[bm^2 + (a - d)m - c] = 0$, por lo que λ es un valor propio de A. De manera similar,

$$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c - m(a - d) - bm^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo que $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ es un vector propio.

37. valores propios: 12.7089974455, 1.20237103639, $-0.955684240966 \pm 0.628878731063i$ correspondientes a los vectores propios:

$$\begin{pmatrix} -0.621427151885 \\ -0.317162132863 \\ -0.600741512354 \\ -0.648893720131 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.716877837391 \\ -0.102986436421 \\ 0.460859947991 \\ -0.470715276803 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0.045437941761 \\ -0.489156858693 \\ 0.568554600861 \\ 0.189095737443 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} -3.192511943 \\ -1.06860325542 \\ -1.47374850265 \\ 3.31095939015 \end{pmatrix}$$

Observe que en la TI-85, $a + bi$ se despliega como (a, b).

39. valores propios: −0.070207416895, 0.013167178735, 0.13104023816 correspondientes a los vectores propios:

$$\begin{pmatrix} -0.8690418183 \\ -0.052743032554 \\ 0.404187510937 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.13177594421 \\ -0.765119595137 \\ 0.134236382997 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.038878374501 \\ 1.21858619393 \\ -0.985517966726 \end{pmatrix}$$

41. 6 **43.** 3 **45.** 1

MATLAB 6.1

1. a. al c. Por ejemplo, para demostrar que $a\mathbf{y} + b\mathbf{z}$ es un vector propio con valor propio 3: **y = [3;4;5];**
z = [4;9;13]; a = 3*rand(1);
b = 4*(2*rand(1) − 1);
w = a*y + b*z;
ans=(A − 3*eye(3))*w;.
Verifique que **ans = 0**.

d. Los vectores propios para un valor propio dado forman un subespacio

3. a. al c. 1.) Polinomio característico = $\lambda^2 + \lambda - 12$, los valores propios son $\lambda = -4$ con vector propio $(1 \quad 1)^t$ y $\lambda = 3$ con vector propio $(-.4 \quad 1)^t$. **6.)** Polinomio característico = $\lambda^2 - 4\lambda + 13$, los valores propios son $\lambda = 2 + 3i$ con vector propio $(-.2 \quad -.6i \quad 1)^t$ y $\lambda = 2 - 3i$ con vector propio $(-.2 + 6i \quad 1)^t$. **8.)** Polinomio característico = $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$, los valores propios son $\lambda = 2$ con vector propio $(1 \quad 3 \quad 1)^t$, $\lambda = 1$ con vector propio $(3 \quad 2 \quad 1)^t$, y $\lambda = -1$ con vector propio $(1 \quad 0 \quad 1)^t$. **13.)** Polinomio característico = $-\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1$, los valores propios son $\lambda = -1$ con vector propio $(0 \quad -1 \quad 1)^t$, $\lambda = i$ con vector propio $(1 + i \quad 1 \quad 1)^t$ y $\lambda = -i$ con vector propio $(1 - i \quad 1 \quad 1)^t$. Observe que $(-1)^n$ se necesita porque **poly** encuentra $\det(\lambda I - A)$ en lugar de $\det(A - \lambda I)$.

e. **D(k,k)** es un valor propio para A con vector propio **V(:,k)**. Para normalizar un vector **x** para que tenga norma 1, encuentre **x/norm(x)**.

5. a. Los polinomios característicos de A y A^t son los mismos. Por lo tanto, los valores propios serán los mismos.

b. *Sugerencia:* Debe considerar $\det(A^t - \lambda I)$. ¿De qué manera se relaciona $A^t - \lambda I$ con $(A - \lambda I)^t$? ¿De qué manera se relaciona $\det(C^t)$ con $\det(C)$?

7. Conclusión final: si **x** es un vector propio de A con valor propio λ, entonces **x** es un vector propio de A^2 con valor propio λ^2. En el inciso c), compare la forma escalonada por renglones de $A - \lambda I$ y $A^2 - \lambda^2 I$ para ver que los vectores propios serán los mismos. *Sugerencia:* Suponga que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, reescriba y simplifique $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x})$.

9. La matrices simétricas tendrán valores propios reales. Las matrices simétricas de la forma AA^t tendrán valores propios reales no negativos.

11. a. $4 \le \chi \le 4$, por lo que se necesitan cuatro colores.

b. $3.13 \le \chi \le 4.44$, por lo que se necesitan cuatro colores.

c. $3.2 \le \chi \le 4.6$, por lo que se necesitan cuatro colores.

d. $2.23 \le \chi \le 3$, por lo que se necesitan tres colores.

e. $2.5 \le \chi \le 4$, por lo que se necesitan cuatro colores. Tendrá que experimentar para ver si se puede o no hacer con tres.

Problemas 6.2. página 561

1.

n	$p_{j,n}$	$p_{a,n}$	T_n	$p_{j,n}/p_{a,n}$	T_n/T_{n-1}
0	0	12	12	0	—
1	36	7	43	5.14	3.58
2	21	19	40	1.11	0.930
5	104	45	149	2.31	—
10	600	291	891	2.06	—
19	16 090	7737	23827	2.08	—
20	23 170	11140	34310	2.08	1.44

Observe que los valores propios son 1.44 y −0.836. Los vectores propios correspondientes son $\begin{pmatrix}2.09\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-3.57\\1\end{pmatrix}$.

3.

n	$p_{j,n}$	$p_{a,n}$	T_n	$p_{j,n}/p_{a,n}$	T_n/T_{n-1}
0	0	20	20	0	—
1	80	16	96	5	4.8
2	64	69	133	0.928	1.39
5	1092	498	1590	2.19	—
10	42 412	22 807	65 219	1.86	—
19	3.69×10^7	1.95×10^7	5.64×10^7	1.89	—
20	7.82×10^7	4.14×10^7	11.96×10^7	1.89	2.12

Los valores propios son 2.12 y −1.32 con vectores propios correspondientes $\begin{pmatrix}1.89\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-3.03\\1\end{pmatrix}$.

5. De la ecuación (9), $p_n \approx a_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1$ para n grande. Si $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, entonces $\frac{p_{j,n}}{p_{a,n}} \approx \frac{a_1\lambda_1^n x}{a_1\lambda_1^n y} = \frac{x}{y}$; pero $\begin{pmatrix}-\lambda_1 & k\\ \alpha & \beta-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ de manera que $-\lambda_1 x + ky = 0$ y $\frac{x}{y} = \frac{k}{\lambda_1}$. Entonces $\frac{p_{j,n}}{p_{a,n}} \approx \frac{x}{y} \approx \frac{k}{\lambda_1}$ para n grande.

MATLAB 6.2

1. a. Después de dos años (redondeando), hay 21 jóvenes y 18 adultos; después de 5 años, 103 jóvenes y 44 adultos; después de 10 años, 587 jóvenes y 282 adultos, y después de 20 años, 21 965 jóvenes y 10 513 adultos.

   b. $p_{j,n}/p_{a,n}$ es 2.0895 o 2.0894 para n = 21 a 25 y T_n/T_{n-1} es 1.4358 para n = 21 a 25. Estos resultados son los límites correspondientes que se puede concluir.

   c. Los valores propios son 1.4358 y −.8358. El valor propio más grande es igual al límite proyectado de T_n/T_{n-1}. La población crece ya que $T_n \approx 1.4358T_{n-1}$ y 1.4358 es mayor que 1. Las razones w_1/w_2, el límite de $p_{j,n}/p_{a,n}$ y k/λ son todas 2.0895. La razón de pájaros jóvenes a adultos a la larga se puede encontrar mediante la razón de las componentes del vector propio asociado al valor propio más grande o se puede encontrar dividien-

do la tasa de nacimiento entre el valor propio más grande.

3. a. El valor propio más grande de la matriz es 1.2718, el otro valor propio es estrictamente menor en magnitud y existe un vector propio para el valor propio más grande con todas las componentes positivas. Bajo estas condiciones se ha visto que T_n/T_{n-1} se acerca al valor propio más grande.

b. *Sugerencia:* la población de adultos en el año siguiente consistirá en los nuevos adultos de la población de jóvenes + los adultos que normalmente sobreviven − los adultos muertos por la caza. Los adultos muertos por la caza son $h \times$ (población de adultos).

c. Las componentes de los vectores $A^n\mathbf{p}_0$ serán cada vez más pequeñas, decreciendo hasta cero. El valor propio más grande es menor que 1.

d. El valor de h que mantiene la población estable a la larga es $h = .4$. Para esta h, el valor propio más grande es 1.

5. a. La componente i de $P^m\mathbf{x}$ representa el número de casas que compran el producto i después de n meses. Cuando n crece, $P^m\mathbf{x}$ parece acercarse a un vector fijo, (900 500 1600)^t, lo que implica que el porcentaje de mercado de cada producto se estabiliza a través del tiempo.

b. El valor propio más grande es 1 y los otros valores propios son estrictamente menores en magnitud. Cualquier vector inicial no será perpendicular al vector propio correspondiente al valor propio de 1 (debe explicar por qué), de manera que la extensión de la teoría dice que $P^m\mathbf{x}$ se acercaría a algún múltiplo fijo del vector propio. Se ve que el vector límite $\mathbf{y}$ es igual a 3000 × (el vector propio normalizado de manera que las componentes sumen 1).

c. El valor propio más grande es 1. Se encuentra 1000**w/sum(w)**, donde **w** es el vector propio asociado con el valor propio 1; esto da un vector en la dirección del vector propio cuyas componentes suman 1000. Esta distribución a la larga tiene aproximadamente 333 automóviles en la oficina 1, 238 en la oficina 2 y 429 en la 3.

d. P^t tiene un valor propio de 1 y por lo tanto también P.

Problemas 6.3, página 572

1. Sí; $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$,

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Sí; $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix}$;

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

5. Sí;

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1+3i & -1-3i \end{pmatrix};$$

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix}$$

7. Sí; $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9. Sí; $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

$$C^{-1}AC=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

11. $C=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$;

$$C^{-1}AC=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

13. No, ya que 1 es un valor propio de multiplicidad algebraica 3 y multiplicidad geométrica 1

15. Sí;

$$C=\begin{pmatrix}0&-1&1&1\\0&1&1&1\\1&0&1&-1\\0&1&-1&1\end{pmatrix};$$

$$C^{-1}AC=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&6\end{pmatrix}$$

17. $B=C^{-1}AC$ de manera que $B^n=(C^{-1}AC)(C^{-1}AC)\cdots(C^{-1}AC)=C^{-1}A(CC^{-1})A(CC^{-1})\cdots AC=C^{-1}AIA\cdots IAC=C^{-1}AA\cdots AC=C^{-1}A^nC.$

19. $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

21. Si $D=C^{-1}AC$, entonces, igual que en el problema 17, $D^n=(C^{-1}AC)\times(C^{-1}AC)\cdots(C^{-1}AC)=C^{-1}A^nC$ de manera que $A^n=CD^nC^{-1}$.

23. Es claro que A tiene c como valor propio de multiplicidad algebraica n. Así, si A es diagonalizable, debe hacer una matriz invertible E tal que $E^{-1}AE=\text{diag}(c,c,\ldots,c)=cI$ de manera que $A=E(cI)E^{-1}=cEIE^{-1}=cI$.

25. Si A y B tienen valores propios distintos, entonces ambos tienen n vectores propios linealmente independientes, y se tiene $D_1=C_1^{-1}AC_1$ y $D_2=C_2^{-1}BC_2$.

i. Si A y B tienen los mismos vectores propios, entonces $C_1=C_2=C$ y $AB=(CD_1C^{-1})\times(CD_2C^{-1})=CD_1D_2C^{-1}=CD_2D_1C^{-1}=(CD_2C^{-1})\times(CD_1C^{-1})=BA$ (ya que las matrices diagonales del mismo orden siempre son conmutativas).

ii. Si $BA=AB$, sea $\mathbf{x}$ un vector propio de B correspondiente a λ. Entonces $BA\mathbf{x}=AB\mathbf{x}=A(\lambda\mathbf{x})=\lambda A\mathbf{x}$ de manera que $y=A\mathbf{x}$ es un vector propio de B correspondiente a λ. Así, $A\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}$ son linealmente dependientes así que hay un escalar μ con $A\mathbf{x}=\mu\mathbf{x}$. Pero esto muestra que $\mathbf{x}$ también es un vector propio de A. Así todo vector propio de B es un vector propio de A. Un argumento similar muestra que todo vector propio de A es un vector propio de B.

Los elementos en los problemas 27 y 29 están dados con cuatro cifras decimales.

27. $\begin{pmatrix}-.6214&.7169&.0454-3.1925i&.0454+3.1925i\\-.3172&-.1030&-.4892-1.0686i&-.4892+1.0686i\\-.6007&.4609&.5686-1.4737i&.5686+1.4737i\\-.6489&-.4707&.1891+3.3110i&.1891-3.3110i\end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix}-.8690&-1.1318&.0389\\-.0527&-.7651&1.2186\\.4042&.1342&-.9855\end{pmatrix}$

MATLAB 6.3

1. Este problema ilustra que CAC^{-1} y A tienen los mismo valores propios.

3. a. $D=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}1&3&4\\1&4&9\\1&5&13\end{pmatrix}$

b. $D=\begin{pmatrix}2+i&0&0&0\\0&2+i&0&0\\0&0&2-i&0\\0&0&0&2-i\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\i&i&-i&-i\\0&2&0&2\\-i&1+i&i&1-i\end{pmatrix}$

5. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ dice que A expande o comprime a $\mathbf{x}$. Si A es diagonalizable, entonces A expande o comprime cada vector propio por un factor dado por el valor propio asociado.
   c. Expande la dirección dada por $(1\ -1)^t$ en un factor de 2 y expande la dirección dada por $(1\quad 1)^t$ en un factor de 3. Para bosquejar la imagen del rectángulo, tome la diagonal que va de $(-1, -1)$ a $(1, 1)$ y expanda por un factor de 3 en cada dirección; tome la otra diagonal y expanda por un factor de 2 en cada dirección.
   d. i. Ni expande ni comprime en la dirección de $(1\quad 1\quad 1)^t$, expande en un factor de 2 en la dirección de $(3\quad 4\quad 5)^t$, y comprime en un factor de .5 en la dirección de $(4\quad 9\quad 13)^t$.

9. Sea $\mathbf{u}$ un vector propio correspondiente a λ con $|\mathbf{u}| = 1$. Entonces $Q\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ y $1 = |\mathbf{u}| = |Q^{-1}Q\mathbf{u}| = |\lambda Q^{-1}\mathbf{u}| = |\lambda Q^t\mathbf{u}| = |\lambda Q\mathbf{u}| =$
   (ya que Q es simétrica)
   $|\lambda^2\mathbf{u}| = \lambda^2|\mathbf{u}| = \lambda^2$. Entonces $\lambda^2 = 1$ y $\lambda = \pm 1$.

11. $1 = \det I = \det(Q^{-1}Q) = \det(Q^tQ) = (\det Q^t)(\det Q) = (\det Q)^2$ – ya que $\det A^t = \det A$ para cualquier matriz A. Así,

   $$\det Q = \pm 1 \text{ y } \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = Q^t =$$

   $$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{\det Q} & -\dfrac{b}{\det Q} \\ -\dfrac{c}{\det Q} & \dfrac{a}{\det Q} \end{pmatrix}.$$

   Si $\det Q = 1$, entonces $c = -b$. Si $\det Q = -1$, entonces $c = b$.

13. Si la matriz A de 2×2 tiene vectores propios ortogonales, entonces A es ortogonalmente diagonalizable, lo que significa que A es simétrica por el teorema 4.

15. Sea λ un valor propio de A con vector propio $\mathbf{v}$ y suponga que $A^* = A$. Entonces $\lambda(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (A\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, A^*\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, A\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \lambda\mathbf{v}) = \overline{\lambda}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$. Como $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, esto quiere decir que $\lambda = \overline{\lambda}$ de manera que λ es real.

17. Use el problema 16 después de demostrar que a cada valor propio de multiplicidad algebraica k le corresponden k vectores propios ortonormales. Sea Q obtenida exactamente igual que en la demostración del teorema 3. Recuerde que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}_1 \cdot \overline{\mathbf{v}}_1 + \cdots + \mathbf{u}_n \cdot \overline{\mathbf{v}}_n$, $Q^t = \overline{Q}^{-1}$ y A es similar a $Q^tA\overline{Q}$ o $\overline{Q}^tAQ$. $|Q^tA\overline{Q} - I| = |A - I|$; $\overline{Q}^tAQ = (\overline{Q}^tA)Q$

   $$= \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{u}}_1^tA \\ \overline{\mathbf{u}}_2^tA \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{u}}_n^tA \end{pmatrix}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$$

Problemas 6.4, página 582

1. $Q = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $\quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

3. $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

5. $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1/\sqrt{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$,

   $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

7. $Q = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$,

   $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1^t \\ \bar{\mathbf{u}}_2^t \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{u}}_n^t \end{pmatrix} (A^*\mathbf{u}_1, A^*\mathbf{u}_2, \ldots, A^*\mathbf{u}_n).$$

Ahora bien, $(\bar{\mathbf{u}}_1^t, A^*\mathbf{u}_1) = (\bar{\mathbf{u}}_1^t, A\mathbf{u}_1) = (\bar{\mathbf{u}}_1^t, \lambda_1\mathbf{u}_1) = \bar{\lambda}_1(\bar{\mathbf{u}}_1^t, \mathbf{u}_1) = \bar{\lambda}_1 = \lambda_1$ (por el problema 15) y como $(\bar{\mathbf{u}}_1^t, \mathbf{u}_1) = \bar{\mathbf{u}}_1^t \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 = 1 = \overline{\mathbf{u}_1^t \cdot \mathbf{u}_1}$; entonces $\bar{Q}^tAQ =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \bar{\mathbf{u}}_1^tA\mathbf{u}_2 & \ldots & \bar{\mathbf{u}}_1^tA\mathbf{u}_n \\ 0 & \bar{\mathbf{u}}_2^tA\mathbf{u}_2 & \ldots & \bar{\mathbf{u}}_2^tA\mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bar{\mathbf{u}}_n^tA\mathbf{u}_2 & \cdots & \bar{\mathbf{u}}_n^tA\mathbf{u}_n \end{pmatrix}$$

$\bar{\mathbf{u}}_1^tA\mathbf{u}_j = A\bar{\mathbf{u}}_1^t \cdot \bar{\mathbf{u}}_j = \overline{A\mathbf{u}_1^t \cdot \mathbf{u}_j} = 0$ si $j \neq 1$. Ahora $\overline{(\bar{Q}^tAQ)^t} = \overline{Q^tA^t(\bar{Q})^t} = \overline{Q^tA^t\bar{Q}} = \bar{Q}^t\bar{A}^tQ = \bar{Q}^tAQ$, ya que $\bar{A}^t = A^* = A$. Entonces, $\bar{Q}^tAQ$ es hermitiana, que quiere decir que los ceros en el primer renglón de $\bar{Q}^tAQ$ deben ser los mismos que los ceros en la primera columna. El resto de la demostración sigue como en la prueba del teorema 3, donde $\bar{Q}^t$ sustituye a Q^t.

19. $U = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1+i & 1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}$;

$U^*AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

MATLAB 6.4

1. a. *Ingredientes*: debido a la elección aleatoria, se esperan valores propios distintos. Cualquier múltiplo de un vector propio es un vector propio. Los vectores propios para valores propios distintos de una matriz simétrica son ortogonales.

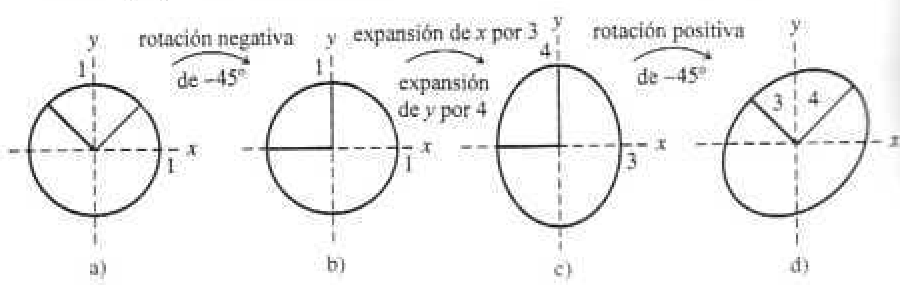
   b. El comando **eig** produce un conjunto de vectores propios ortonormales. Utilice este conjunto para Q. Como Q será entonces ortogonal, Q^t será igual a Q^{-1}.

3. a. Hechos básicos a usar: si se multiplica una columna o renglón de una matriz por c se multiplica el determinante por c. Un múltiplo de un vector propio es todavía un vector propio para el mismo valor propio.

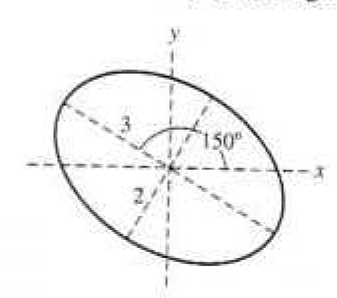
   b. Hechos básicos a usar: una matriz ortogonal tiene columnas ortonormales; un vector perpendicular a $(a \;\; b)^t$ es ya sea $(b \;\; -a)^t$ o $(-b \;\; a)^t$ (o un múltiplo de éstos). Use el hecho de que el determinante es igual a 1.

   c. Como $Q^t = Q^{-1}$, primero se hace una rotación negativa de un ángulo, luego se expande o comprime a lo largo de los ejes x y y como lo indica la diagonal de la matriz, y después se rota de regreso, es decir, se hace una rotación positiva del mismo ángulo.

   d. i. Se hace una rotación negativa de $\theta = -45°$, se expande por 3 a lo largo del eje x y se expande por 4 lo largo del eje y, después se hace una rotación positiva de θ. Vea las siguientes figuras. Esto tiene el mismo efecto que expandir por 3 en la dirección $(1 \;\; -1)^t$ y expandir por 4 en la dirección de $(1 \;\; 1)^t$.



ii. Rotación negativa de $\theta =$ 150°, expansión por 3 a lo largo del eje x y expansión por 2 a lo largo del eje y, y después rotación positiva de θ. La imagen del círculo unitario se bosqueja en la figura.



Problemas 6.5, página 594

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5;$

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{26-6\sqrt{13}}} & \dfrac{2}{\sqrt{26+6\sqrt{13}}} \\ \dfrac{3-\sqrt{13}}{\sqrt{26-6\sqrt{13}}} & \dfrac{3+\sqrt{13}}{\sqrt{26+6\sqrt{13}}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.9571 & 0.2898 \\ -0.2898 & 0.9571 \end{pmatrix};$$

$$\frac{x'^2}{\left(\dfrac{10}{\sqrt{13}+3}\right)} - \frac{y'^2}{\left(\dfrac{10}{\sqrt{13}-3}\right)} = 1;$$

hipérbola; $\theta = 5.989 = 343°$

3. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9;$

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{5+\sqrt{41}}{\sqrt{82+10\sqrt{41}}} & \dfrac{5-\sqrt{41}}{\sqrt{82-10\sqrt{41}}} \\ \dfrac{4}{\sqrt{82+10\sqrt{41}}} & \dfrac{4}{\sqrt{82-10\sqrt{41}}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.9436 & -0.3310 \\ 0.3310 & 0.9436 \end{pmatrix};$$

$$\frac{x'^2}{\left(\dfrac{18}{\sqrt{41}+3}\right)} - \frac{y'^2}{\left(\dfrac{18}{\sqrt{41}-3}\right)} = 1;$$

hipérbola; $\theta \approx 0.3374 \approx 19.33°$

5. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a > 0;$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$\dfrac{x'^2}{2a} - \dfrac{y'^2}{2a} = 1$; hipérbola;

$\theta = 7\pi/4 = 315°$.

7. Lo mismo que en el problema 5, excepto que ahora se tiene una hipérbola con los papeles de x' y y' cambiados; como $a < 0$, se tiene

$$\frac{y'^2}{(-2a)} - \frac{x'^2}{(-2a)} = 1$$

9. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0;$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$y'^2 = 0$, que es la ecuación de una recta que pasa por el origen; $\theta = \pi/4 = 45°$.

11. $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 36;$

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{20+2\sqrt{10}}} & \dfrac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{20-2\sqrt{10}}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{20+2\sqrt{10}}} & \dfrac{3}{\sqrt{20-2\sqrt{10}}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.8112 & -0.5847 \\ 0.5847 & 0.8112 \end{pmatrix};$$

$$\frac{x'^2}{\left(\dfrac{36}{4-\sqrt{10}}\right)} + \frac{y'^2}{\left(\dfrac{36}{4+\sqrt{10}}\right)} = 1;$$

elipse; $\theta \approx 0.6245 \approx 35.78°$

13. $\begin{pmatrix} 6 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -7;$

$$Q = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{26} & -1/\sqrt{26} \\ 1/\sqrt{26} & 5/\sqrt{26} \end{pmatrix};$$

$\dfrac{y'^2}{(14/13)} - \dfrac{x'^2}{(14/13)} = 1$; hipérbola;

$\theta \approx 0.197 \approx 11.31°$

15. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$;

$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$;

$-x'^2 + 2y'^2 + 2z'^2$

17. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$;

$Q = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$;

$3y'^2 + 6z'^2$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \frac{7}{2} \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ \frac{7}{2} & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3 & -2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -2 & -6 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta \\ x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Entonces la ecuación cuadrática $ax'^2 + bx'y' + cy'^2$ se convierte en $a(x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta)^2 + b(x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta) \times (x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta) + c(x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta)^2$; el término del producto cruzado es $-2axy\,(\text{sen}\,\theta\cos\theta + bxy \times [\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta] + 2cxy \times \text{sen}\,\theta\cos\theta = xy[-a\,\text{sen}\,2\theta + b\cos 2\theta + c\,\text{sen}\,2\theta] = 0$ de manera que $(c-a)\text{sen}\,2\theta + b\cos 2\theta = 0$ y $\frac{a-c}{b} = \frac{\cos 2\theta}{\text{sen}\,2\theta} = \cot 2\theta$.

25. Suponga que $ax^2 + bxy + cy^2$ se convierte en $a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$ por una rotación. Sean

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{pmatrix}$$

Existe una matriz ortogonal Q tal que $A = QA'Q^t$ y Q es también una matriz de rotación. Entonces $\det A = \det Q \det A' \det Q^t = \det QQ^t \det A' = \det A'$ ya que $QQ^t = I$. Pero $\det A = ac - \frac{b^2}{4}$ y $\det A' = a'c' - \frac{b'^2}{4}$. Por último, como A y A' son similares, tienen los mismos valores propios. Pero la suma de los valores propios de A es $a + c$, mientras que la suma de los valores propios de A' es $a' + c'$. Por lo tanto, $a + c = a' + c'$.

27. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de A. Entonces, eliminando los términos del producto cruzado, se tiene $F(\mathbf{x}) = F'(\mathbf{x}') = \lambda_1\mathbf{x}'^2_1 + \lambda_2\mathbf{x}'^2_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}'^2_2$ donde $\mathbf{x}' = Q^t\mathbf{x}$. Si $\lambda_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $F'(\mathbf{x}') \geq 0$. Si $F'(\mathbf{x}') \geq 0$, entonces $\lambda_i \geq 0$ ya que si no, existe una λ_j con $\lambda_j < 0$. Sea $\mathbf{x}^*$ el vector con ceros en todas las posiciones excepto la j-ésima donde hay un 1. Entonces $F(\mathbf{x}^*) = \lambda_j < 0$, lo cual es una contradicción.

29. Definida negativa

31. Definida positiva

33. Indefinida

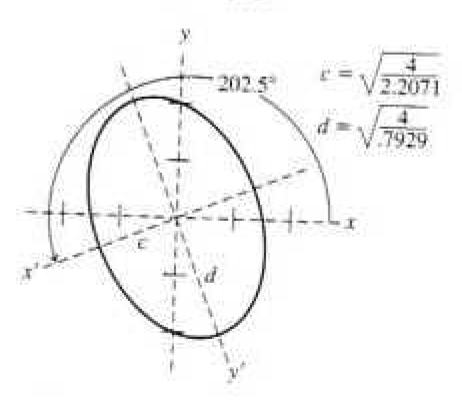
35. Definida negativa

37. **i.** Si $\det A \neq 0$, entonces ni λ_1 ni λ_2 son cero. Así, con $d = 0$, la ecuación (22) se convierte en $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 x'^2 = 0$. Si ahora tanto λ_1 como λ_2 son positivos o negativos, la ecuación se satisface sólo cuando $x' = 0$ y $y' = 0$, lo que corresponde al punto (0, 0). Si λ_1 y λ_2 tienen signos opuestos, entonces las ecuaciones se convierten en $x' = \pm\sqrt{\frac{\lambda_2}{-\lambda_1}}\,y'$, que son las ecuacio-

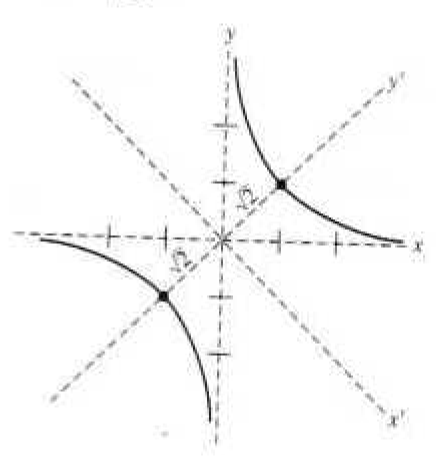
nes de dos rectas. Si det $A = 0$, entonces una de las dos, λ_1 o λ_2 es cero, y la ecuación se convierte en $x' = 0$ o $y' = 0$, cada una de las cuales es la ecuación de una recta.

MATLAB 6.5

1. Para el problema 10, $A = \begin{pmatrix} 2 & .5 \\ .5 & 1 \end{pmatrix}$. El ángulo de rotación es $\theta = 202.5$ y la ecuación es $2.2071x'^2 + .7929y'^2 = 4$. Se trata de una elipse y $\det(A) > 0$. Se muestra el bosquejo.



3. Para el problema 4, $A = \begin{pmatrix} 0 & .5 \\ .5 & 0 \end{pmatrix}$. El ángulo de rotación es $\theta = 315°$ y la ecuación es $-.5x'^2 + .5y'^2 = 1$. Es una hipérbola y $\det(A) < 0$. Se muestra el bosquejo.



Problemas 6.6, página 603

1. No 3. No 5. Sí 7. No
9. Sí 11. No 13. Sí

15. I

17. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

19. a. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$ un vector fijo que no es vector propio. Como la multiplicidad geométrica del valor propio λ es uno, $\mathbf{x}$ no es un múltiplo de $\mathbf{v}_1$, donde $\mathbf{v}_1$ es un vector propio. Entonces $\mathbf{x}$ y $\mathbf{v}_1$, son linealmente independientes. Sea $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{x}$. Suponga que $\mathbf{w} = (A - \lambda I)\mathbf{x}$. Entonces $A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{x}$. Sea $B = A - (c_2 + \lambda)I$. De manera que $B\mathbf{x} = c_1 v_1$. Suponga que $c_2 \neq 0$. Entonces $\lambda + c_2$ no es un valor propio ya que λ es el único valor propio. Se tiene $\det B = \det[A - (\lambda + c_2)I] \neq 0$. Entonces B^{-1} existe, $\mathbf{x} = c_1 B^{-1}\mathbf{v}_1$ y $\lambda\mathbf{x} = c_1 B^{-1}\lambda\mathbf{v}_1 = c_1 B^{-1}A\mathbf{v}_1$. Como $A = B + (c_2 + \lambda)I$, $\lambda\mathbf{x} = c_1[B^{-1}B + (c_2 + \lambda)B^{-1}]\mathbf{v}_1 = c_1\mathbf{v}_1 + c_1(c_2 + \lambda)B^{-1}\mathbf{v}_1 = c_1\mathbf{v}_1 + (c_2 + \lambda)B^{-1}B\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}$. Por lo tanto, $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $c_1 = c_2 = 0$ porque $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{x}$ son linealmente independientes. Esto contradice la suposición anterior de que $c_2 \neq 0$ así que $\mathbf{w} = (A - \lambda I)\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1$. Sea $\frac{1}{c_1}\mathbf{x} = \mathbf{v}_2$; entonces $(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$.

b. Sea $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^3$ donde $\mathbf{y}$ no es un vector propio de A; se puede elegir $\mathbf{y}$ linealmente independiente de $\mathbf{v}_2$ (ya es independiente de $\mathbf{v}_1$) de manera que $\mathbf{z} = d_1\mathbf{v}_2 + d_2\mathbf{y}$ no sea un vector propio. Escriba $\mathbf{z}$ como $\mathbf{z} = (A - \lambda I)\mathbf{y}$. Entonces $A\mathbf{y} - \lambda\mathbf{y} = d_1\mathbf{v}_2 + d_2\mathbf{y}$. Sea $D = A - (d_2 + \lambda)I$ de manera que $D\mathbf{y} = d_1\mathbf{v}_2$, como $A\mathbf{y} - (\lambda I)\mathbf{y} - d_2\mathbf{y} = d_1\mathbf{v}_2$. Suponga que $d_2 \neq 0$; entonces $d_2 + \lambda$ no es un valor propio.

Es evidente que det $D \neq 0$, D^{-1} existe, $\mathbf{y} = d_1 D^{-1}\mathbf{v}_2$, y $\lambda\mathbf{y} = d_1 D^{-1}\lambda\mathbf{v}_2$. Entonces $\lambda\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2$; $\lambda\mathbf{y} = d_1 D^{-1}(\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2) = d_1 D^{-1}\mathbf{v}_1 - d_1 D^{-1}A\mathbf{v}_2$. $A = D + (d_2 + \lambda)I$. $\lambda\mathbf{y} = d_1 D^{-1}\mathbf{v}_1 - d_1\mathbf{v}_2 - d_1 d_2 D^{-1}\mathbf{v}_2 - d_1 D^{-1}\lambda\mathbf{v}_2 = d_1 D^{-1}\mathbf{v}_1 - d_1 D^{-1}A\mathbf{v}_2 - d_1\mathbf{v}_2 - d_1 d_2 D^{-1}\mathbf{v}_2 = d_1 D^{-1}\lambda\mathbf{v}_2 - d_1(\mathbf{v}_2 + d_2 D^{-1}\mathbf{v}_2) = \lambda\mathbf{y} - d_1(I + d_2 D^{-1})\mathbf{v}_2$. Así, $\mathbf{0} = d_1(I + d_2 D^{-1})\mathbf{v}_2$. $d_1 \neq 0$, de otra manera $\lambda + d_2$ sería un valor propio y $\mathbf{y}$ un vector propio. Entonces $(d_2 DD^{-1} + D)\mathbf{v}_2 = D\mathbf{0} = \mathbf{0}$. $d_2\mathbf{v}_2 + [A - (d_2 + \lambda)I]\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. $d_2\mathbf{v}_2 + (A - \lambda I)\mathbf{v}_2 - d_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, o $(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, contrario al resultado del inciso a). Por lo tanto, $d_2 = 0$ y $(A - I\lambda)\mathbf{y} = d_1\mathbf{v}_2$. Sea $\mathbf{y} = d_1\mathbf{v}_3$; entonces $(A - I\lambda)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$.

c. Sea $C = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, donde $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ son como antes, linealmente independientes, entonces C^{-1} existe.

$AC = A(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, A\mathbf{v}_3) = (\lambda\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \lambda\mathbf{v}_3)$;

$$CJ = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$(\lambda\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \lambda\mathbf{v}_3) = AC$; de manera que $J = C^{-1}AC$.

21. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

23. Si $m = k$, entonces $A^m = 0$ por definición de índice de nilpotencia. Si $m > k$, entonces $A^m = A^{m-k}A^k = A^{m-k}0 = 0$.

25. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

Aquí, las λ_i no son necesariamente distintas. Además, los bloques pueden permutarse en la diagonal.

27. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Lo bloques de Jordan se pueden permutar en la diagonal.

29. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Los bloques de Jordan se pueden permutar en la diagonal.

31. $$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Los bloques de Jordan se pueden permutar en la diagonal.

MATLAB 6.6

1. a. Demuestre que
$(A - 2I)(\text{col } 1) = 0$,
$(A - 2I)(\text{col } 2) = 9$ y
$(A - 3I)(\text{col } 3) = 0$. Para el inciso iv) utilice las propiedades de semejanza para concluir que A y J tienen los mismos valores propios con las correspondientes multiplicidades algebraica y geométrica. Es sencillo determinar las multiplicidades algebraica y geométrica para los valores propios de J.

   c. Para $\lambda = 2$, la columna 1 es un vector propio y la columna 2 es un vector propio generalizado; tiene multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1. Para $\lambda = 3$, la columna 3 es un vector propio y la columna 4 un vector propio generalizado; tiene multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1.

Problemas 6.7, página 616

1. $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5e^{-4t} + 2e^{3t} & 2e^{-4t} - 2e^{3t} \\ 5e^{-4t} - 5e^{3t} & 2e^{-4t} + 5e^{3t} \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 \text{ sen } t + \cos t & -\text{sen } t \\ 5 \text{ sen } t & -2 \text{ sen } t + \cos t \end{pmatrix}$

5. $e^{-3t}\begin{pmatrix} 1-7t & -7t \\ 7t & 1+7t \end{pmatrix}$

7. $e^{-5t}\begin{pmatrix} 1-7t & 7t \\ -7t & 1+7t \end{pmatrix}$

9. $$\begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{2t} + 6te^{2t} & -12e^t + 12e^{2t} - 6te^{2t} & 6te^{2t} \\ e^t - e^{2t} + 2te^{2t} & -3e^t + 4e^{2t} - 2te^{2t} & 2te^{2t} \\ -3e^t + 3e^{2t} - 4te^{2t} & 9e^t - 9e^{2t} + 4te^{2t} & -4te^{2t} + e^{2t} \end{pmatrix}$$

11. $\mathbf{x}(t) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^t - 2e^{4t} & -e^t + e^{4t} \\ -2e^t + 2e^{4t} & -2e^t - e^{4t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$, lo que lleva a

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \tfrac{1}{3}[(x_1(0) + x_2(0))e^t \\ &\quad + (2x_1(0) - x_2(0))e^{4t}] \\ &= \tfrac{1}{3}[(x_1(0) + x_2(0)) \\ &\quad + (2x_1(0) - x_2(0))e^{3t}]e^t \end{aligned}$$

Si $2x_1(0) < x_2(0)$, entonces la primera población se extinguirá cuando $x_1(0) + x_2(0) = [x_2(0) - 2x_1(0)]e^{3t}$, o sea,

$$t = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x_1(0) + x_2(0)}{x_2(0) - 2x_1(0)}\right)$$

13. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{1000}\begin{pmatrix} -30 & 10 \\ 30 & -30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500\,(e^{\alpha t} + e^{\beta t}) \\ 500\,\sqrt{3}\,(e^{\alpha t} - e^{\beta t}) \end{pmatrix}$

donde $\alpha = -0.03 + \sqrt{0.0003} \approx -0.0127$ y $\beta = -0.03 - \sqrt{0.0003} \approx -0.0473$.

15. **a.** $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

b. $\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + b$ de manera que $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

17. $(1 + 5t)e^{-3t}$ **19.** $\frac{8}{7}e^{5t} + \frac{13}{7}e^{-2t}$

21. Por el problema 20, $N_3^k = 0$ para $k \geq 3$.

Entonces $e^{N_3t} = I + N_3t + N_3^2\frac{t^2}{2} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. De 6.6.20, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y

$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de manera que

$$\begin{aligned} e^{At} &= Ce^{Jt}C^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= e^{-t}\begin{pmatrix} 1-t-t^2/2 & t+t^2/2 & -t^2/2 \\ -2t-t^2/2 & 1+2t+t^2/2 & -t-t^2/2 \\ -t & t & 1-t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

25. $e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} e^{-4t} & te^{-4t} & (t^2/2)e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} & te^{-4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$

Problemas 6.8, página 626

1. **a.** $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 12 = 0$;

b. $p(A) = A^2 + A - 12I$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. $A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

3. **a.** $p(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda$
b. $p(A) = -A^3 + 4A^2 - 3A$

$$= -\begin{pmatrix} 5 & -9 & 4 \\ -9 & 18 & -9 \\ 4 & -9 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -12 & 4 \\ -12 & 24 & -12 \\ 4 & -12 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. A^{-1} no existe.

5. **a.** $p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$
b. $p(A) = -A^3 + 3A^2 - 3A + I$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -8 & 6 \\ 6 & -15 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & -9 & 9 \\ 9 & -24 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & -9 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. **a.** $p(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 18\lambda + 9 = 0$
b. $p(A) = -A^3 + 6A^2 + 18A + 9I$

$$= -\begin{pmatrix} 63 & 54 & 108 \\ 180 & 189 & 324 \\ 168 & 204 & 315 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 72 & 54 \\ 108 & 162 & 216 \\ 150 & 114 & 252 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 & -18 & 54 \\ 72 & -18 & 108 \\ 18 & 90 & 54 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -27 & 18 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \\ 19 & -11 & 6 \end{pmatrix}$

9. **a.** $p(\lambda) = (a - \lambda)^4$
b. $p(A) = (aI - A)^4$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/a^2 & cb/a^3 & -bcd/a^4 \\ 0 & 1/a & -c/a^2 & cd/a^3 \\ 0 & 0 & 1/a & -d/a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a \end{pmatrix}$$

11. $|\lambda| \leq 7$ y $\text{Re}\,\lambda \geq \frac{13}{6}$

$y = \text{Im}\, z$
$(x - 6)^2 + y^2 = 1$
$(x - 4)^2 + y^2 = 1$
$x = \text{Re}\, z$
0
2
4
6
$(x - 3)^2 + y^2 = \frac{25}{36}$
$(x - 5)^2 + y^2 = 1$

13. $|\lambda| \le 10.5$ y $-10.5 \le \text{Re}\,\lambda \le 5.75$

$y = \text{Im}\,z$

$(x + 10)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

$(x - 4)^2 + y^2 = 1$

$x = \text{Re}\,z$

-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6

$(x + 7)^2 + y^2 = \frac{16}{25}$

$(x - 5)^2 + y^2 = \frac{9}{16}$

15. Como A es simétrica, los valores propios de A son reales. Entonces, por el teorema de Gershgorin, $\lambda = \text{Re}\,\lambda \ge 4 - (2 + 1 + \frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$.

17. a. $F(\lambda) = B_0C_0 + B_0C_1\lambda + B_1C_0\lambda + B_1C_1\lambda^2$

b. $P(A)Q(A) = (B_0 + B_1A) \times (C_0 + C_1A) = B_0C_0 + B_0C_1A + B_1AC_0 + B_1AC_1A$

$F(A) = B_0C_0 + B_0C_1A + B_1C_0A + B_1C_1A^2$

$F(A) = P(A)Q(A)$ si y sólo si $C_0A = AC_0$ (en el tercer término) y $AC_1A = C_1A^2$ en el cuarto término.

19. $\det A = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n$. Si $\det A = 0$, entonces $\lambda_i = 0$ para alguna i. Pero $|\lambda_i - a_{ii}| \le r_i$ de manera que $|0 - a_{ii}| = |a_{ii}| \le r_i$, lo que es imposible ya que A es un determinante con diagonal estrictamente dominante. Por lo tanto, $\lambda_i \ne 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\det A \ne 0$.

MATLAB 6.8

1. Para el problema 1, $A^{-1} = \frac{1}{12}(I + A)$. Para el problema 13, $A^{-1} = -I - A - A^2$.

3. Debe observarse que los asteriscos (*) blancos están dentro de la unión de los círculos.

Capítulo 6. Repaso, página 633

1. $4, -2$;

$E_4 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$;

$E_{-2} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$

3. $1, 7, -5$;

$E_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}-6\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$;

$E_7 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$;

$E_{-5} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

5. $1, 3, 3 + \sqrt{2}i, 3 - \sqrt{2}i$;

$E_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$;

$E_3 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$;

$E_{3+\sqrt{2}i} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\\sqrt{2}i\end{pmatrix}\right\}$;

$E_{3-\sqrt{2}i} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\sqrt{2}i\end{pmatrix}\right\}$

7. $C = \begin{pmatrix}-3 & 1\\4 & -1\end{pmatrix}$; $C^{-1}AC = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & -3\end{pmatrix}$

9. $C = \begin{pmatrix}0 & -1-i & -1+i\\1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

11. No diagonalizable

13. $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$Q^tAQ = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

17. $\dfrac{x'^2}{8/(3+\sqrt{2})} + \dfrac{y'^2}{8/(3-\sqrt{2})} = 1$: elipse

19. $\dfrac{y'^2}{10/(\sqrt{13}+3)} - \dfrac{x'^2}{10/(\sqrt{13}-3)}$
$= 1$: hipérbola

21. $4x'^2 - 3y'^2$

23. $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

25. $\begin{pmatrix} -e^t + 2e^{-t} & 2e^t - 2e^{-t} \\ -e^t + e^{-t} & 2e^t - e^{-t} \end{pmatrix}$

27. $e^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t - \text{sen } 2t & -2\text{sen } 2t \\ \text{sen } 2t & \cos 2t + \text{sen } 2t \end{pmatrix}$

29. $|\lambda| \le 5$ y $-5 \le \text{Re } \lambda \le \frac{14}{7}$

Apéndice 1, página A-6

1. Primero, ¿es cierto para $n = 1$? $2 = 1(1+1)$; sí lo es. Ahora suponga que es cierto para $n = k$. Entonces $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k+1)$. Ahora se debe demostrar que es cierto para $n = k+1$; es decir, se debe demostrar que $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k+1) = (k+1)[(k+1)+1]$. Se sabe que $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1)$ (hipótesis de inducción) $= (k+2)(k+1) = (k+1)[(k+1)+1]$

3. Primero, ¿es cierto para $n = 1$? $2 = \dfrac{1(3\cdot 1+1)}{2}$; sí lo es. Ahora suponga que es cierto para $n = k$. Entonces $2 + 5 + 8 + \cdots + (3k-1) = \dfrac{k(3k+1)}{2}$. Debe demostrarse que es cierto para $n = k+1$; es decir, debe demostrarse que

$$\begin{aligned} 2 + 5 + 8 + \cdots + (3k-1) + (3k+2) &= \frac{(k+1)[3(k+1)+1]}{2} \\ &= \frac{(k+1)(3k+4)}{2} \\ &= \frac{3k^2+7k+4}{2} \end{aligned}$$

Se suma $3k+2$ a ambos lados de la ecuación en la hipótesis de inducción y se obtiene

$$\begin{aligned} 2 + 5 + 8 + \cdots + (3k-1) + (3k+2) &= \frac{k(3k+1)}{2} + (3k+2) \\ &= \frac{3k^2+k}{2} + \frac{6k+4}{2} \\ &= \frac{3k^2+7k+4}{2} \end{aligned}$$

5. ¿Es cierto para $n = 1$? Sí, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^1 = \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{1} = 1$. Ahora suponga que es cierto para $n = k$; es decir, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^k < \dfrac{1}{k}$.

Entonces $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2k} < \frac{1}{k+1}$, ya que $2k > k+1$ si $k > 1$.

7. ¿Es cierto para $n = 1$? Sí, ya que $1 + 2 = 2^2 - 1$. Ahora suponga que es cierto para $n = k$; estos es, $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Debe demostrarse que es cierto para $n = k + 1$, o que $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Se suma 2^{k+1} a ambos lados de la hipótesis de inducción y se obtiene

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

9. ¿Es cierto para $n = 1$? Sí, ya que $1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2^1}$. Ahora suponga que es cierto para $n = k$; es decir,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^k}$$

Se debe probar para $n = k + 1$; esto es,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

Sume $\frac{1}{2^{k+1}}$ a ambos lados de la hipótesis de inducción para obtener

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} &= 2 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

11. ¿Es cierto para $n = 1$? Sí, $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$. Ahora suponga que es cierto para $n = k$; es decir,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

Se tiene que demostrar para $n = k + 1$; esto es,

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{4} \\ &= \frac{k^4 + 6k^3 + 13k^2 + 12k + 4}{4} \end{aligned}$$

Sume $(k + 1)^3$ a ambos lados de la hipótesis de inducción.

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^4 + 2k^3 + k^2}{4} + k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= \frac{k^4 + 2k^3 + k^2}{4} + \frac{4k^3 + 12k^2 + 12k + 4}{4} \\ &= \frac{k^4 + 6k^3 + 13k^2 + 12k + 4}{4} \end{aligned}$$

13. ¿Es cierto para $n = 1$? Sí, $1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (4-1)}{3}$. Suponga que es cierto para $n = k$; es decir,

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \cdots + (2k-1)(2k) = \frac{k(k+1)(4k-1)}{3}$$

Ahora se prueba para $n = k + 1$; esto es,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + (2k-1)(2k) + (2k+1)(2k+2) &= \frac{(k+1)(k+2)(4k+3)}{3} \\ &= \frac{4k^3 + 15k^2 + 17k + 6}{3} \end{aligned}$$

Se suma $[2(k+1)-1][2(k+1)] = (2k+1)(2k+2)$ a ambos lados de la hipótesis de inducción. Se obtiene

$$1\cdot 2 + 3\cdot 4 + \cdots + (2k-1)(2k) + (2k+1)(2k+2)$$
$$= \frac{k(k+1)(4k-1)}{3} + (2k+1)(2k+2)$$
$$= \frac{4k^3+3k^2-k}{3} + 4k^2+6k+2$$
$$= \frac{4k^3+3k^2-k}{3} + \frac{12k^2+18k+6}{3}$$
$$= \frac{4k^3+15k^2+17k+6}{3}$$

Algunos de los ejercicios utilizan el hecho de que si un entero m es divisor de un entero a y es divisor de otro entero b, entonces $a+b$ es divisible entre m.

15. ¿Es cierto para $n=1$? Sí, ya que $1^2 + 1 = 2$ es par. Suponga que k^2+k es par. Ahora pruebe para $k+1$; es decir, se tiene que demostrar que $(k+1)^2+(k+1)$ es par. Pero

$$(k+1)^2+(k+1) = k^2+2k+1+k+1 = (k^2+k)+(2k+2)$$

Ahora 2 es divisor de k^2+k por hipótesis de inducción. Es evidente que $2k$ es divisible entre 2 y que 2 es divisible entre 2. Por lo tanto, 2 es divisor de $k^2+k+2k+2$, lo que quiere decir que es par.

17. ¿Es cierto para $n=1$? Sí, porque $1(1^2+5)=6$ es divisible entre 6. Ahora suponga que es cierto para k, esto es, que $k(k^2+5)$ es divisible entre 6. Ahora se debe probar que $(k+1)[(k+1)^2+5]$ es divisible entre 6.

$$(k+1)[(k+1)^2+5]$$
$$= (k+1)(k^2+2k+6)$$
$$= (k+1)(k^2+5+2k+1)$$
$$= k(k^2+5)+(k^2+5) + k(2k+1)+(2k+1)$$
$$= k(k^2+5)+3(k^2+k)+6$$

Ahora $k(k^2+5)$ es divisible entre 6 por la hipótesis de inducción; es claro que $3(k^2+k)$ es divisible entre 3 y es par, por el problema 15, entonces es divisible entre 6, y por supuesto 6 es divisible entre 6, de manera que 6 es divisor de la expresión dada.

19. El problema es cierto si $n=1$ ya que x^1-1 es divisible entre $x-1$. Ahora suponga que x^k-1 es divisible entre $x-1$. Se tiene que demostrar que $x^{k+1}-1$ es divisible entre $x-1$. Ahora bien,

$$x^{k+1}-1 = x^kx-1 = x^kx-x+x-1 = x(x^k-1)+(x-1).$$

El primer término es divisible entre $x-1$ por la hipótesis de inducción, y el segundo término en la suma es divisible por $x-1$; entonces $x-1$ es divisor de la expresión dada.

21. Si $n=1$, $(ab)^1 = a^1b^1 = ab$, de manera que es cierto. Ahora supóngalo para $n=k$; es decir, $(ab)^k = a^kb^k$. Debe demostrarse para $k+1$; es decir, $(ab)^{k+1} = a^{k+1}b^{k+1}$. Ahora bien,

$$(ab)^{k+1} = (ab)^k(ab) = a^kb^kab$$
$$= a^kab^kb \text{ (ya que la multiplicación es conmutativa)}$$
$$= a^{k+1}b^{k+1}$$

23. Del teorema 2.2.1, $\det A_1A_2 = \det A_1 \det A_2$, así que el resultado se cumple para $n=2$. Suponga que se cumple para $n=k$. Entonces,

$$\det A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$$
$$= \det A_1A_2\cdots A_k \det A_{k+1}$$
(usando el resultado para $n=2$)
$$= (\det A_1 \det A_2 \cdots \det A_k)\det A_{k+1}$$
(usando el resultado para $n=k$)
$$= \det A_1 \det A_2 \cdots \det A_k \det A_{k+1},$$

que es el resultado para $n=k+1$.

25. $n = 1$; hay exactamente dos subconjuntos de un conjunto con un elemento: el conjunto mismo y el conjunto vacío. Ahora suponga que hay exactamente 2^k subconjuntos de un conjunto con k elementos. Considere un conjunto A con $k + 1$ elementos. Elimine uno y llámelo a_{k+1}. El resto de los elementos forma un conjunto con k elementos. Este conjunto tiene 2^k subconjuntos. Agregue a_{k+1} a cada uno de estos 2^k subconjuntos para obtener otros 2^k subconjuntos. En otras palabras, A tiene 2^k subconjuntos que contienen al elemento a_{k+1} y 2^k subconjuntos que no lo contienen; esto hace un total de $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ subconjuntos.

27. No es cierto para $n = 2$. En este caso, S_1 y S_2 son ajenos y, por lo tanto, no se puede decir que $h_1 = h_2$.

Apéndice 2, página A-17

1. $9 - 7i$ **3.** 2 **5.** $-27 + 5i$

7. $5\sqrt{2}\,e^{i(\pi/4)}$

9. $3\sqrt{2}\,e^{i(7\pi/4)} = 3\sqrt{2}\,e^{-i(\pi/4)}$

11. $6e^{(\pi/6)i}$

13. $8e^{i(11\pi/6)} = 8e^{-i(\pi/6)}$

15. $2e^{i(4\pi/3)} = 2e^{-i(2\pi/3)}$

17. -2 **19.** $-\sqrt{2}/4 - i(\sqrt{2}/4)$

21. $-2\sqrt{3} + 2i$

23. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$

25. $\cos 1 + i \operatorname{sen} 1 \approx 0.5403 + 0.8415i$

27. $4 - 6i$ **29.** $7i$

31. $2e^{-i(\pi/7)}$ **33.** $3e^{i(4\pi/11)}$

35. Si $z = \overline{z}$, entonces $\alpha + i\beta = \alpha - i\beta$, o $i\beta = -i\beta$, lo que es posible si y sólo si $\beta = 0$, de manera que z es real. Si z es real, entonces $z = \alpha = \overline{z}$.

37. $z\overline{z} = (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 - (i^2\beta^2) = \alpha^2 + \beta^2 = |z|^2$

39. El lugar geométrico de los puntos en un círculo en el plano complejo, centrado en z_0 con radio a. Si $z_0 = x_0 + iy_0$, entonces, en las coordenadas x y y éste es el círculo cuya ecuación es $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$.

41. Suponga que $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$. Entonces $\overline{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{0} = 0 = \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = \overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0$ (ya que las a_i son reales) $= \overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 = p(\overline{z}) = 0$. Aquí, se ha usado el hecho de que para cualquier entero k, $\overline{z^k} = \overline{z}^k$. Esto se deduce fácilmente si se escribe z en la forma polar. Si $z = re^{i\theta}$, entonces $z^n = r^n e^{in\theta}$, $\overline{z^n} = r^n e^{-in\theta}$, $\overline{z} = re^{-i\theta}$ y $\overline{z}^n = r^n e^{-in\theta} = \overline{z^n}$.

43. Como $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^1 = \cos 1 \cdot \theta + i \operatorname{sen} 1 \cdot \theta$, la fórmula de DeMoivre se cumple para $n = 1$. Suponga que se cumple para $n = k$; es decir, $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^k = \cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta$. Entonces $(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^{k+1} = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^k(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = (\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta) \times (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = [\cos k\theta \cos\theta - \operatorname{sen} k\theta \operatorname{sen}\theta] + i[\operatorname{sen} k\theta \cos\theta + \cos k\theta \operatorname{sen}\theta] = \cos(k\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(k\theta + \theta) = \cos(k+1)\theta + i \operatorname{sen}(k+1)\theta$, que es la fórmula de DeMoivre para $n = k + 1$.

Apéndice 3, página A-26

1. 0.33333333×10^0

3. -0.35×10^{-4}

5. 0.77777777×10^0

7. 0.77272727×10^1

9. -0.18833333×10^2

11. 0.23705963×10^9

13. 0.83742×10^{-20}

15. $\epsilon_a = 0.1$, $\epsilon_r = 0.0002$

17. $\epsilon_a = 0.005$, $\epsilon_r = 0.04$

19. $\epsilon_a = 0.00333\ldots$, $\epsilon_r \approx 0.57143 \times 10^{-3}$

21. $\varepsilon_a = 1$, $\varepsilon_r \approx 0.1419144 \times 10^{-4}$

23. Existen tres operaciones diferentes: 1) dividir el renglón i entre a_{ii}; 2) multiplicar el renglón i por a_{ji}, $j > i$ y restarlo del renglón j; 3) hacer una sustitución regresiva. La operación 1) requiere $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ multiplicaciones. La operación 2) requiere

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= \frac{(n^3-n)}{3}$$

multiplicaciones y sumas. La operación 3) requiere

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$

multiplicaciones y sumas. Si se suman estas fracciones se obtienen los resultados deseados.

25. Existen tres operaciones: 1) dividir el renglón i entre a_{ii}; 2) multiplicar el renglón i por a_{ji}, $j > i$ y restarlo del renglón j; 3) guardar los n elementos en la diagonal y multiplicarlos al final. La operación 1) requiere $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$ multiplicaciones. La operación 2) requiere $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ multiplicaciones.

La operación 3) requiere $n - 1$ multiplicaciones. La suma es $\frac{n-1}{6}[3n + n(2n-1) + 6] = \frac{1}{6}(n-1)(2n^2 + 2n + 6) = \frac{1}{6}(2n^3 + 4n - 6) = \frac{n^3}{3} + \frac{2}{3}n - 1$ multiplicaciones. Un cálculo similar lleva al número de sumas dadas en la tabla A.1.

27. 7545 microsegundos = 7.545×10^{-3} segundos

29. mqn multiplicaciones y $mq(n-1)$ sumas.

Apéndice 4, página A-34

1. $x_1 = 1.6$, $x_2 = -0.800002$ (el valor real es -0.8), $x_3 = -3.7$

3. $x_1 = -0.000001$, $x_2 = -2.61001$, $x_3 = 4.3$. La solución exacta es $(0, -2.61, 4.3)$

5. **a.** con pivoteo: $x_1 = 5.99$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3.99$

b. sin pivoteo: $x_1 = 6$, $x_2 = -2$ y $x_3 = 4$ (Sí, algunas veces es mejor seguir la trayectoria más sencilla. En el problema 6 el pivoteo da respuestas mucho más exactas.) Los errores relativos con pivoteo son $\frac{1}{600} = 0.0017$, 0, y $\frac{1}{400} = 0.0025$.

7. Una solución redondeada con 3 cifras significativas es $x_1 = 1050$ y $x_2 = -1000$. La solución exacta es $x_1 = \frac{13250}{11} \approx 1204$ y $x_2 = -\frac{12700}{11} \approx -1154$. Los errores relativos son $0.1279 \approx 13\%$ y $0.1334 \approx 13\%$

Índice

El álgebra lineal es una materia que tradicionalmente se impartía en licenciaturas donde es necesaria la formación en matemáticas y física; sin embargo, el rápido desarrollo de las computadoras de alta velocidad ha obligado a que disciplinas como administración, economía y ciencias sociales, entre otras, incorporen las matemáticas en sus cursos. Así, al escribir este libro el autor ha tenido en mente:

- Hacer notar al estudiante la importancia del álgebra lineal en sus campos de estudio. Por ello, tanto ejemplos como ejercicios son referidos a disciplinas como agricultura, economía, administración, estadística, ingenierías, ciencias sociales, etc.: en total son 342 ejemplos y 2 400 ejercicios con grado creciente de dificultad.
- Que tanto los estudiantes que han acreditado un curso de álgebra como aquellos que han aprobado uno de cálculo puedan aprender la materia a través de teoría accesible y de una variedad de ejemplos y ejercicios.
- Que el estudiante encuentre un gran número de aplicaciones en las secciones de Matlab 0/00, con más de 230 problemas opcionales para esta herramienta. Además, el libro proporciona una introducción y tutoría breve, diseñados con el fin de que el estudiante conozca los comandos de Matlab conforme se vayan requiriendo al solucionar los problemas.

McGraw-Hill Interamericana
Editores, S.A. de C.V.
A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies
www.mcgraw-hill.com.mx